در صورتیکه یک سیستم n درجه آزادی را در نظر بگیریم از نوشتن اصل کار مجازی برای اصل دالامبر خواهیم داشت:

$$\sum_i \left(F_i - m_i\frac{d^2}{dt^2}r_i\right)\delta r_i = 0 \qquad (1)$$

بردار موقعیت r_i تابعی از مختصات عمومی و زمان است:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \qquad (2)$$

بنابراین تغییر مکان مجازی r_i عبارت است از:

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (3)$$

این در حالیکه تغییر مکان واقعی برابر است:

$$d r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\cdot\delta q_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \qquad (4)$$

جمله اول رابطه (۱) عبارت است از:

$$\sum_i F_i\cdot\delta r_i = \sum_i F_i\cdot\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$= \sum_j\left(\sum_i F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = \sum_j Q_j\,\delta q_j \qquad (5)$$

در این رابطه نیروی عمومی برابر است با:

$$Q_j = \sum_i F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \qquad (6)$$

و در واقع آن نیرو و یا گشتاور است.

جمله دوم رابطه (۱) مربوط به کار انجام شده توسط نیروی اینرسی است:

$$\sum_i m_i\frac{d^2 r_i}{dt^2}\,\delta r_i = \sum_i m_i\frac{d^2 r_i}{dt^2}\sum_j\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (7)$$

$$= \sum_j\left(\sum_i m_i\frac{d^2 r_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

با در نظر گرفتن قسمتی از این رابطه:

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\overbrace{m_i \frac{d\underline{r}_i}{dt}}^{m\underline{v}_i}\cdot\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_i \left(m_i \frac{d^2\underline{r}_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) + \sum_i\left(m_i\frac{d\underline{r}_i}{dt}\cdot\overbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)}^{\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j}}\right)$$

جمله آخر سمت راست:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)\overbrace{\frac{\partial q_k}{\partial t}}^{\dot{q}_k} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{\left\{\sum_k \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}\right\}}_{\dot{\underline{r}}_i} = \frac{\partial \dot{\underline{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j}$$

در حقیقت سرعت برابر است با:

$$\underline{v}_i = \frac{d}{dt}\underline{r}_i = \sum_k \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$$

از این رابطه دیده می‌شود:

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}$$

با جایگذاری این عبارت در رابطه (۲)

$$\sum_i m_i \frac{d^2\underline{r}_i}{dt^2}\cdot\delta \underline{r}_i = \sum_i\left\{\frac{d}{dt}\left(m_i \underline{v}_i\cdot\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \underline{v}_i\cdot\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j}\right\} \quad (۸)$$

با در نظر گرفتن انرژی جنبشی:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \underline{v}_i\cdot\underline{v}_i$$

جمله اول و دوم سمت راست (۸) عبارت است از $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$ و $\frac{\partial T}{\partial q_j}$، بنابراین رابطه (۸) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sum_j\left[Q_j - \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right\}\right]\delta q_j = 0 \quad (۹)$$

با توجه به آنکه مختصات تعمیم یافته مستقل می‌باشند داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, n$$

حال نیروهای عمومی را در نظر گرفته و آنها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

- نیروهای مستقل از نقش پتانسیل   Potential Free Forces
- نیروی مربوط به پتانسیل

نیروهایی که در نقش پتانسیل آنها از منفی تابع پتانسیل (انرژی پتانسیل) است و در رابطه با موقعیت و وضعیت جسم هستند را می‌توان با استفاده از انرژی پتانسیل تعریف نمود:

انرژی پتانسیل: کار انجام شده بر علیه نیرو برای تغییر مکان δq_i

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{Potential Energy}$$

$$\delta V = -Q_i \delta q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i} \delta q_i \Rightarrow Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

همانطور که دیده می‌شود نیروی Q_i را می‌توان با مشتق گیری از تابع انرژی پتانسیل به دست آورد.

حال اگر رابطه لاگرانژ را مجدد بنویسیم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)$$

که Q_i تمام نیروهای عمومی با نقش غیر پتانسیل است:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, n$$

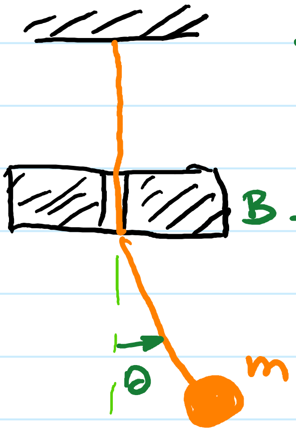
معادله فوق معادله لاگرانژ است که رابطه بین انرژی جنبشی سیستم و نیروهای عمومی را برقرار می‌کند.

اگر کمیت جدیدی را که مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل است را تابع لاگرانژین (Lagrangian) تعریف کنیم

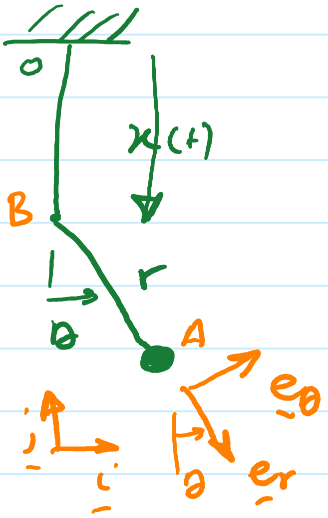
$$L = T - V$$

بنابراین معادله لاگرانژ بصورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, n$$



ل: نخ پاندول نشان داده شده در شکل به جای ا
از درون قرقره B عبور کرده است. حرکت قرقره
در جهت قائم حرکت از پیش تعیین شده x(t) است.
مطلوبست: تعیین معادله دیفرانسیل حرکت.



همانطور که دیده می‌شود نیروی خارجی غیر از وزن وجود ندارد.
سیستم دارای یک درجه آزادی θ می‌باشد. x درجه آزادی نیست زیرا
حرکتش معلوم است.

برای حل می‌بایست انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را بدست آورد.

برای انرژی جنبشی به سرعت A نیاز است. از حرکت نسبی استفاده
می‌کنیم:

$$\underline{v}_A = \underline{v}_{A/B} + \underline{v}_B = \dot r\,\underline{e}_r + r\dot\theta\,\underline{e}_\theta - \dot x\,\underline{j}$$

اما:

$$r = AB = l - x \Rightarrow v_r = \dot r = -\dot x \,,\; v_\theta = r\dot\theta = (l-x)\dot\theta$$

نتیجتاً:

$$\underline{v}_A = -\dot x\,\underline{e}_r + (l-x)\dot\theta\,\underline{e}_\theta + \dot x(\cos\theta\,\underline{e}_r - \sin\theta\,\underline{e}_\theta)$$

$$= -\dot x(1-\cos\theta)\,\underline{e}_r + \left[(l-x)\dot\theta - \dot x\sin\theta\right]\underline{e}_\theta$$

انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m\,\underline{v}_A\cdot\underline{v}_A$$

$$= \frac{1}{2} m\left[\dot x^2(1-\cos\theta)^2 + (l-x)^2\dot\theta^2 - 2(l-x)\dot\theta\dot x\sin\theta + \dot x^2\sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2} m\left[2\dot x^2(1-\cos\theta) + (l-x)^2\dot\theta^2 - 2(l-x)\dot x\dot\theta\sin\theta\right]$$

برای انرژی پتانسیل از نقطه o مبنا می‌گیریم:

$$V = -mg\left[x + (l-x)\cos\theta\right]$$

رابطه لاگرانژ برای مسئله فوق عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

در این رابطه:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = m\left[(l-x)^2\dot\theta - (l-x)\dot x \sin\theta\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) = m\left[2(l-x)(-\dot x)\dot\theta + (l-x)^2\ddot\theta + \dot x^2 \sin\theta - (l-x)\ddot x \sin\theta - (l-x)\dot x\dot\theta\cos\theta\right]$$

و:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = m\left[\dot x^2 \sin\theta - (l-x)\dot x\dot\theta\cos\theta\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg(l-x)\sin\theta$$

با قرار دادن در معادله لاگرانژ:

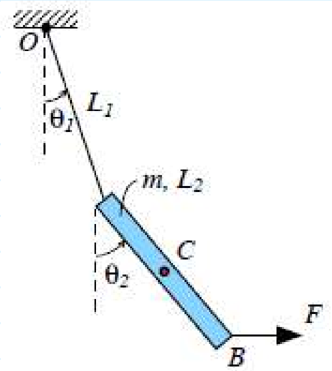
$$(l-x)\left[(l-x)\ddot\theta - 2\dot x\dot\theta + (g-\ddot x)\sin\theta\right] = 0$$

با $l-x\neq 0$ خواهیم داشت:

$$(l-x)\ddot\theta - 2\dot x\dot\theta + (g-\ddot x)\sin\theta = 0$$

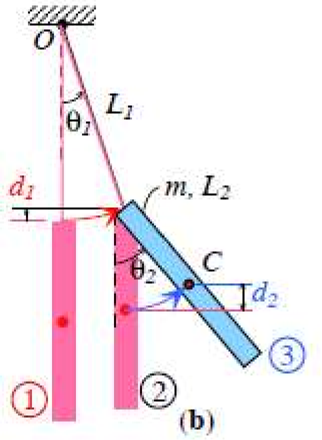
Problem Statement: A uniform rigid bar of total mass m and length L_2, suspended at point O by a string of length L_1, is acted upon by a horizontal force F, as shown in Figure 1.

Use the Lagrange equation to derive the equations of motion for the system.



سیستم دارای ۲ درجه آزادی است که با θ_1 و θ_2 نشان داده شده اند.

برای تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت می‌بایست انرژی‌های پتانسیل و جنبشی سیستم محاسبه شوند.



انرژی پتانسیل فقط مربوط به جاذبه است.

برای محاسبه آن، وضعیت نهایی را در دو مرحله می‌سازیم.

بار اول سیستم به اندازه θ_1 حول O می‌چرخد.

مرحله دوم سپس به اندازه θ_2 حول انتهای میله می‌چرخد تا به وضعیت 3 برسد.

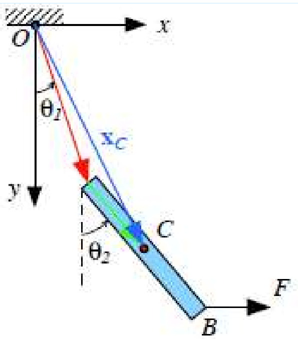
بنابراین میزان تغییر ارتفاع مرکز ثقل میله عبارت است از:

$$d_1+d_2 = L_1(1-\cos\theta_1) + \frac{L_2}{2}(1-\cos\theta_2)$$

و انرژی پتانسیل برابر است با:

$$V = mg(d_1+d_2) = mg\left[L_1(1-\cos\theta_1) + \frac{L_2}{2}(1-\cos\theta_2)\right]$$

اما انرژی جنبشی سیستم شامل انرژی جنبشی خطی مربوط به حرکت خطی مرکز ثقل و انرژی جنبشی دورانی حول مرکز ثقل است. برای تعیین سرعت مرکز ثقل موقعیت آن x_c را مشخص کرده و سپس از آن مشتق گرفته تا سرعت به دست آید.



$$\mathbf{x}_C = (L_1\sin\theta_1 + \frac{L_2}{2}\sin\theta_2)\hat{\mathbf{i}} + (L_1\cos\theta_1 + \frac{L_2}{2}\cos\theta_2)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{x}}_C = \left(L_1\cos\theta_1\dot\theta_1 + \frac{L_2}{2}\cos\theta_2\dot\theta_2\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(L_1\sin\theta_1\dot\theta_1 + \frac{L_2}{2}\sin\theta_2\dot\theta_2\right)\hat{\mathbf{j}}$$

بنابراین :

$$v_C^2 = \underline{v}_C\cdot\underline{v}_C = L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{L_2^2}{4}\dot{\theta}_2^2 + L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

در نتیجه انرژی جنبشی برابر است با :

انرژی جنبشی خطی ← انرژی جنبشی دورانی →

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2}mL_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6}mL_2^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}mL_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

دقت داریم که حرکت دورانی فقط θ_2 است و $I=\frac{1}{12}mL_2^2$

در مرحله بعد نیروی تعمیم یافته محاسبه می‌گردد. برای این کار کار مجازی نیروی F محاسبه می‌گردد.

ابتدا تغییرات نقطه اعمال نیرو را حساب کرده و سپس تغییرات مجازی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\underline{x}_B = (L_1\sin\theta_1 + L_2\sin\theta_2)\,\underline{i} + (L_1\cos\theta_1 + L_2\cos\theta_2)\,\underline{j}$$

$$\delta\underline{x}_B = \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i}\delta q_i = \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial \theta_1}\delta\theta_1 + \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial \theta_2}\delta\theta_2$$

$$= (L_1\cos\theta_1\,\delta\theta_1 + L_2\cos\theta_2\,\delta\theta_2)\,\underline{i} + (-L_1\sin\theta_1\,\delta\theta_1 - L_2\sin\theta_2\,\delta\theta_2)\,\underline{j}$$

$$\delta W = \underline{F}\cdot\delta\underline{x}_B = (F\underline{i})\cdot\left[(L_1\cos\theta_1\,\delta\theta_1 + L_2\cos\theta_2\,\delta\theta_2)\,\underline{i} - (L_1\sin\theta_1\,\delta\theta_1 + L_2\sin\theta_2\,\delta\theta_2)\,\underline{j}\right]$$

$$= FL_1\cos\theta_1\,\delta\theta_1 + FL_2\cos\theta_2\,\delta\theta_2 = Q_1\delta\theta_1 + Q_2\delta\theta_2$$

$$Q_1 = FL_1\cos\theta_1 \qquad , \quad Q_2 = FL_2\cos\theta_2$$

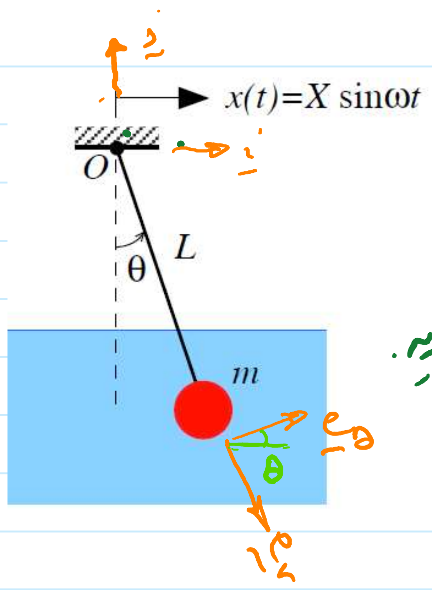
با قرار دادن در معادله لاگرانژ

$q_1 = \theta_1$

$$\Rightarrow mL_1^2\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}mL_1L_2\left[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + \dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right] + mgL_1\sin\theta_1 = FL_1\cos\theta_1$$

$q = \theta_2$

$$\frac{1}{2}mL_1L_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - \dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)\right] + \frac{1}{3}mL_2^2\ddot{\theta}_2 + mgL_2\sin\theta_2 = FL_2\cos\theta_2$$



مثال: در سیستم شکل مقابل یا پاندول ساده به طول l
و جرم m درون سیالی با ضریب اصطکاک ویسکوز c
غوطه‌ور است. پایه O تحت جابجایی هارمونیکی به فرم
$x(t)=X\sin\omega t$ قرار دارد. معادله دیفرانسیل حرکت را به دست آورید.

از روش نسبی سرعت m را بدست می‌آوریم. $\underline{v}_m$ را می‌توان
برحسب سیستم دکارتی یا قطبی به دست آورد:

$$\underline{v}_m=\underline{v}_o+\underline{v}_{m/o}=\dot{x}\,\underline{i}'+l\dot{\theta}(\cos\theta\,\underline{i}+\sin\theta\,\underline{j})$$

$$=(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)\,\underline{i}+l\dot{\theta}\sin\theta\,\underline{j}$$

$$\underline{v}_m=\dot{x}\,\underline{i}'+l\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta=(\dot{x}\cos\theta\,\underline{e}_\theta+\dot{x}\sin\theta\,\underline{e}_r)+l\dot{\theta}\,\underline{e}_\theta$$

$$=\dot{x}\sin\theta\,\underline{e}_r+(l\dot{\theta}+\dot{x}\cos\theta)\,\underline{e}_\theta$$

همچنین

$$v_m^2=\underline{v}_m\cdot\underline{v}_m=\dot{x}+l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

انرژی جنبشی برابر است با:

$$T=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

و انرژی پتانسیل:

$$V=mgl(1-\cos\theta)$$

برای تعیین نیروی عمومی تغییر مکان مجازی را به دست آورده و در نیروی اصطکاک
ضرب کرده تا کار آن به دست آید.

$$\underline{r}_m=\underline{r}_o+\underline{r}_{m/o}=x\,\underline{i}'+l\,\underline{e}_r$$

دقت کنید که x درجه آزادی نیست.

$$\delta\underline{r}_m=\frac{\partial\underline{r}_m}{\partial\theta}\delta\theta=0+l\frac{\partial\underline{e}_r}{\partial\theta}\delta\theta$$

$$=l\,\underline{e}_\theta\,\delta\theta$$

همچنین نیروی استهلاک :

$$\underline{F}_c = -c\underline{V}_m = -c[\dot{x}\sin\theta\,\underline{e}_r + (l\dot{\theta} + \dot{x}\cos\theta)\underline{e}_\theta]$$

نیز داریم :

$$\delta W = \underline{F}_c \cdot \delta\underline{r}_m = -c[\dot{x}\sin\theta\,\underline{e}_r + (l\dot{\theta} + \dot{x}\cos\theta)\underline{e}_\theta] \cdot l\,\delta\theta\,\underline{e}_\theta$$

$$= -c(l\dot{\theta} + \dot{x}\cos\theta)l\,\delta\theta = Q\,\delta\theta$$

$$Q = -c(l^2\dot{\theta} + l\dot{x}\cos\theta)$$

از جایگذاری در معادله لاگرانژ داریم :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}m(2\dot{x}l\cos\theta + 2l^2\dot{\theta}) = m\dot{x}l\cos\theta + ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{x}l\cos\theta - m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{2}m(-2\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta) = -m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl\sin\theta$$

بنابراین :

$$m\ddot{x}l\cos\theta \cancel{- ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} + ml^2\ddot{\theta} \cancel{- (-ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)} + mgl\sin\theta$$

$$= -cl^2\dot{\theta} + cl\dot{x}\cos\theta$$

معادله دیفرانسیل حرکت عبارت است از :

$$ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + mg\sin\theta = -(m\ddot{x} + c\dot{x})\cos\theta$$

تابع تلفات — Dissipation Function

اگر نیروهایی با طبیعت ویسکوز که بصورت خطی تابعی از سرعت هستند وجود داشته باشند،

میتوان آنها را عبارت است از :

$$Q_i = -\sum_j c_{ij}\dot{q}_j$$

توان تعریف آنها عبارت است از :

$$P = -\sum_j Q_j \dot{q}_j$$

در صورتیکه از توان تعریف نسبت به $\dot{q}_i$ مشتق بگیریم :

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_j - \sum_j Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j -c_{ij}\dot{q}_j - Q_j\delta_{ij}$$

$$= \sum_j c_{ij}\dot{q}_j - Q_i = -Q_i - Q_i = -2Q_i$$

نتیجه میگیریم :

$$Q_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i}$$

در صورتیکه نیمه نرخ کار انجام شده در واحد زمان را با F نشان دهیم :

$$F = \frac{1}{2}P \qquad \text{Rayleigh's Dissipation Function}$$

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}$$

حال اگر در معادله لاگرانژ نیروهای اتلافی ویسکوز را

از سایر نیروهای عمومی جدا کنیم :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i + \left(-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

و یا :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

برای حل در مسئله مثل مرتبان به جای نیروی F_c تابع F را محاسبه کرد.

$$F = \frac{1}{2} c V_m^2$$

$$= \frac{1}{2} c \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta \right)$$

با گرفتن مشتق نسبت به $\dot{\theta}$ و قرار دادن در معادله لاگرانژ خواهیم داشت:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} c \left(2 l^2 \dot{\theta} + 2 \dot{x} l \cos\theta \right)$$

$$= c l^2 \dot{\theta} + c l \dot{x} \cos\theta$$

با جایگذاری در معادله لاگرانژ

$$m l \ddot{\theta} + c l \dot{\theta} + m g \sin\theta = -(m \ddot{x} + c \dot{x}) \cos\theta$$