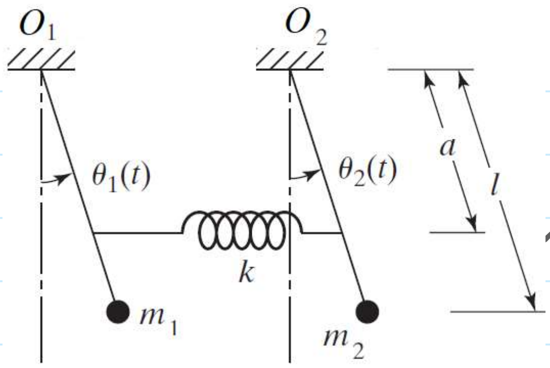
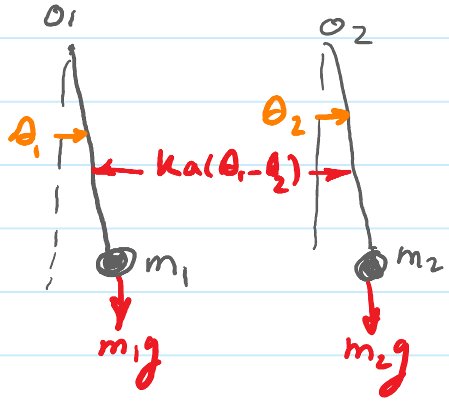


در ادامه درس جلسه قبلی، چند مثال حل می‌کنیم.

مثال: پاندول دوبل شکل مقابل را در نظر گرفته، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای آن را به دست آورید.

با رسم دیاگرام جسم آزاد، در یک لحظه دلخواه با θ_1 , θ_2 خواهیم داشت:



جابجایی نسبی دو سر فنر باعث اعمال نیرو به میله‌ها می‌شود.

با نوشتن قانون دوم نیوتن:

$$\sum M_{O_1} = I_{O_1}\ddot{\theta}_1 \Rightarrow -m_1 g \sin\theta_1 \, l_1 - ka(\theta_1-\theta_2)a = I_{O_1}\ddot{\theta}_1$$

$$\sum M_{O_2} = I_{O_2}\ddot{\theta}_2 \Rightarrow -m_2 g \sin\theta_1 \, l_2 + ka(\theta_1-\theta_2)a = I_{O_2}\ddot{\theta}_2$$

با در نظر گرفتن زاویه‌های کوچک و مرتب کردن معادلات بالا:

$$\begin{pmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 g l_1 + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & m_2 g l_2 + ka^2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با در نظر گرفتن $\theta_1 = \theta_{01} e^{j\omega t}$ و $\theta_2 = \theta_{02} e^{j\omega t}$ و قرار دادن در این معادلات:

$$\begin{cases} (m_1 g l_1 + ka^2 - m_1 l_1^2 \omega^2)\theta_{01} - ka^2 \theta_{02} = 0 \\ -ka^2 \theta_{01} + (m_2 g l_2 + ka^2 - m_2 l_2^2)\theta_{02} = 0 \end{cases}$$

در صورتی که $m_1 = m_2$ و $l_1 = l_2$ باشند:

$$\begin{cases} \left(g/l + \frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \omega^2\right)\theta_{01} - \frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \theta_{02} = 0 \\ -\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \theta_{01} + \left(g/l + \frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \omega^2\right)\theta_{02} = 0 \end{cases}$$

شرط وجود جواب غیر بدیهی صفر شدن دترمینان ضرایب می‌باشد.

$$\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2-\omega^2\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2-\omega^2\right)-\left[\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right]^2=0$$

$$\omega^4-2\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)\omega^2+\left(\left(\frac{g}{l}\right)^2+2\frac{g}{l}\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)=0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\omega_{n_1}=\sqrt{g/l}\\ \omega_{n_2}=\sqrt{g/l+2\frac{k}{m}\left(a/l\right)^2}\end{cases}$$

از جایگذاری ω_{n_1} در یکی معادلات حرکت و از آنجا که یکی از این دو معادله مستقل است.

$$\left[\cancel{\frac{g}{l}}+\cancel{\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2}-\cancel{\left(\frac{g}{l}\right)}\right]\theta_{01}-\cancel{\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2}\theta_{02}=0 \Longrightarrow \theta_{01}=\theta_{02}$$

$$\Rightarrow \underline{X}_1=\begin{Bmatrix}\theta_{01}\\ \theta_{02}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_{01}\\ \theta_{01}\end{Bmatrix}=\theta_{01}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$$

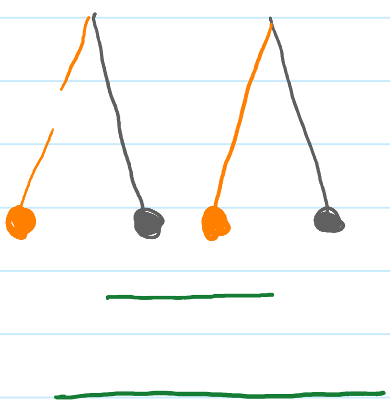
از جایگذاری ω_{n_2}:

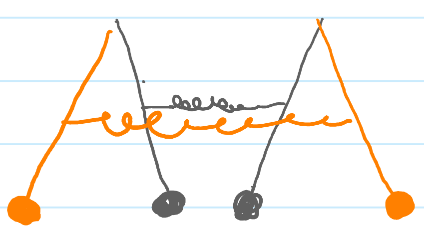
$$\left[\cancel{\frac{g}{l}}+\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2-\left(\cancel{\frac{g}{l}}+2\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)\right]\theta_{01}-\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\theta_{02}=0 \Longrightarrow \theta_{01}=-\theta_{02}$$

$$\Rightarrow \underline{X}_2=\begin{Bmatrix}\theta_{01}\\ \theta_{02}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_{01}\\ -\theta_{01}\end{Bmatrix}=\theta_{01}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$$

دیده می‌شود که در مود اول، هر دو میله با هم و به یک اندازه حرکت می‌کنند، بنابراین فنر k، نه کشیده می‌شود و نه فشرده و مانند آن است که وجود ندارد.

اما در مود دوم اگر یک میله به سمت چپ می‌رود، دیگری به سمت راست و برعکس و فنر مرتب کشیده و فشرده می‌شود.

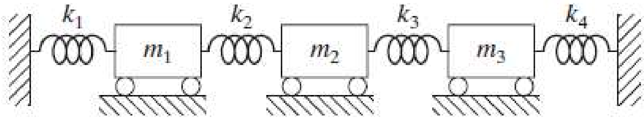




همه نقاط فنر کمی به بالا می‌روند

اگر یک طرف فنر در جهت مثبت جابجا شود سمت دیگر در جهت منفی

مثال: برای سیستم سه درجه آزادی شکل زیر با



$k_1=k_2=k_3=5$, $k_4=10$ N/m و $m_1=m_2=m_3=4$ kg :

مطلوبست تعیین فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و پاسخ

با شرایط اولیه:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \\ \dot{y}_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های جرم و سختی عبارتند از:

$$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 4. & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 10. & -5 & 0 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

و معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} 4. & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10. & -5 & 0 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

از قرار دادن $Det(\underline{k}-\lambda\underline{m})=0$ می‌توان فرکانس‌های طبیعی و مقادیر λ را به شرح زیر بدست آورد:

$$\lambda_1 = 0.941275; \qquad \lambda_2 = 3.0563; \qquad \lambda_3 = 4.75242$$

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 0.970194; \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.74823; \qquad \omega_3 = \sqrt{\lambda_3} = 2.18001$$

از قرار دادن λها در رابطه $(\underline{k}-\lambda\underline{m})\underline{Y}=0$ شکل مودها بدست می‌آیند:

$$Y^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.295505 \\ -0.368488 \\ -0.163993 \end{pmatrix}; \qquad Y^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.368488 \\ 0.163993 \\ 0.295505 \end{pmatrix}; \qquad Y^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.163993 \\ -0.295505 \\ 0.368488 \end{pmatrix}$$

پاسخ ترکیبی از این شکل مودها است:

$$y(t) = (A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \sin\omega_1 t)\,Y^{(1)} + (A_3 \cos\omega_2 t + A_4 \sin\omega_2 t)\,Y^{(2)} + (A_5 \cos\omega_3 t + A_6 \sin\omega_3 t)\,Y^{(3)}$$

پاسخ عبارت است از:

$$\begin{aligned} y_1(t) = {} & -0.295505\,(\cos(0.970194\,t)\,A_1 + \sin(0.970194\,t)\,A_2) - \\ & 0.368488\,(\cos(1.74823\,t)\,A_3 + \sin(1.74823\,t)\,A_4) + 0.163993\,(\cos(2.18001\,t)\,A_5 + \sin(2.18001\,t)\,A_6) \\ y_2(t) = {} & -0.368488\,(\cos(0.970194\,t)\,A_1 + \sin(0.970194\,t)\,A_2) + 0.163993\,(\cos(1.74823\,t)\,A_3 + \sin(1.74823\,t)\,A_4) - \\ & 0.295505\,(\cos(2.18001\,t)\,A_5 + \sin(2.18001\,t)\,A_6) \\ y_3(t) = {} & -0.163993\,(\cos(0.970194\,t)\,A_1 + \sin(0.970194\,t)\,A_2) + 0.295505\,(\cos(1.74823\,t)\,A_3 + \sin(1.74823\,t)\,A_4) + \\ & 0.368488\,(\cos(2.18001\,t)\,A_5 + \sin(2.18001\,t)\,A_6) \end{aligned}$$

همچنین سرعت از مشتق جابجایی ها بدست می آید :

$$\dot{y}_1(t) = -0.295505\,(0.970194\cos(0.970194\,t)\,A_2 - 0.970194\sin(0.970194\,t)\,A_1) -$$
$$0.368488\,(1.74823\cos(1.74823\,t)\,A_4 - 1.74823\sin(1.74823\,t)\,A_3) +$$
$$0.163993\,(2.18001\cos(2.18001\,t)\,A_6 - 2.18001\sin(2.18001\,t)\,A_5)$$

$$\dot{y}_2(t) = -0.368488\,(0.970194\cos(0.970194\,t)\,A_2 - 0.970194\sin(0.970194\,t)\,A_1) +$$
$$0.163993\,(1.74823\cos(1.74823\,t)\,A_4 - 1.74823\sin(1.74823\,t)\,A_3) -$$
$$0.295505\,(2.18001\cos(2.18001\,t)\,A_6 - 2.18001\sin(2.18001\,t)\,A_5)$$

$$\dot{y}_3(t) = -0.163993\,(0.970194\cos(0.970194\,t)\,A_2 - 0.970194\sin(0.970194\,t)\,A_1) +$$
$$0.295505\,(1.74823\cos(1.74823\,t)\,A_4 - 1.74823\sin(1.74823\,t)\,A_3) +$$
$$0.368488\,(2.18001\cos(2.18001\,t)\,A_6 - 2.18001\sin(2.18001\,t)\,A_5)$$

از قرار دادن شرایط اولیه در جابجایی ها و سرعت ها ضرایب A_1 تا A_6 بدست می آید :

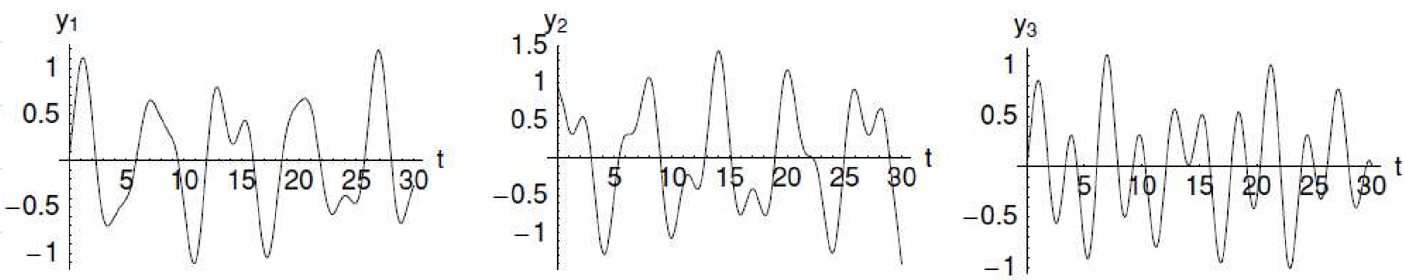
$$\begin{aligned}
y_1(0) &= 0 = -0.295505\,A_1 - 0.368488\,A_3 + 0.163993\,A_5\\
y_2(0) &= 1 = -0.368488\,A_1 + 0.163993\,A_3 - 0.295505\,A_5\\
y_3(0) &= 0 = -0.163993\,A_1 + 0.295505\,A_3 + 0.368488\,A_5\\
\dot{y}_1(0) &= 1 = -0.286697\,A_2 - 0.644201\,A_4 + 0.357505\,A_6\\
\dot{y}_2(0) &= 0 = -0.357505\,A_2 + 0.286697\,A_4 - 0.644201\,A_6\\
\dot{y}_3(0) &= 1 = -0.159105\,A_2 + 0.516609\,A_4 + 0.803306\,A_6
\end{aligned}
\quad\Rightarrow\quad
\begin{aligned}
A_1 &\to -1.47395\\
A_2 &\to -1.89446\\
A_3 &\to 0.655971\\
A_4 &\to -0.166989\\
A_5 &\to -1.18202\\
A_6 &\to 0.977027
\end{aligned}$$

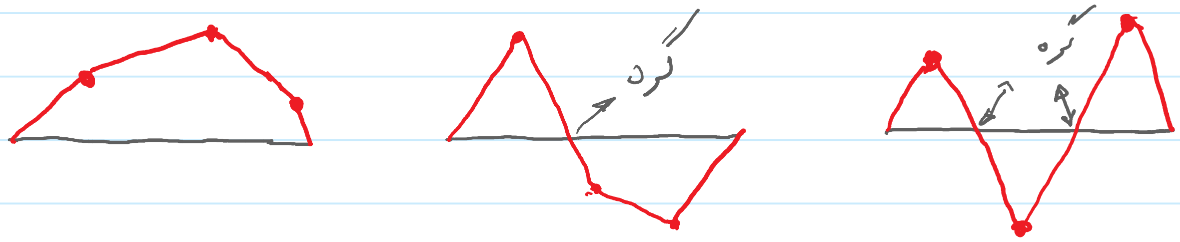
در نهایت پاسخ سیستم عبارت است از :

$$y_1(t) = -0.295505\,(-1.47395\cos(0.970194\,t) - 1.89446\sin(0.970194\,t)) - 0.368488$$
$$(0.655971\cos(1.74823\,t) - 0.166989\sin(1.74823\,t)) + 0.163993\,(0.977027\sin(2.18001\,t) - 1.18202\cos(2.18001\,t))$$

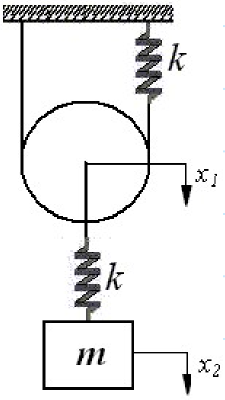
$$y_2(t) = -0.368488\,(-1.47395\cos(0.970194\,t) - 1.89446\sin(0.970194\,t)) + 0.163993$$
$$(0.655971\cos(1.74823\,t) - 0.166989\sin(1.74823\,t)) - 0.295505\,(0.977027\sin(2.18001\,t) - 1.18202\cos(2.18001\,t))$$

$$y_3(t) = -0.163993\,(-1.47395\cos(0.970194\,t) - 1.89446\sin(0.970194\,t)) + 0.295505$$
$$(0.655971\cos(1.74823\,t) - 0.166989\sin(1.74823\,t)) + 0.368488\,(0.977027\sin(2.18001\,t) - 1.18202\cos(2.18001\,t))$$

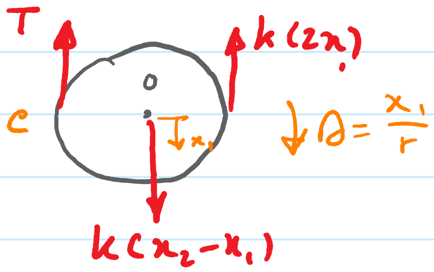




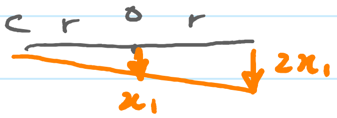
مثال : پولی به جرم m توسط کابلی با سختی k نگه داشته شده است . جرم دیگری به همان اندازه توسط فنر دیگری به همان شکل از مرکز پولی آویزان است . مطلوبست تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت ، فرکانس های طبیعی و شکل مودها .



از آنجا که کابل لغزش ندارد، سیستم دو درجه آزادی داشته، با نوشتن دیاگرام جسم آزاد، معادلات دیفرانسیل حرکت را می نویسیم .



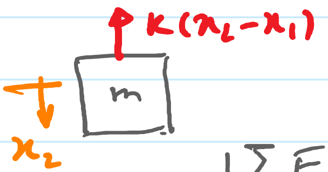
c مرکز آنی دوران است . هر نقطه متناسب با فاصله اش از آن جابجا می شود .



از نوشتن قانون دوم برای حرکت دورانی :

$$+\circlearrowright \sum M_c = I_c \ddot{\theta}$$

$$-(2kx_1)(2\cancel{r}) + k(x_2-x_1)\cancel{r} = \frac{1}{2} m\cancel{r}^2\left(\frac{\ddot{x}_1}{\cancel{r}}\right) + m\cancel{r}^2\frac{\ddot{x}_1}{\cancel{r}} \qquad (1)$$



از رسم دیاگرام جسم آزاد جرم m :

$$+\downarrow \sum F_{x_2} = m\ddot{x}_2 \Rightarrow -k(x_2-x_1) = m\ddot{x}_2 \qquad (2)$$

از مرتب کردن این دو رابطه :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m\ddot{x}_1 + 5kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با در نظر گرفتن پاسخ به فرم $x_i = X e^{j\omega t}$ و قرار دادن در این روابط، برای داشتن جواب غیر بدیهی باید $Det(\underline{k} - \lambda \underline{m}) = 0$ باشد .

$$\begin{cases} (5k - \frac{3}{2}\lambda m) X_1 - kX_2 = 0 \\ -kX_1 + (k - \lambda m) X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Det}(\underline{\underline{k}} - \lambda \underline{\underline{m}}) = 0 \Rightarrow (5k - \tfrac{3}{2}\lambda m)(k - \lambda m) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{13}{2}\frac{k}{m}\lambda + 4\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{\frac{13}{2} \mp \sqrt{(\frac{13}{2})^2 - 4(\frac{3}{2})4}}{6/2}\right)\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{13-\sqrt{73}}{6}\,k/m = 0.7427\,k/m \\ \lambda_2 = \dfrac{13+\sqrt{73}}{6}\,k/m = 3.591\,k/m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.8618\sqrt{k/m} \\ \omega_2 = 1.895\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

از قرار دادن هر کدام از λها در یکی از سطرهای صفحه قبل شکل مودها بدست می‌آید:

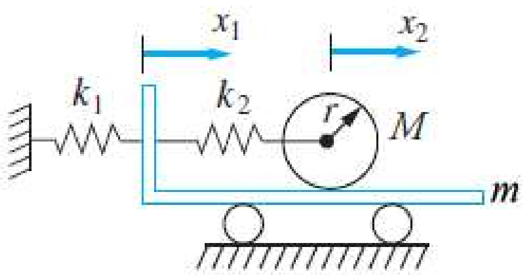
$$\left[5k - \frac{3}{2}m\left(0.7427\frac{k}{m}\right)\right]X_1 - kX_2 = 0 \qquad \Leftarrow \lambda=\lambda_1 \text{ از}$$

$$\Rightarrow X_2 = 3.886\,X_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.886 \end{Bmatrix}$$ شکل مود اول

$$\Leftarrow \lambda = \lambda_2 \text{ از}$$

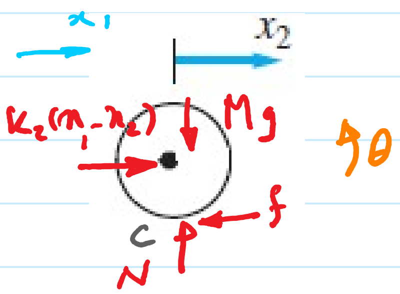
$$X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.386 \end{Bmatrix}$$

مثال: مطلوبست تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت برای سیستم نشان داده شده در شکل روبرو. حرکت دیسک بر روی گاری بی لغزش کامل است.



همانطور که از شکل واضح است، سیستم فوق دو درجه آزادی دارد. برای حل می‌توان دیاگرام جسم آزاد دیسک، گاری و دیسک و با گاری را رسم نموده و قانون دوم نیوتن را بکار بست. درهر صورت تعداد معادلات دیفرانسیل حرکت دو تا است و هر معادله اضافی ترکیبی از این دو است.

مثلاً فرض کنید دیسک را در نظر بگیریم:



اگر $x_1 > x_2$ باشد فنر k_2 فشرده می‌گردد.

در این صورت حرکت x_1 همان حرکت کف گاری بوده و θ:

$$\theta = \frac{x_1 - x_2}{r}$$

و جهت مثبت آن در خلاف عقربه‌های ساعت خواهد بود.

به علت آنکه حرکت صفحه‌ای است، سه رابطه سینتیکی را می‌توان بکار بست. از آنجا که به دنبال معادله حرکت سیستم و گاری به نیروی اصطکاک نداریم، با گرفتن گشتاور حول نقطه C که مرکز آنی دوران است، معادلات ساده‌تر می‌گردند.

$$\circlearrowleft + \quad \sum M_C = \bar{I}\ddot{\theta} + \rho \times M\ddot{x}_2$$

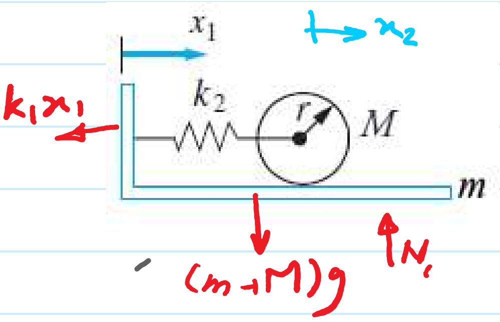
ρ فاصله از مرکز دیسک تا C است. در نتیجه تنها نیرویی که گشتاور دارد نیروی فنر است.

$$-k_2(x_1-x_2)\cancel{r} = \frac{1}{2}M r^{\cancel{2}}\left(\frac{\ddot{x}_1-\ddot{x}_2}{\cancel{r}}\right) - M\ddot{x}_2\cancel{r}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}M\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}M\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \qquad (1)$$

برای نوشتن معادله بعدی می‌توان از دیاگرام دیسک و گاری استفاده کرد.

از رسم دیاگرام جسم آزاد :

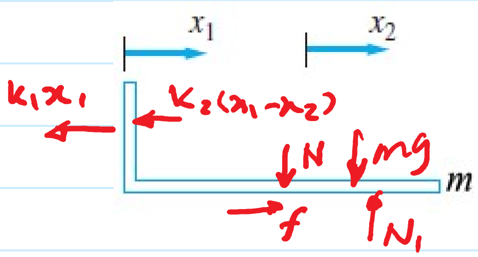


در این سیستم شامل دو جرم است. بنابراین ما قانون دوم نیوتن را برای مجموعه ای از اجسام بنویسیم،

$$\sum F_{x_1}=\sum m_i\ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow\quad -k_1x_1=m\ddot{x}_1+M\ddot{x}_2 \Rightarrow m\ddot{x}_1+M\ddot{x}_2+k_1x_1=0 \qquad (2)$$

می توانستیم از دیاگرام جسم آزاد m استفاده کنیم :



$$\sum F_{x_1}=m\ddot{x}_1 \Rightarrow -k_1x_1-k_2(x_1-x_2)+f=m\ddot{x}_1 \qquad (3)$$

f در این رابطه مجهول است که از نوشتن معادله حرکت برای M می توان آن را بدست آورد :

$$\sum F_{x_2}=M\ddot{x}_2 \Rightarrow k_2(x_1-x_2)-f=M\ddot{x}_2$$

$$\Rightarrow f=k_2(x_1-x_2)-M\ddot{x}_2 \qquad (4)$$

از قرار دادن ④ در ③ :

$$-k_1x_1-k_2(\cancel{x_1-x_2})+k_2(\cancel{x_1-x_2})-M\ddot{x}_2=m\ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1+M\ddot{x}_2+k_1x_1=0$$

که همان رابطه ② است.

اگر ① را از ② کم کنیم، باز هم یک معادله خواهیم داشت :

$$(2)-(1) \Rightarrow \left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{x}_1-\frac{M}{2}\ddot{x}_2+(k_1+k_2)x_1-k_2x_2=0 \qquad (5)$$

لذا معادلات ① و ⑤ بعنوان معادلات حرکت می توان استفاده کرد

$$\begin{pmatrix} m+\frac{M}{2} & -\frac{M}{2} \\ -\frac{M}{2} & \frac{3}{2}M \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

حسن آن این است که اکنون ماتریس های $\underline{m}$ و $\underline{k}$ متقارن هستند.