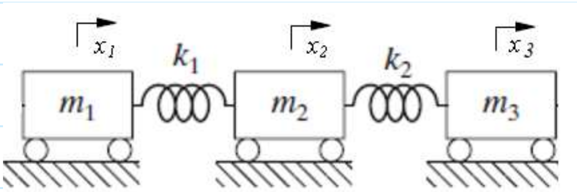
ارتعاش آزاد سیستم‌های غیرمقید   Free Vib. of Unrestrained Systems

در بسیاری از سیستم‌های مکانیکی حرکت جسم با استفاده از تکیه‌گاه محدود شده است. مثلاً یک تیر یا توربین را در نظر بگیرید. تکیه‌گاه‌ها به زمین متصل شده و اجازه حرکت ندارند، ولی روتورها اجازه درجه آزادی حرکت دورانی را دارند، و یا حرکت لوکوموتیو که واگن‌ها را به دنبال خود می‌کشد در نظر بگیرید. در اینجا سیستم ما آزادی حرکت را داشته و از اطراف محدود نمی‌باشد. چنین سیستم‌هایی را سیستم‌های غیرمقید گویند. سیستم سه درجه آزاد زیر را در نظر بگیرید:



مقادیر:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 100\ \text{kg}$$

$$k_1 = k_2 = 1\ \text{N/m}$$

از نوشتن معادلات دیفرانسیل حرکت:

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها:

$$\text{Det}(\underline{k} - \lambda \underline{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-100\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-100\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-100\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-100\lambda)\big((2-100\lambda)(1-100\lambda)-1\big) + (1)(100\lambda-1) = 0$$

$$\Rightarrow -1\times10^6\lambda^3 + 4\times10^4\lambda^2 - 300\lambda = 0 \Rightarrow -100\lambda(100\lambda-1)(100\lambda-3) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0 \ ,\ \lambda_2 = \frac{1}{100} \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{10} \ ,\ \lambda_3 = \frac{3}{100} \Rightarrow \omega_3 = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

دیده می‌شود که فرکانس طبیعی اول (کوچکترین فرکانس) صفر به دست آمد. این در حقیقت نشان دهنده آن است که در مود اول ارتعاش نداریم.

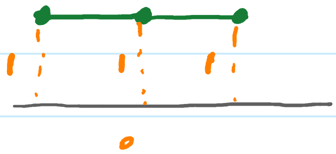
در ادامه از قرار دادن فرکانس‌ها در دستگاه معادلات حرکتی، شکل مودها محاسبه می‌گردد.

$$\begin{cases}(1-100\lambda)x_1 - x_2 = 0\\ -x_1 + (2-100\lambda)x_2 - x_3 = 0\\ -x_2 + (1-100\lambda)x_3 = 0\end{cases}$$

از قرار دادن $\lambda=\lambda_1=0$:

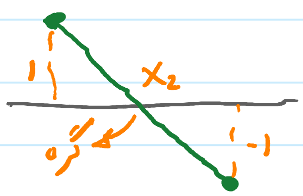
$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 & \Rightarrow x_1 = x_2\\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 & \Rightarrow x_2 = x_3\end{cases} \Rightarrow \underline{X}_1 = \begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1\\ x_1\\ x_1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$$

دیده می‌شود که در شکل مود اول، هر سه جرم به یک اندازه حرکت می‌کنند و فنرها به جای اینکه عمل کرده، کشیده و یا فشرده نمی‌شوند. این شکل مود به شبیه به حرکت جسم صلب است (در حرکت جسم صلب همه نقاط به یک اندازه جابجا می‌شوند). نام شکل مود جسم صلب (Rigid body mode) و یا شکل مود جسم آزاد (Free body mode) معروف است.



در صورتی که $\lambda=\lambda_2=\frac{1}{100}$ قرار داده شود:

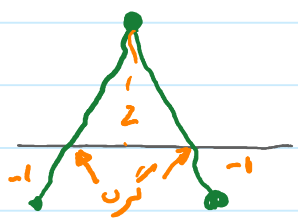
$$\begin{cases}(1-\cancel{100}(\cancel{\tfrac{1}{100}}))x_1 - x_2 = 0 & \Rightarrow x_2 = 0\\ -x_1 + (2-\cancel{100}(\cancel{\tfrac{1}{100}}))x_2 - x_3 = 0 & \Rightarrow x_3 = -x_1\\ -2 + (1-\cancel{100}(\cancel{\tfrac{1}{100}}))x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \underline{X}_2 = \begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1\\ 0\\ -x_1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{Bmatrix}$$



دیده می‌شود که در شکل مود دوم در محل جرم دوم یک گره وجود می‌باشد.

در صورتی که $\lambda=\lambda_3=\frac{3}{100}$

$$\begin{cases}(1-100(\tfrac{3}{100}))x_1 - x_2 = 0 & \Rightarrow -2x_1 - x_2 = 0\\ -x_1 + (2-100(\tfrac{3}{100}))x_2 - x_3 = 0\\ -x_2 + (1-100(\tfrac{3}{100}))x_3 = 0 & \Rightarrow -x_2 - 2x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2/2\\ x_3 = -x_2/2\end{cases}$$



$$\Rightarrow \underline{X}_3 = \begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -x_2/2\\ x_2\\ -x_2/2\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_3 = \begin{Bmatrix} -1/2\\ 1\\ -1/2\end{Bmatrix} \text{ یا } \underline{X}_3 = \begin{Bmatrix} -1\\ 2\\ -1\end{Bmatrix}$$

دیده می‌شود که دو گره داریم.

پاسخ سیستم عبارت است از :

$$\underline{x}(t) = (A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \sin\omega_1 t)\underline{X}_1 + (A_3 \cos\omega_2 t + A_4 \sin\omega_2 t)\underline{X}_2 + (A_5 \cos\omega_3 t + A_6 \sin\omega_3 t)\underline{X}_3$$

اما $\omega_1 = 0$ است و بنابراین سینوس آن حذف می‌گردد.

$$\underline{x}(t) = A_1 \underline{X}_1 + (A_3 \cos\omega_2 t + A_4 \sin\omega_2 t)\underline{X}_2 + (A_5 \cos\omega_3 t + A_6 \sin\omega_3 t)\underline{X}_3$$

شرایط اولیه عبارتند از: سه جابجایی اولیه و سه سرعت اولیه و بنابراین شش شرط اولیه.

اما در اینجا پنج ضریب مجهول است و شش شرط اولیه. بنابراین در حالت کلی این مسئله جواب ندارد! اما می‌دانیم که مسئله دارای جواب است. مشکل از شیوه بیان حرکت سیستم در مود جسم صلب است. از بالا دیده می‌شود که در مود اول جسم فقط می‌تواند جابجا شود و سرعتی ندارد.

اما اگر دیاگرام جسم آزاد را به دور سیستم بکشیم، در جهت افقی نیروی آن را قطع نکرده و بنابراین بقای مومنتم خطی را خواهیم داشت. این بدان معنی است که:

$$\sum m_i \dot{x}_i = m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2 + m_3 \dot{x}_3 = A_2 \quad \text{ثابت}$$

با انتگرال گیری:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = A_2 t + A_1$$

یعنی در مود اول سیستم می‌تواند جابجا شده و سرعت ثابت هم داشته باشد، بنابراین در سیستم‌های با مود جسم صلب پاسخ به صورت زیر خواهد بود:

$$\underline{x}(t) = (A_1 + A_2 t)\underline{X}_1 + (A_3 \cos\omega_2 t + A_4 \sin\omega_2 t)\underline{X}_2 + (A_5 \cos\omega_3 t + A_6 \sin\omega_3 t)\underline{X}_3$$

شش مجهول A_1 تا A_6 از شش شرط اولیه بدست می‌آید.

به عنوان مثال در صدد تعیین شرایط اولیه برآییم :

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0 \quad , \quad \dot{x}_1(0) = 1 \quad , \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_3(0) = 0$$

با استفاده از فرکانس های طبیعی و شکل مودهای بدست آمده، پاسخ عبارت است از :

$$x_1(t) = A_1 + t A_2 + \cos\left(\frac{t}{10}\right) A_3 + \sin\left(\frac{t}{10}\right) A_4 + \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_5 + \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_6$$

$$x_2(t) = A_1 + t A_2 - 2\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_5 + \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_6\right)$$

$$x_3(t) = A_1 + t A_2 - \cos\left(\frac{t}{10}\right) A_3 - \sin\left(\frac{t}{10}\right) A_4 + \cos\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_5 + \sin\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_6$$

با مشتق گرفتن سرعت ها را بدست آوریم :

$$\dot{x}_1(t) = A_2 - \frac{1}{10}\sin\left(\frac{t}{10}\right) A_3 + \frac{1}{10}\cos\left(\frac{t}{10}\right) A_4 - \frac{1}{10}\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_5 + \frac{1}{10}\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_6$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 - 2\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_6 - \frac{1}{10}\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_5\right)$$

$$\dot{x}_3(t) = A_2 + \frac{1}{10}\sin\left(\frac{t}{10}\right) A_3 - \frac{1}{10}\cos\left(\frac{t}{10}\right) A_4 - \frac{1}{10}\sqrt{3}\sin\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_5 + \frac{1}{10}\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\, t}{10}\right) A_6$$

از قرار دادن شرایط اولیه

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= 0 = A_1 + A_3 + A_5 \\
x_2(0) &= 0 = A_1 - 2A_5 \\
x_3(0) &= 0 = A_1 - A_3 + A_5 \\
\dot{x}_1(0) &= 1 = A_2 + \frac{A_4}{10} + \frac{\sqrt{3}\, A_6}{10} \\
\dot{x}_2(0) &= 0 = A_2 - \frac{\sqrt{3}\, A_6}{5} \\
\dot{x}_3(0) &= 0 = A_2 - \frac{A_4}{10} + \frac{\sqrt{3}\, A_6}{10}
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
A_1 &\to 0 \\
A_3 &\to 0 \\
A_5 &\to 0 \\
A_2 &\to \frac{1}{3} \\
A_4 &\to 5 \\
A_6 &\to \frac{5}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

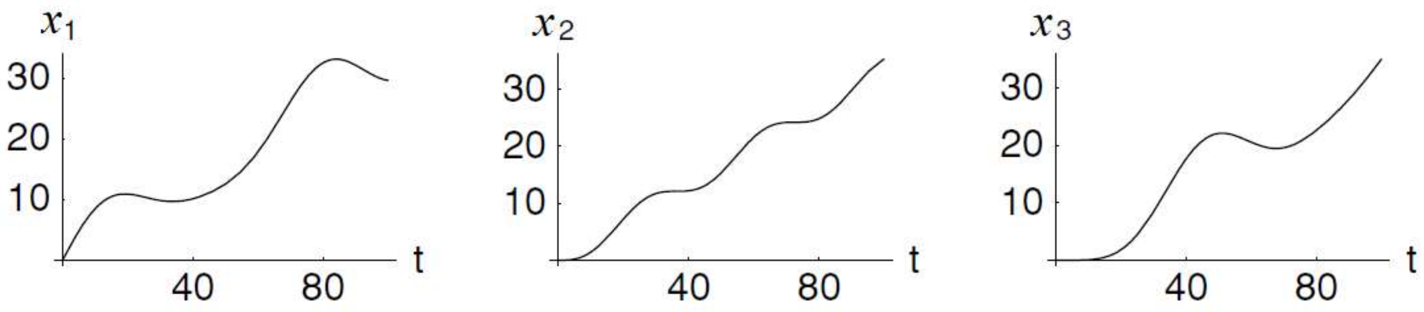
پاسخ سیستم عبارت است از :

$$x_1(t) = \frac{t}{3} + 5\sin\left(\frac{t}{10}\right) + \frac{5\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{10}\right)}{3\sqrt{3}}$$

$$x_2(t) = \frac{t}{3} - \frac{10\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{10}\right)}{3\sqrt{3}}$$

$$x_3(t) = \frac{t}{3} - 5\sin\left(\frac{t}{10}\right) + \frac{5\sin\left(\frac{\sqrt{3}\,t}{10}\right)}{3\sqrt{3}}$$

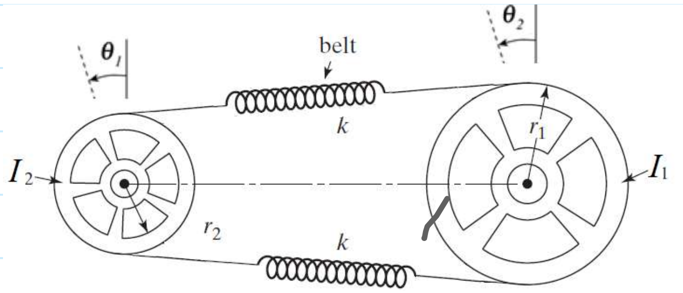
منحنی پاسخ های زمانی سیستم عبارتند از :



از منحنی های بالا دیده می‌شود که پاسخ ها هارمونیک نیست و زیاد پیچیده است. در حقیقت با دادن سرعت اولیه به سیستم، شروع به حرکت کرده و آن را ادامه می‌دهد. درصورتی که جمله اول پاسخ‌ها یعنی $\frac{t}{3}$ از آنها حذف گردد، حرکت کاملاً نوسانی و هارمونیک است.

در ادامه شبیه‌سازی از سیستم‌های با قید ارائه می‌شود.

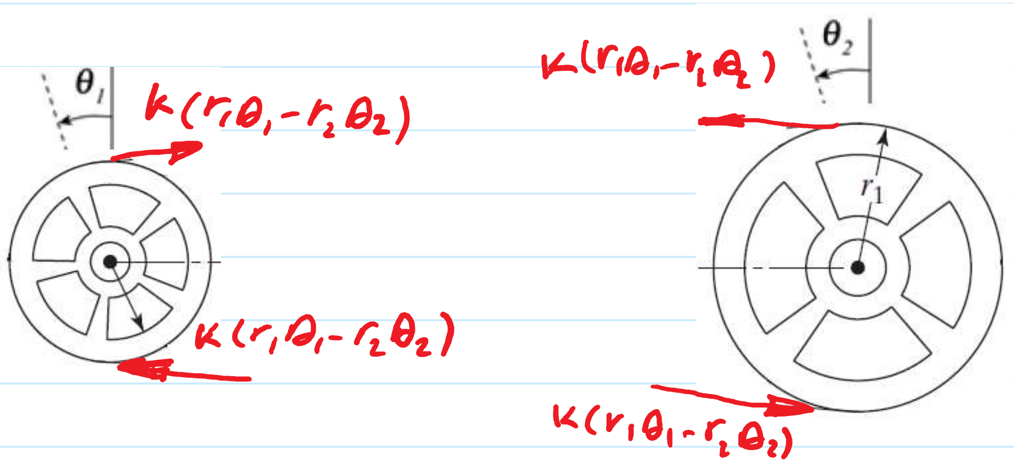
مثال: سیستم شکل مقابل یک سیستم قرقره را نشان می‌دهد. تسمه با فنرهایی با سختی k مدل شده است. مشخصات سیستم عبارت است از:



$r_1 = 125\ mm$, $I_1 = 0.08\ kg.m^2$, $K = 500\ N/m$

$r_2 = 250\ mm$, $I_2 = 1.6\ kg\,m^2$

سیستم پولی و تسمه را می‌توان با یک سیستم دو درجه آزادی بدون قید مدل کرد. برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مود سیستم، دیاگرام جسم آزاد هر قرقره را رسم کرده و قانون دوم نیوتن را به کار می‌بندیم:



فرض:

$r_1\theta_1 < r_2\theta_2$

$$\sum T_i = I_i \ddot{\theta}_i$$

$$\begin{cases} I_1\ddot{\theta}_1 = -k(r_1\theta_1 - r_2\theta_2)r_1 - k(r_1\theta_1 - r_2\theta_2)r_1 \\ I_2\ddot{\theta}_2 = k(r_1\theta_1 - r_2\theta_2)r_2 + k(r_1\theta_1 - r_2\theta_2)r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1\ddot{\theta}_1 + 2kr_1^2\theta_1 - 2kr_1r_2\theta_2 = 0 \\ I_2\ddot{\theta}_2 - 2kr_1r_2\theta_1 + 2kr_2^2\theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 2kr_1^2 & -2kr_1r_2 \\ -2kr_1r_2 & 2kr_2^2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$Det(\underline{K} - \lambda \underline{I}) = 0$$ برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم

$$\Rightarrow \begin{cases} (2kr_1^2 - \omega^2 I_1)\theta_{01} - 2kr_1r_2\theta_{02} = 0 \\ -2kr_1r_2\theta_{01} + (2kr_2^2 - \omega^2 I_2)\theta_{02} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2kr_1^2 - I_1\omega^2)(2kr_2^2 - I_2\omega^2) - (2kr_1r_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow I_1I_2(\omega^2)^2 - (2kr_1^2I_2 + 2kr_2^2I_1)\omega^2 = 0$$

$$\omega^2\left[\omega^2 - 2k\left(\frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2}\right)\right] = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_{n1} = 0 \\ \omega_{n2} = \sqrt{2k\left(\frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2}\right)} \end{cases}$$

از قرار دادن ω_{n1} در دستگاه معادلات بالا:

$$(\cancel{2}kr_1^{\cancel{2}} - 0)\theta_{01} - \cancel{2k}\cancel{r_1}r_2\theta_{02} = 0 \Rightarrow \theta_{02} = \frac{r_1}{r_2}\theta_{01}$$

$$\Rightarrow \underline{\theta}_{01} = \begin{Bmatrix} \theta_{01} \\ \theta_{02} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{01} \\ \frac{r_1}{r_2}\theta_{01} \end{Bmatrix} = \theta_{01}\begin{Bmatrix} 1 \\ r_1/r_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\theta}_{01} = \begin{Bmatrix} 1 \\ r_1/r_2 \end{Bmatrix}$$

از قرار دادن ω_{n2}:

$$\left(\cancel{2}kr_1^2 - I_1(\cancel{2}k)\left(\frac{r_1^2}{I_1} + \frac{r_2^2}{I_2}\right)\right)\theta_{01} - \cancel{2}kr_1r_2\theta_{02} = 0$$

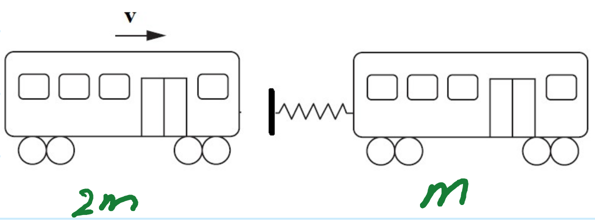
$$\Rightarrow \theta_{02} = -\frac{I_1}{I_2}\cdot\frac{r_2}{r_1}\theta_{01} \Rightarrow \underline{\theta}_{02} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{I_1}{I_2}\frac{r_2}{r_1} \end{Bmatrix}$$

از قرار دادن اعداد داده شده:

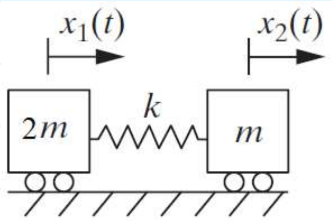
$$\omega_{n1} = 0 \quad , \quad \omega_{n2} = 15.31\ \text{rad/s}$$

$$\underline{\theta}_{01} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \quad , \quad \underline{\theta}_{02} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.1 \end{Bmatrix}$$

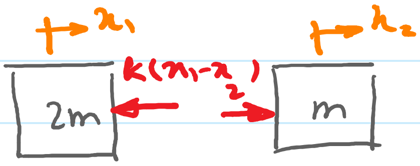
مثال: در شکل زیر سر ضربه‌گیری با فنری به سختی k به واگن متصل است. واگن دیگری با سرعت v به آن برخورد کرده و می‌چسبد. مطلوب است تعیین فرکانس‌های طبیعی، اشکال مودها و پایداری سیستم حاصل.



پس از برخورد دو واگن مدل سیستم را می‌توان به فرم زیر نوشت.



با رسم دیاگرام جسم آزاد معادلات دیفرانسیل حرکت عبارتند از:



$$\sum F_{x_i} = m_i \ddot{x}_i \Rightarrow \begin{cases} -k(x_1-x_2) = 2m\ddot{x}_1 \\ k(x_1-x_2) = m\ddot{x}_2 \end{cases}$$

فرم ماتریسی:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای بدست آوردن پایداری سیستم $\underline{x} = \underline{X} e^{j\omega t}$ از قرار دادن در معادلات: $(\omega^2 = \lambda)$

$$\begin{cases} (k - 2\lambda m)X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (k - \lambda m)X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow Det(\underline{k} - \lambda \underline{m}) = 0 \Rightarrow (k - 2\lambda m)(k - \lambda m) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2\lambda^2 - (km + 2km)\lambda + \cancel{k^2} - \cancel{k^2} = 0 \Rightarrow \lambda\left(2\lambda - \frac{3k}{m}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0 \quad , \quad \lambda = \lambda_2 = \frac{3k}{2m} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}$$

از قرار دادن $\lambda = \lambda_1$ در دستگاه معادلات بالا:

$$(k - 2m(0))X_1 - kX_2 = 0 \Rightarrow X_1 = X_2 \Rightarrow \underline{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

از قرار دادن $\lambda = \lambda_2$

$$\left(k - \cancel{2m}\left(\frac{3k}{\cancel{2m}}\right)\right)X_1 - kX_2 = 0 \Rightarrow X_2 = -2X_1 \Rightarrow \underline{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

پاسخ سیستم عبارت است از :

$$\underline{x}(t) = (A_1 + A_2 t)\underline{X}_1 + (A_3 \cos\omega_2 t + A_4 \sin\omega_2 t)\underline{X}_2$$

شرایط اولیه عبارتند از :

$$x_1(0) = x_2(0) = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = V \quad , \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

بنابراین :

$$x_1(t) = A_1 + A_2 t + A_3 \cos\omega_2 t + A_4 \sin\omega_2 t$$

$$x_2(t) = A_1 + A_2 t - 2A_3 \cos\omega_2 t - 2A_4 \sin\omega_2 t$$

و

$$\dot{x}_1(t) = A_2 - \omega_2 A_3 \sin\omega_2 t + \omega_2 A_4 \cos\omega_2 t$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 + 2\omega_2 A_3 \sin\omega_2 t - 2\omega_2 A_4 \cos\omega_2 t$$

از قرار دادن دو شرط اول :

$$\left.\begin{array}{l} x_1(0) = A_1 + A_3 = 0 \\ x_2(0) = A_1 - 2A_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A_1 = 0 \\ A_3 = 0 \end{array}$$

از قرار دادن دو شرط سرعت :

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1(0) = A_2 + \omega_2 A_4 = V \\ \dot{x}_2(0) = A_2 - 2\omega_2 A_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A_2 = \frac{2}{3}V \quad , \quad A_4 = \frac{V}{3\omega_2}$$

بنابراین پاسخ سیستم :

$$x_1(t) = \frac{2}{3}Vt + \frac{1}{3}\frac{V}{\omega_2}\sin\omega_2 t$$

$$x_2(t) = \frac{2}{3}Vt - \frac{2}{3}\frac{V}{\omega_2}\sin\omega_2 t$$