ارتعاشات اجباری سیستم‌های چند درجه آزادی — Forced Vibration of MDOF Sys.

در این قسمت به دنبال یافتن پاسخ سیستم‌های چند درجه آزادی به تحریک خارجی هستیم

برای این کار از روش تحلیل مودال (Modal Analysis) استفاده خواهیم کرد.

ابتدا مسئله ارتعاشات آزاد زیر را در نظر بگیرید:

$$\underline{\underline{m}}\,\ddot{\underline{x}}+\underline{\underline{k}}\,\underline{x}=0$$

از قرار دادن پاسخ $\underline{x}(t)=\underline{\phi}e^{i\omega t}$ که در آن $\underline{\phi}$ شکل مود سیستم است در آن

$$-\underline{\underline{m}}\,\omega^2\underline{\phi}\,e^{i\omega t}+\underline{\underline{k}}\,\underline{\phi}\,e^{i\omega t}=0 \quad , \quad \omega^2=\lambda$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{k}}\,\underline{\phi}=\lambda\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\phi} \qquad (1)$$

این رابطه برای همه مودها صادق است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\underline{\underline{k}}\,\underline{\phi}_r=\lambda_r\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_r \qquad r=1,2,\dots,n \qquad (2)$$

در این رابطه $\underline{\underline{k}}$ ماتریس سختی سیستم، و $\underline{\underline{m}}$ ماتریس جرم سیستم است. λ_r مجذور فرکانس طبیعی rام و $\underline{\phi}_r$ شکل مود rام سیستم است.

ماتریس‌های $\underline{\underline{k}}$ و $\underline{\underline{m}}$ ماتریس‌های متقارن هستند.

در صورتیکه دو مود متفاوت i و j، $\underline{\phi}_i$ و $\underline{\phi}_j$ که فرکانس‌های طبیعی آنها ω_i و ω_j است باشند:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{k}}\,\underline{\phi}_i&=\lambda_i\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_i\\ \underline{\underline{k}}\,\underline{\phi}_j&=\lambda_j\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_j\end{aligned} \qquad (3)$$

در صورتیکه معادله اول را در $\underline{\phi}_j^T$ و معادله دوم را $\underline{\phi}_i^T$ ضرب کنیم:

$$\begin{aligned}\underline{\phi}_j^T\,\underline{\underline{k}}\,\underline{\phi}_i&=\lambda_i\,\underline{\phi}_j^T\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_i\\ \underline{\phi}_i^T\,\underline{\underline{k}}\,\underline{\phi}_j&=\lambda_j\,\underline{\phi}_i^T\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_j\end{aligned} \qquad (4)$$

T علامت ترانسپوز (ترانهاده) ماتریس است

اگر ترانسپوز رابطه دوم (4) را در نظر بگیریم:

$$(\underline{\phi}_i^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_j)^T = \lambda_j (\underline{\phi}_i^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_j)^T \Rightarrow \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_i = \lambda_j \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_i \qquad (5)$$

در این رابطه به علت تقارن، ترانسپوز ماتریس‌های $\underline{\underline{k}}$ و $\underline{\underline{m}}$، خود آنها یکی است.

از مقایسه رابطه اول (4) و (5) دیده می‌شود که سمت چپ آنها یکی است. بنابراین از کم کردن (5) از رابطه اول (4) خواهیم داشت:

$$(\lambda_i - \lambda_j)\, \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_i = 0 \qquad (6)$$

اما گفتیم که λ_i و λ_j با هم متفاوت هستند، بنابراین:

$$\underline{\phi}_j^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_i = 0 \qquad (7)$$

در این صورت هر دو شکل مود متفاوت نسبت به ماتریس جرم بر هم عمود هستند

Mass Orthogonality (Orthogonal)

این عمود بودن را می‌توان با عمود بودن دو بردار $\underline{a}$ و $\underline{b}$ مقایسه کرد.

دو بردار $\underline{a}$ و $\underline{b}$ بر هم عمودند در صورتیکه ضرب داخلی آنها صفر گردد:

$$\underline{a}^T . \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{a}^T \underline{\underline{I}}\, \underline{b} = 0$$

که $\underline{\underline{I}}$ همان ماتریس واحد است. دیده می‌شود که دو بردار $\underline{a}$ و $\underline{b}$ نسبت به ماتریس واحد بر هم عمودند. در بالا دو شکل مود نسبت به ماتریس جرم بر هم عمودند.

رابطه اول (4) و رابطه (5) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{1}{\lambda_i} \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_i = \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_i$$
$$\frac{1}{\lambda_i} \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_i = \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_i \qquad (8)$$

سمت راست این دو رابطه یکی است، در نتیجه از کم کردن آنها از یکدیگر:

$$\left(\frac{1}{\lambda_i}-\frac{1}{\lambda_j}\right)\underline{\phi}_j^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\phi}_j^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_i = 0 \qquad (9)$$

این رابطه شرط تعامد مودها نسبت به سختی (Stiffness Orthogonality) معروف است و بیان می‌دارد که هر دو شکل مود متفاوت نسبت به ماتریس سختی نیز بر هم عمودند.

اما در روابط (7) و (9) اگر $i=j$ باشد دیگر حاصل ضرب شکل مود نسبت به ماتریس‌های جرم و سختی صفر نمی‌گردد. برای یک شکل مود خواهیم داشت:

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_i = m_i \qquad (10)$$

که m_i به نام جرم مودال (Modal mass) نامیده می‌شود.

همچنین:

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_i = k_i \qquad (11)$$

که k_i به نام سختی مودال (Modal Stiffness) معروف است.

ارتباط این دو پارامتر را از رابطه (2) می‌توان یافت. اگر یکی از مودهای رابطه (2) را در $\underline{\phi}_i^T$ ضرب کنیم:

$$\underline{\phi}_i^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\phi}_i = \omega_i^2\, \underline{\phi}_i^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_i$$

و یا

$$k_i = \omega_i^2 m_i \Rightarrow \omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \qquad (12)$$

حال با روابط تعامد مودها که برای شکل مودهای سیستم نسبت به ماتریس‌های جرم و سختی به دست آوردیم، به سراغ حل دستگاه معادلات دیفرانسیل ارتعاشات اجباری یک سیستم چند درجه آزادی می‌رویم. این معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\underline{\underline{m}}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{k}}\,\underline{x} = \underline{f}(t) \qquad (13)$$

$$\underline{x}(0)=\underline{x}_0 \ , \ \dot{\underline{x}}(0)=\dot{\underline{x}}_0$$

در حالت عادی به علت کوپله بودن معادلات دیفرانسیل فوق، حل آنها بسیار مشکل می‌باشد. امّا روش ساده‌تری نیز وجود دارد و آن استفاده از روش تحلیل مودال است.

همانطور که در پاسخ ارتعاشات آزاد دیده شد، پاسخ ترکیبی خطی از شکل مودها بود. در اینجا هم پاسخ سیستم فوق را بصورت ترکیبی از شکل مودها در نظر می‌گیریم:

$$\underline{x}(t) = y_1(t)\,\underline{\phi}_1 + y_2(t)\,\underline{\phi}_2 + \cdots + y_n(t)\,\underline{\phi}_n$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 & \cdots & \underline{\phi}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{Bmatrix} = \underline{\underline{\phi}}\,\underline{y}(t)$$

ماتریس $\underline{\underline{\phi}}$ که از کنار هم قرار دادن شکل مودها بدست می‌آید بنام ماتریس مودال (Modal matrix) معروف است، در صورتیکه $\underline{y}$ بدست آید پاسخ سیستم معلوم شده است. بنابراین از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$\underline{x}(t) = \underline{\underline{\phi}}\,\underline{y}(t) \qquad (14)$$

از قرار دادن (14) در رابطه (13):

$$\underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{\phi}}\,\ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{\phi}}\,\underline{y} = \underline{f}(t)$$

از ضرب دو طرف در $\underline{\underline{\phi}}^T$:

$$\underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{\phi}}\,\ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{k}}\,\underline{\underline{\phi}}\,\underline{y} = \underline{\underline{\phi}}^T \underline{f} = \underline{F}(t) \qquad (15)$$

در این رابطه $\underline{F}(t)$ بنام نیروی مودال نامیده می‌شود. جمله اول این رابطه:

$$\underline{\underline{\phi}}^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\underline{\phi}} = \begin{Bmatrix} \underline{\phi}_1^T \\ \underline{\phi}_2^T \\ \vdots \\ \underline{\phi}_n^T \end{Bmatrix} \underline{\underline{m}} \begin{bmatrix} \underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2 & \cdots & \underline{\phi}_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_1^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_2 & \cdots & \underline{\phi}_1^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_n \\ \underline{\phi}_2^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_2^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_2 & \cdots & \underline{\phi}_2^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \underline{\phi}_n^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_1 & \underline{\phi}_n^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_2 & \cdots & \underline{\phi}_n^T \underline{\underline{m}}\,\underline{\phi}_n \end{pmatrix}$$

در این رابطه تمام جملاتی که روی قطر اصلی ماتریس نیستند صفر می‌شوند. بنابراین

$$\underline{\phi}^T \underline{m}\, \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{m}\, \underline{\phi}_1 & & 0 \\ & \underline{\phi}_2^T \underline{m}\, \underline{\phi}_2 & \\ 0 & & \ddots \; \underline{\phi}_n^T \underline{m}\, \underline{\phi}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & \ddots \; m_n \end{pmatrix}$$

که m_i ها جرم‌های مودال هستند.

به همین ترتیب:

$$\underline{\phi}^T \underline{k}\, \underline{\phi} = \begin{pmatrix} \underline{\phi}_1^T \underline{k}\, \underline{\phi}_1 & & 0 \\ & \underline{\phi}_2^T \underline{k}\, \underline{\phi}_2 & \\ 0 & & \ddots \; \underline{\phi}_n^T \underline{k}\, \underline{\phi}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & k_2 & \\ 0 & & \ddots \; k_n \end{pmatrix}$$

در نتیجه معادله (15) بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{pmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & \ddots \; m_n \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 & & 0 \\ & k_2 & \\ 0 & & \ddots \; k_n \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

که در حقیقت نشان دهنده یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه دو غیر کوپله است که در هر معادله فقط یک متغیر y_i ظاهر می‌شود. یعنی:

$$m_i \ddot{y}_i + k_i y_i = F_i \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

و یا:

$$\ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = \frac{1}{m_i} F_i \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad (16)$$

دیده می‌شود که مسئله تبدیل به n معادله دیفرانسیل مرتبه دو تکدرجه آزادی شده است که هر کدام را براحتی می‌توان با روش‌هایی که در ابتدای ترم برای ارتعاشات اجباری سیستم‌های یکدرجه گفته شد حل نمود. پس از حل و بدست آوردن $\underline{y}$ آن را در $\underline{\phi}$ پیش‌ضرب کرده و $\underline{x}$ را می‌توان بدست آورد.

تنها نکته باقیمانده آن است که برای حل معادلات (16) نیاز به شرایط اولیه y است، ولی در مسئله شرایط اولیه x داده شده است. برای بدست آوردن $y(0)$ و $\dot{y}(0)$ از روی $x(0)$ و $\dot{x}(0)$ دو روش را می‌توان بکار بست:

الف - برای سیستم‌هایی که درجه آزادی کوچک است، می‌توان نوشت:

$$x(0) = \Phi\, y(0) \Rightarrow y(0) = \Phi^{-1} x(0) = \Phi^{-1} x_0$$

و به همین ترتیب:

$$\dot{x}(0) = \Phi\, \dot{y}(0) \Rightarrow \dot{y}(0) = \Phi^{-1} \dot{x}(0) = \Phi^{-1} \dot{x}_0$$

روش بالا به گرفتن معکوس ماتریس مودال منجر می‌شود که از نظر عددی محاسبات زیادی دارد و تقریبا هنگامی که n کوچک است به صرفه است.

ب- در روش دیگر می‌توان نوشت.

$$x(0) = x_0 = \Phi\, y(0) = \phi_1 y_1(0) + \phi_2 y_2(0) + \dots + \phi_n y_n(0)$$

از ضرب دو طرف رابطه در $\phi_i^T m$ و استفاده از رابطه عمود بودن نسبت به ماتریس جرم:

$$\phi_i^T m\, x_0 = y_1(0)\, \phi_i^T m\, \phi_1 + y_2(0)\, \phi_i^T m\, \phi_2 + \dots + y_n(0)\, \phi_i^T m\, \phi_n$$

همه جملات سمت راست صفر هستند الا جمله‌ای که اندیس ϕ در آن برابر i است:

$$\phi_i^T m\, x_0 = y_i(0)\, \underbrace{\phi_i^T m\, \phi_i}_{m_i} \Rightarrow y_i(0) = \frac{\phi_i^T m\, x_0}{\phi_i^T m\, \phi_i} = \frac{1}{m_i}\, \phi_i^T m\, x_0$$

به همین ترتیب:

$$\dot{y}_i(0) = \frac{1}{m_i}\, \phi_i^T m\, \dot{x}_0$$

با داشتن شرایط اولیه می‌توان پاسخ هر سیستم یک درجه را بدست آورد.