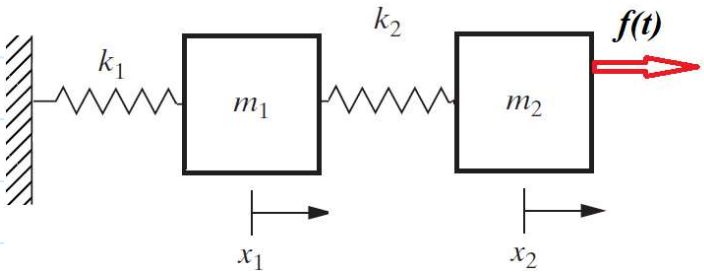
مثال: سیستم دو درجه آزادی شکل مقابل



تحت نیروی $f(t)=300\sin 6t$ قرار دارد

پاسخ سیستم را با توجه به مشخصات:

$k_1=4000\ N/m$, $k_2=2000\ N/m$, $m_1=5\ kg$, $m_2=6\ kg$

با شرایط اولیه صفر بدست آورید.

برای سیستم فوق معادلات حرکت عبارتند از:

$$\underline{\underline{m}}\,\ddot{\underline{x}}+\underline{\underline{k}}\,\underline{x}=\underline{f}(t)$$

$$\begin{pmatrix}5&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\\ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}6000&-2000\\-2000&2000\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\300\sin 6t\end{Bmatrix},\quad \underline{x}(0)=\dot{\underline{x}}(0)=0$$

ابتدا نیاز است که فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم را از ارتعاشات آزاد آن بدست آوریم.

$$\det(\underline{\underline{k}}-\lambda\underline{\underline{m}})=0 \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=200\\ \lambda_2=1333.33\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\omega_1=14.1421\ rad/s\\ \omega_2=36.5148\ rad/s\end{cases}$$

شکل مودها:

$$\begin{cases}(6000-5\lambda)\phi_1-2000\phi_2=0\\ -2000\phi_1+(2000-6\lambda)\phi_2=0\end{cases}$$

$$\lambda_1=200 \Rightarrow (6000-5(200))\phi_1-2000\phi_2=0 \Rightarrow \phi_2=2.5\phi_1$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_1\\2.5\phi_1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix}1\\2.5\end{Bmatrix}$$

$$\lambda_2=1333.33 \Rightarrow (6000-5(1333.33))\phi_1-2000\phi_2=0$$

$$\Rightarrow -666.67\phi_1-2000\phi_2=0 \Rightarrow \phi_2=-\frac{1}{3}\phi_1$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_1\\-\frac{1}{3}\phi_1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}1\\-1/3\end{Bmatrix}$$

ماتریس مودال سیستم است از:

$$\underline{\underline{\phi}}=\begin{pmatrix}1&1\\2.5&-1/3\end{pmatrix}$$

نهایتاً:

$$\underline{x} = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{y} \Rightarrow \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{\Phi}}\,\ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{\Phi}}\,\underline{y} = \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{f}$$

$$\begin{pmatrix} 42.5 & 0 \\ 0 & 5.667 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 8500 & 0 \\ 0 & 7555.55 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 750 \\ -100 \end{Bmatrix} \sin 65t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 42.5\ddot{y}_1 + 8500 y_1 = 750 \sin 65t \\ 5.667\ddot{y}_2 + 7555.55 y_2 = -100 \sin 65t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 + 200 y_1 = 17.65 \sin 65t \\ \ddot{y}_2 + 1333.33 y_2 = -17.65 \sin 65t \end{cases}$$

با شرایط اولیه صفر $\underline{y}(0) = \dot{\underline{y}}(0) = 0$

از رابطه آزاد سیستم یک درجه می‌دانیم:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$$

پاسخ تحت تحریک $x(0)=0, \dot{x}(0)=0$ عبارت است از:

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

$$x(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B = -\frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\sin \omega_n t + \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

از این معادله برای حل دو معادله دیفرانسیل بالا استفاده می‌کنیم و در نتیجه:

$$y_1(t) = -\frac{17.65}{200 - 65^2}\left(\frac{65}{14.14}\right)\sin 14.14t + \frac{17.65}{200 - 65^2}\sin 65t$$

$$= 0.02015 \sin 14.14t - 0.00438 \sin 65t$$

به همین ترتیب:

$$y_2(t) = -0.01086 \sin 36.52t + 0.006103 \sin 65t$$

پاسخ به صورت است از:

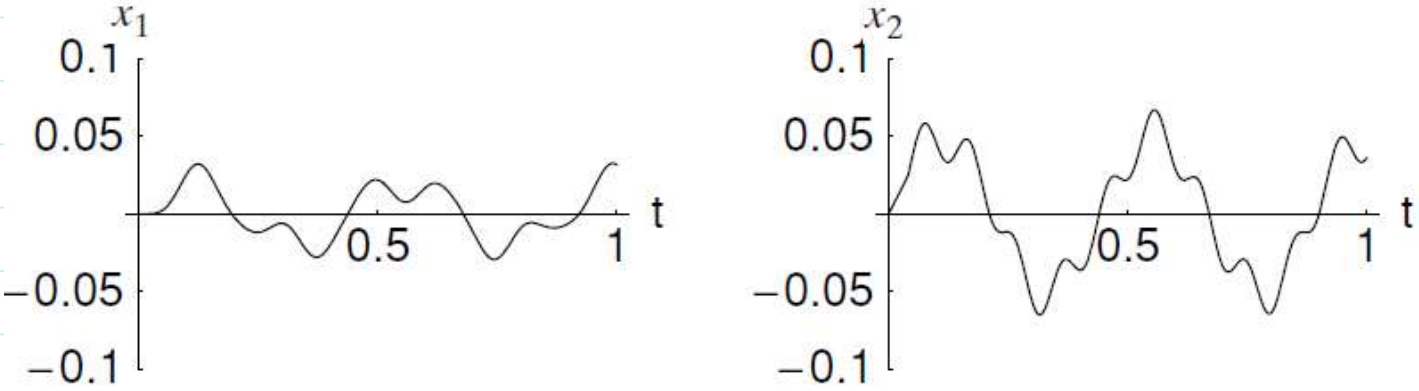
$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\Phi}}\,\underline{y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2.5 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 + y_2 \\ 2.5 y_1 - \frac{y_2}{3} \end{Bmatrix}$$

در نتیجه:

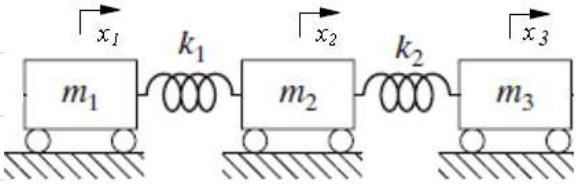
$$x_1(t) = 0.02015 \sin 14.14t - 0.01086 \sin 36.52t + 0.00172 \sin 65t$$

$$x_2(t) = 0.05038 \sin 14.14t + 0.003621 \sin 36.52t - 0.01299 \sin 65t$$

نمودار پاسخ x_1 و x_2 در شکل زیر نشان داده شده است.



مثال: سیستم سه درجه آزادی زیر شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت شرایط اولیه صفر قرار دارد.



در صورتیکه جرم m_2 تحت نیروی هارمونیک $15\sin 15t$ قرار گیرد، پاسخ را بیابید.

$m_1=50\ kg,\ m_2=100\ kg,\ m_3=150\ kg$

$k_1=1000\ N/m,\ k_2=500\ N/m$

معادله دیفرانسیل حرکت عبارت است از:

$$\underline{\underline{m}}\,\ddot{\underline{x}}+\underline{\underline{k}}\,\underline{x}=\underline{f}$$

که در آن:

$$\underline{\underline{m}}=\begin{pmatrix}50&0&0\\0&100&0\\0&0&150\end{pmatrix},\ \underline{\underline{k}}=\begin{pmatrix}1000&-1000&0\\-1000&1500&-500\\0&-500&500\end{pmatrix},\ \underline{f}=\begin{Bmatrix}0\\15\sin 15t\\0\end{Bmatrix}$$

ابتدا فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم محاسبه می‌گردد. از $\det(\underline{\underline{k}}-\lambda\underline{\underline{m}})=0$ خواهیم داشت:

i	λ_i	ω_i
1	0	0
2	6.2298	2.496
3	32.1035	5.666

$$\underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix},\ \underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}1\\0.6885\\-0.7923\end{Bmatrix},\ \underline{\phi}_3=\begin{Bmatrix}1\\-0.6051\\0.0701\end{Bmatrix}$$

همانطور که انتظار داشتیم یک فرکانس طبیعی صفر و شکل مود جسم صلب داریم.

به علاوه در مود دوم یک گره بین جرم دوم و سوم و در مود سوم دو گره بین جرم اول و دوم و جرم دوم و سوم خواهیم داشت:

ماتریس مودال عبارت است از کنار هم قرار دادن شکل مودها:

$$\underline{\underline{\Phi}}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0.6885&-0.6051\\1&-0.7923&0.0701\end{pmatrix}$$

معمولاً بعضی از این ماتریس را به صورت نرمال شده به کار می‌برند.

برای این کار ماتریس Φ را به دو طریق نرمال می‌کنند.

الف - چون مقادیر شکل بردار، بقدری بطلق نسبتند و بی‌هستند، بنابراین با تقسیم شکل بردار بر یک مقدار خاص، تغیری در آن ایجاد نمی‌کند. بنابراین برای آنکه اعداد کوچک و بزرگ ماتریس در یک شکل بردار وجود نداشته باشند، همه اعضای شکل بردار را بر اندازه بزرگترین شکل بردار تقسیم می‌کنند. برای محاسبه اندازه بردار شکل بردار کافیست اندازه هر عضو آن را به توان دو رسانده و با هم جمع کرده و سپس جذر آن را گرفت.

ب - همچنین می‌توان اعضای شکل بردار را بر جذر جرم بردار تقسیم کرد. اگر چنین کاری صورت پذیرد:

$$\underline{\phi}_i = \frac{\hat{\underline{\phi}}_i}{\sqrt{m_i}} \Rightarrow \underline{\phi}_i^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_i = \frac{\hat{\underline{\phi}}_i^T}{\sqrt{m_i}} \underline{\underline{m}} \frac{\hat{\underline{\phi}}_i}{\sqrt{m_i}} = \frac{m_i}{m_i} = 1$$

در این حالت $\hat{\underline{\phi}}_i$ بردار شکل بردم قبل از نرمال کردن است. در اینصورت دیده می‌شود که

$$\underline{\phi}^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi} = \underline{\underline{I}}$$

همچنین

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_i = \frac{\hat{\underline{\phi}}_i^T}{\sqrt{m_i}} \underline{\underline{k}} \frac{\hat{\underline{\phi}}_i}{\sqrt{m_i}} = \frac{1}{m_i} \hat{\underline{\phi}}_i^T \underline{\underline{k}}\, \hat{\underline{\phi}}_i = \frac{k_i}{m_i} = \omega_i^2 = \lambda_i$$

و یا:

$$\underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\underline{\phi}} = \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

اگر هر دو این عملیات را انجام دهیم، ماتریس شکل بردار نسخه حاضر بصورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\underline{\underline{\phi}} = \begin{pmatrix} 0.0577 & 0.0722 & 0.1070 \\ 0.0577 & 0.0497 & -0.0647 \\ 0.0577 & -0.0572 & 0.0075 \end{pmatrix}$$

این ماتریس تمام خواص ماتریس قبل را داشته و از نظر عددی بهتر است.

از ضرب $\Phi^T f$ نیروی عمودال به دست می‌آید:

$$\Phi^T f = \begin{Bmatrix} 0.866 \\ -0.746 \\ -0.971 \end{Bmatrix} \sin 15t$$

شرایط اولیه نیز صفر می‌شوند زیرا شرایط اولیه سیستم صفر است.

بنابراین معادلات بصورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 = 0.866 \sin 15t \\ \ddot{y}_2 + 6.2298 y_2 = -0.746 \sin 15t \\ \ddot{y}_3 + 32.1035 y_3 = -0.971 \sin 15t \end{cases}$$

از معادله اول دیده می‌شود که جواب خصوصی آن نیز در بار انتگرال گیری به دست می‌آید:

$$\ddot{y}_1 = 0 \Rightarrow y_1 = A_1 + A_2 t$$

قبلاً این جواب را از خواص فیزیکی با کمک دینامیک جسم آزاد نیز در همه سیستم به دست آوردیم. در اینجا نیز می‌بینید که از نظر ریاضی در مورد جسم صلب پایه نیز می‌توان به جابجایی بصورت ثابت و یا ترکیبی از آنها پاسخ گرد.

برای به دست آوردن پاسخ خصوصی: اگر سیستم یک درجه آزادی بصورت زیر باشد:

$$\ddot{x} = F_0 \sin \omega t \Rightarrow x(t) = A_1 + A_2 t + \frac{F_0}{0 \cdot \omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

که $\omega_n = 0$ می‌باشد. با اعمال شرایط اولیه

$$x(0) = 0 \Rightarrow A_1 + A_2(0) + \frac{F_0}{\omega^2} \sin 0 = 0 \Rightarrow A_1 = 0$$

$$\dot{x}(t) = A_2 + \frac{F_0}{\omega^2} \omega \cos \omega t$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow A_2 + \frac{F_0}{\omega} \cos 0 = 0 \Rightarrow A_2 = -\frac{F_0}{\omega}$$

بنابراین:

$$x(t) = -\frac{F_0}{\omega} t + \frac{F_0}{-\omega^2} \sin \omega t$$

از قرار دارک سوم y_1 :

$$y_1(t) = 0.0577t - 0.00385 \sin 15t$$

سوم بهت آوردن جواب y_2 و y_3 به طور مشابه عمل کرده ر :

$$y_2(t) = 0.0205 \sin 2.496t + 0.00341 \sin 15t$$

$$y_3(t) = -0.0133 \sin 5.666t + 0.00503 \sin 15t$$

جواب x از ضرب Φ در y بهت می آید که در شکل های زیر شان داده شده اند :