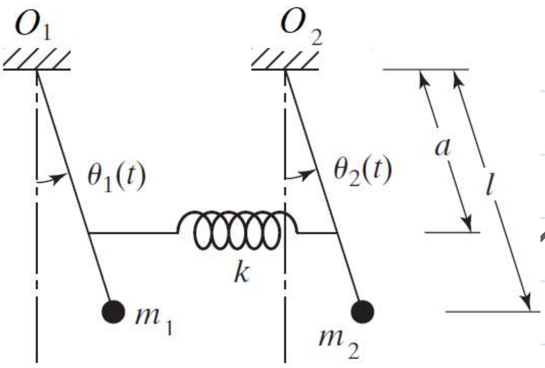
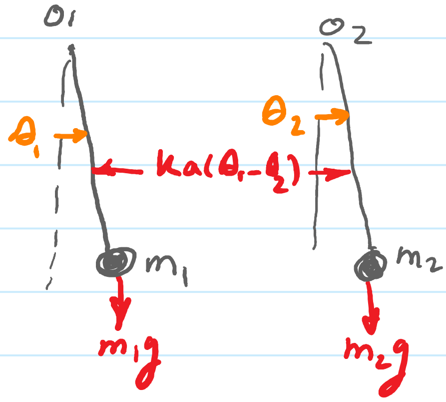


در ادامه درس جلسه قبلی، چند مثال حل می‌کنیم.

مثال: پاندول دوبل شکل مقابل را در نظر گرفته، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای آن را بدست آورید.

با رسم دیاگرام جسم آزاد، در یک لحظه دلخواه با θ_1, θ_2 خواهیم داشت:



جابجایی نسبی دو سر فنر باعث اعمال نیرو به میله‌ها می‌شود.

با نوشتن قانون دوم نیوتن:

$$\sum M_{O_1} = I_{O_1}\ddot{\theta}_1 \Rightarrow -m_1 g \sin\theta_1 l_1 - ka(\theta_1-\theta_2)a = I_{O_1}\ddot{\theta}_1$$

$$\sum M_{O_2} = I_{O_2}\ddot{\theta}_2 \Rightarrow -m_2 g \sin\theta_1 l_2 + ka(\theta_1-\theta_2)a = I_{O_2}\ddot{\theta}_2$$

با در نظر گرفتن زاویه‌ی کوچک و مرتب کردن معادلات بالا:

$$\begin{pmatrix} m_1 l_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} m_1 g l_1 + ka^2 & -ka^2 \\ -ka^2 & m_2 g l_2 + ka^2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با در نظر گرفتن $\theta_1 = \theta_{01} e^{j\omega t}$ و $\theta_2 = \theta_{02} e^{j\omega t}$ و قرار دادن در این معادلات:

$$\begin{cases} (m_1 g l_1 + ka^2 - m_1 l_1^2 \omega^2)\theta_{01} - ka^2 \theta_{02} = 0 \\ -ka^2 \theta_{01} + (m_2 g l_2 + ka^2 - m_2 l_2^2)\theta_{02} = 0 \end{cases}$$

درصورتیکه $m_1 = m_2$ و $l_1 = l_2$ باشند:

$$\begin{cases} \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \omega^2\right)\theta_{01} - \frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \theta_{02} = 0 \\ -\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 \theta_{01} + \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2 - \omega^2\right)\theta_{02} = 0 \end{cases}$$

شرط وجود جواب غیر بدیهی صفر شدن دترمینان ضرائب می‌باشد.

$$\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2-\omega^2\right)\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2-\omega^2\right)-\left[\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right]^2=0$$

$$\omega^4-2\left(\frac{g}{l}+\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)\omega^2+\left(\left(\frac{g}{l}\right)^2+2\frac{g}{l}\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\omega_{n1}=\sqrt{g/l}\\ \omega_{n2}=\sqrt{g/l+2\frac{k}{m}(a/l)^2}\end{cases}$$

از جایگذاری ω_{n1} در معادلات حرکت و از آنجا که یکی از این دو معادله مستقل است.

$$\left[\cancel{\frac{g}{l}}+\cancel{\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2}-\left(\cancel{\frac{g}{l}}\right)\right]\theta_{01}-\cancel{\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2}\theta_{02}=0 \Rightarrow \theta_{01}=\theta_{02}$$

$$\Rightarrow \underline{X}_1=\begin{Bmatrix}\theta_{01}\\ \theta_{02}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_{01}\\ \theta_{01}\end{Bmatrix}=\theta_{01}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$$

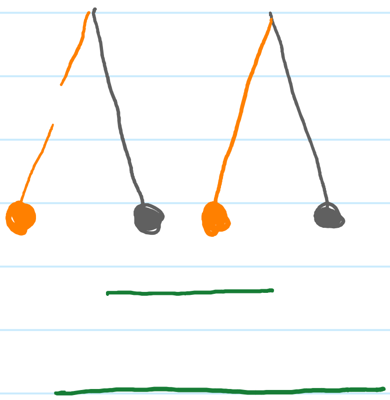
از جایگذاری ω_{n2}:

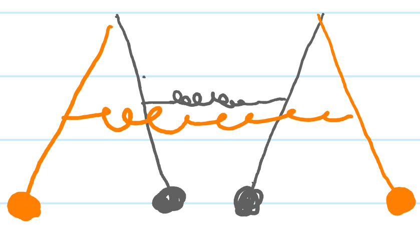
$$\left[\cancel{\frac{g}{l}}+\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2-\left(\cancel{\frac{g}{l}}+2\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\right)\right]\theta_{01}-\frac{k}{m}\left(\frac{a}{l}\right)^2\theta_{02}=0 \Rightarrow \theta_{01}=-\theta_{02}$$

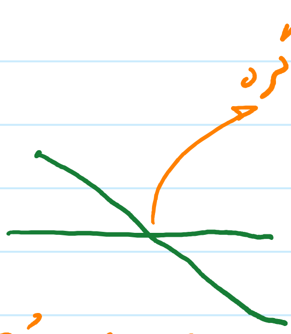
$$\Rightarrow \underline{X}_2=\begin{Bmatrix}\theta_{01}\\ \theta_{02}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\theta_{01}\\ -\theta_{01}\end{Bmatrix}=\theta_{01}\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$$

دیده می‌شود که در مود اول، هر دو میله با هم و به یک اندازه حرکت می‌کنند، بنابراین فنر k نه کشیده می‌شود و نه فشرده و مانند آن است که وجود ندارد.

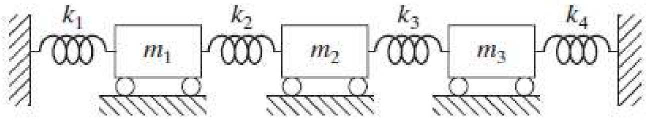
اما در مود دوم اگر یک میله به سمت چپ می‌رود، دیگری به سمت راست و برعکس و فنر مرتب کشیده و فشرده می‌شود.







مثال: برای سیستم سه درجه آزاد شکل زیر با: $k_1=k_2=k_3=5$, $k_4=10$ N/m و $m_1=m_2=m_3=4$ kg



مطلوبست تعیین فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها و پاسخ با شرایط اولیه:

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} \dot{y}_1(0) \\ \dot{y}_2(0) \\ \dot{y}_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ماتریس‌های جرم و سختی عبارتند از:

$$\boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 4. & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 10. & -5 & 0 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

و معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$\begin{pmatrix} 4. & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10. & -5 & 0 \\ -5 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

از قرار دادن $Det(\underline{k}-\lambda\underline{m})=0$ می‌توان فرکانس‌های طبیعی و مقادیر λ را به شرح زیر به دست آورد:

$$\lambda_1 = 0.941275; \qquad \lambda_2 = 3.0563; \qquad \lambda_3 = 4.75242$$

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = 0.970194; \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1.74823; \qquad \omega_3 = \sqrt{\lambda_3} = 2.18001$$

از قرار دادن λها در رابطه $(\underline{k}-\lambda\underline{m})\underline{Y}=0$ شکل مودها به دست می‌آیند:

$$\boldsymbol{Y}^{(1)} = \begin{pmatrix} -0.295505 \\ -0.368488 \\ -0.163993 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{Y}^{(2)} = \begin{pmatrix} -0.368488 \\ 0.163993 \\ 0.295505 \end{pmatrix}; \qquad \boldsymbol{Y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.163993 \\ -0.295505 \\ 0.368488 \end{pmatrix}$$

پاسخ ترکیبی از این شکل مودها است:

$$y(t) = (A_1 \cos\omega_1 t + A_2 \sin\omega_1 t)\, Y^{(1)} + (A_3 \cos\omega_2 t + A_4 \sin\omega_2 t)\, Y^{(2)} + (A_5 \cos\omega_3 t + A_6 \sin\omega_3 t)\, Y^{(3)}$$

پاسخ عبارت است از:

$$y_1(t) = -0.295505\,(\cos(0.970194\,t)\,A_1 + \sin(0.970194\,t)\,A_2) - 0.368488\,(\cos(1.74823\,t)\,A_3 + \sin(1.74823\,t)\,A_4) + 0.163993\,(\cos(2.18001\,t)\,A_5 + \sin(2.18001\,t)\,A_6)$$

$$y_2(t) = -0.368488\,(\cos(0.970194\,t)\,A_1 + \sin(0.970194\,t)\,A_2) + 0.163993\,(\cos(1.74823\,t)\,A_3 + \sin(1.74823\,t)\,A_4) - 0.295505\,(\cos(2.18001\,t)\,A_5 + \sin(2.18001\,t)\,A_6)$$

$$y_3(t) = -0.163993\,(\cos(0.970194\,t)\,A_1 + \sin(0.970194\,t)\,A_2) + 0.295505\,(\cos(1.74823\,t)\,A_3 + \sin(1.74823\,t)\,A_4) + 0.368488\,(\cos(2.18001\,t)\,A_5 + \sin(2.18001\,t)\,A_6)$$

همچنین سرعت‌ها از مشتق جابجایی‌ها بدست می‌آیند:

$$\dot{y}_1(t) = -0.295505\,(0.970194\cos(0.970194\,t)\,A_2 - 0.970194\sin(0.970194\,t)\,A_1) - 0.368488\,(1.74823\cos(1.74823\,t)\,A_4 - 1.74823\sin(1.74823\,t)\,A_3) + 0.163993\,(2.18001\cos(2.18001\,t)\,A_6 - 2.18001\sin(2.18001\,t)\,A_5)$$

$$\dot{y}_2(t) = -0.368488\,(0.970194\cos(0.970194\,t)\,A_2 - 0.970194\sin(0.970194\,t)\,A_1) + 0.163993\,(1.74823\cos(1.74823\,t)\,A_4 - 1.74823\sin(1.74823\,t)\,A_3) - 0.295505\,(2.18001\cos(2.18001\,t)\,A_6 - 2.18001\sin(2.18001\,t)\,A_5)$$

$$\dot{y}_3(t) = -0.163993\,(0.970194\cos(0.970194\,t)\,A_2 - 0.970194\sin(0.970194\,t)\,A_1) + 0.295505\,(1.74823\cos(1.74823\,t)\,A_4 - 1.74823\sin(1.74823\,t)\,A_3) + 0.368488\,(2.18001\cos(2.18001\,t)\,A_6 - 2.18001\sin(2.18001\,t)\,A_5)$$

از قرار دادن شرایط اولیه در جابجایی‌ها و سرعت‌ها ضرایب A_1 تا A_6 بدست می‌آیند:

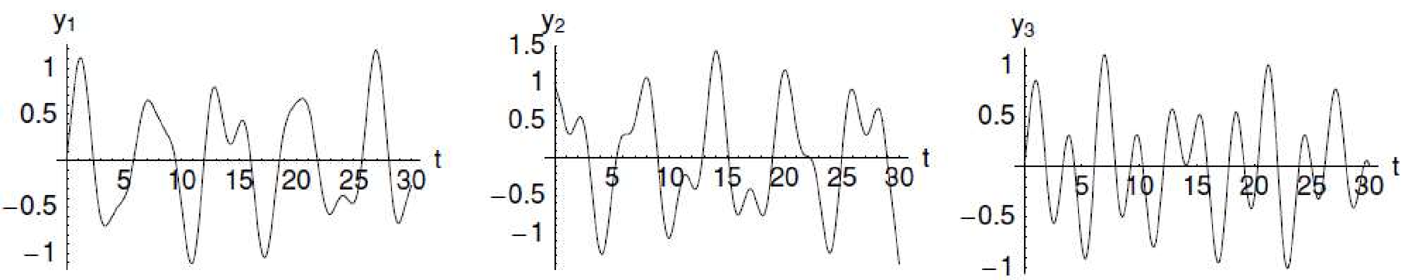
$$\begin{aligned}
y_1(0) &= 0 = -0.295505\,A_1 - 0.368488\,A_3 + 0.163993\,A_5\\
y_2(0) &= 1 = -0.368488\,A_1 + 0.163993\,A_3 - 0.295505\,A_5\\
y_3(0) &= 0 = -0.163993\,A_1 + 0.295505\,A_3 + 0.368488\,A_5\\
\dot{y}_1(0) &= 1 = -0.286697\,A_2 - 0.644201\,A_4 + 0.357505\,A_6\\
\dot{y}_2(0) &= 0 = -0.357505\,A_2 + 0.286697\,A_4 - 0.644201\,A_6\\
\dot{y}_3(0) &= 1 = -0.159105\,A_2 + 0.516609\,A_4 + 0.803306\,A_6
\end{aligned}
\;\Rightarrow\;
\begin{aligned}
A_1 &\to -1.47395\\
A_2 &\to -1.89446\\
A_3 &\to 0.655971\\
A_4 &\to -0.166989\\
A_5 &\to -1.18202\\
A_6 &\to 0.977027
\end{aligned}$$

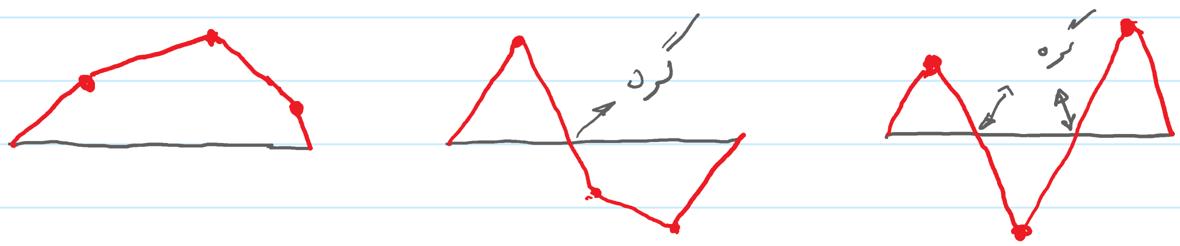
در نهایت پاسخ سیستم عبارت است از:

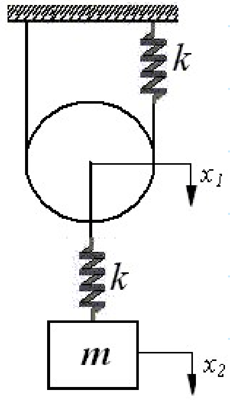
$$y_1(t) = -0.295505\,(-1.47395\cos(0.970194\,t) - 1.89446\sin(0.970194\,t)) - 0.368488\,(0.655971\cos(1.74823\,t) - 0.166989\sin(1.74823\,t)) + 0.163993\,(0.977027\sin(2.18001\,t) - 1.18202\cos(2.18001\,t))$$

$$y_2(t) = -0.368488\,(-1.47395\cos(0.970194\,t) - 1.89446\sin(0.970194\,t)) + 0.163993\,(0.655971\cos(1.74823\,t) - 0.166989\sin(1.74823\,t)) - 0.295505\,(0.977027\sin(2.18001\,t) - 1.18202\cos(2.18001\,t))$$

$$y_3(t) = -0.163993\,(-1.47395\cos(0.970194\,t) - 1.89446\sin(0.970194\,t)) + 0.295505\,(0.655971\cos(1.74823\,t) - 0.166989\sin(1.74823\,t)) + 0.368488\,(0.977027\sin(2.18001\,t) - 1.18202\cos(2.18001\,t))$$

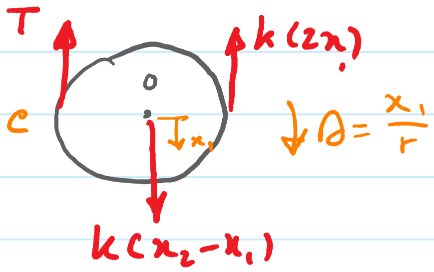




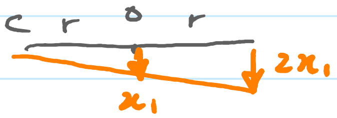


مثال : پولی به جرم m توسط کابلی با ثابت k نگه داشته شده است. جرم دیگری به همان اندازه توسط فنر دیگری به همان شکل از مرکز پولی آویزان است. مطلوبست تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها.

از آنجا که کابل لغزش ندارد، سیستم دو درجه آزادی داشته، با نوشتن دیاگرام جسم آزاد، معادلات دیفرانسیل حرکت را می‌نویسیم.



c مرکز آنی دوران است. هر نقطه متناسب با فاصله‌اش از آن جابجا می‌شود

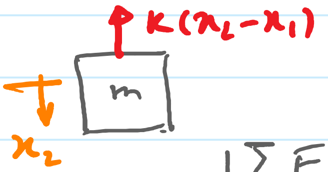


از نوشتن قانون دوم برای حرکت دورانی :

$$+\circlearrowright \sum M_c = I_c \ddot{\theta}$$

$$-(2kx_1)(2\cancel{r}) + k(x_2-x_1)\cancel{r} = \frac{1}{2} m\cancel{r}^2\left(\frac{\ddot{x}_1}{\cancel{r}}\right) + m\cancel{r}^2\frac{\ddot{x}_1}{\cancel{r}} \qquad (1)$$

از رسم دیاگرام جسم آزاد جرم m :



$$+\downarrow \sum F_{x_2} = m\ddot{x}_2 \Rightarrow -k(x_2-x_1) = m\ddot{x}_2 \qquad (2)$$

از مرتب کردن این دو رابطه :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m\ddot{x}_1 + 5kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{2}m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با در نظر گرفتن پاسخ به فرم $x_i = X e^{j\omega t}$ و قرار دادن در این روابط، برای داشتن جواب غیر بدیهی باید $Det(\underline{k} - \lambda \underline{m}) = 0$ باشد.

$$\begin{cases} (5k - \frac{3}{2}\lambda m)x_1 - kx_2 = 0 \\ -kx_1 + (k - \lambda m)x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Det}(\underline{\underline{k}} - \lambda \underline{\underline{m}}) = 0 \Rightarrow (5k - \tfrac{3}{2}\lambda m)(k - \lambda m) - k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{13}{2}\frac{k}{m}\lambda + 4\left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \left(\frac{\frac{13}{2} \mp \sqrt{(\frac{13}{2})^2 - 4(\frac{3}{2})4}}{6/2}\right)\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{13-\sqrt{73}}{6}\,k/m = 0.7427\,k/m \\ \lambda_2 = \dfrac{13+\sqrt{73}}{6}\,k/m = 3.591\,k/m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0.8618\sqrt{k/m} \\ \omega_2 = 1.895\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

از قرار دادن هر کدام از λ ها در یکی از سطرهای صفحه قبل شکل مودها بدست می‌آید:

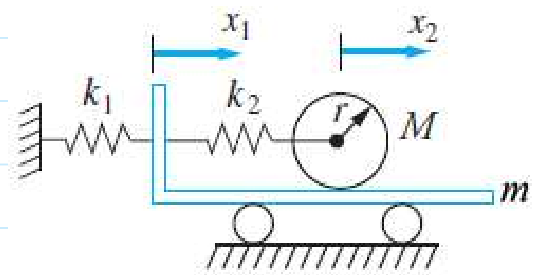
$$\left[5k - \frac{3}{2}m\left(0.7427\frac{k}{m}\right)\right]X_1 - kX_2 = 0 \quad \Leftarrow \lambda = \lambda_1 \text{ از}$$

$$\Rightarrow X_2 = 3.886X_1 \Rightarrow \underline{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3.886 \end{Bmatrix}$$ شکل مود اول

$$\Leftarrow \lambda = \lambda_2 \text{ از}$$

$$X_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.386 \end{Bmatrix}$$

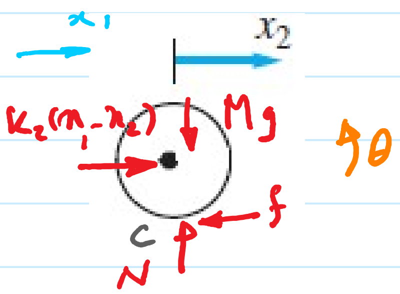
مثال: مطلوبست تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت برای سیستم نشان داده شده در شکل روبرو. حرکت دیسک بر روی گاری بدون لغزش کامل است.



همانطور که از شکل واضح است، سیستم فوق دو درجه آزادی دارد. برای حل می‌توان دیاگرام جسم آزاد دیسک، گاری و دیسک و با گاری را رسم نموده و قانون دوم نیوتن را بکار برد.

در هر صورت تعداد معادلات دیفرانسیل حرکت دوتا است و هر معادله اضافی ترکیبی از این دو است.

مثلاً فرض کنید دیسک را در نظر بگیریم:



اگر $x_1 > x_2$ باشد فنر k_2 فشرده می‌گردد.

در این صورت حرکت x_1 همان حرکت کف گاری بوده و θ:

$$\theta = \frac{x_1 - x_2}{r}$$

و جهت مثبت آن خلاف عقربه‌های ساعت خواهد بود.

به علت آنکه حرکت صفحه‌ای است، به رابطه سینتیکی را می‌توان بکار برد. از آنجا که به دنبال معادله حرکت سیستم و گاری به نیروی اصطکاک نداریم، با گرفتن گشتاور حول نقطه c که مرکز آنی دوران است، معادلات ساده‌تر می‌گردند.

$$\circlearrowleft + \sum M_c = \bar{I}\ddot{\theta} + \underline{\rho} \times M\ddot{\underline{x}}_2$$

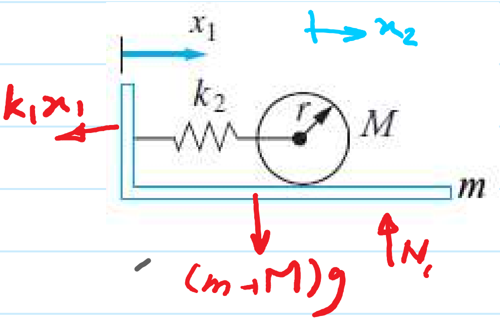
ρ فاصله از مرکز دیسک تا c است. در نتیجه تنها نیرویی که گشتاور دارد نیروی فنر است.

$$-k_2(x_1-x_2)\cancel{r} = \frac{1}{2}M r^{\cancel{2}}\left(\frac{\ddot{x}_1-\ddot{x}_2}{\cancel{r}}\right) - M\ddot{x}_2\cancel{r}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}M\ddot{x}_1 + \frac{3}{2}M\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \qquad (1)$$

برای نوشتن معادله بعدی می‌توان از دیاگرام دیسک و گاری استفاده کرد.

از رسم دیاگرام جسم آزاد:

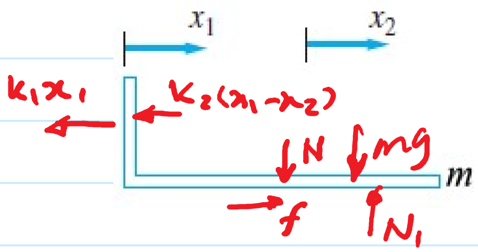


در این سیستم شامل دو جرم است. بنابراین ما قانون دوم نیوتن را برای مجموعه‌ای از اجسام تعریف می‌کنیم،

$$\sum F_{x_1} = \sum m_i \ddot{x}_i$$

$$\Rightarrow \quad -k_1x_1 = m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 \Rightarrow m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 + k_1x_1 = 0 \qquad (2)$$

می‌توانستیم از دیاگرام جسم آزاد کار را استفاده کنیم:



$$\sum F_{x_1} = m\ddot{x}_1 \quad \Rightarrow \quad -k_1x_1 - k_2(x_1-x_2) + f = m\ddot{x}_1 \qquad (3)$$

f در این رابطه مجهول است که از نوشتن معادله حرکت در یک M می‌توان آن را به دست آورد:

$$\sum F_{x_2} = M\ddot{x}_2 \quad \Rightarrow \quad k_2(x_1-x_2) - f = M\ddot{x}_2$$

$$\Rightarrow \quad f = k_2(x_1-x_2) - M\ddot{x}_2 \qquad (4)$$

از قرار دادن ④ در ③:

$$-k_1x_1 - k_2(\cancel{x_1}-x_2) + k_2(\cancel{x_1}-x_2) - M\ddot{x}_2 = m\ddot{x}_1$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_2 + k_1x_1 = 0$$

که همان رابطه ② است.

اگر ① را از ② کم کنیم به هم یک معادله خواهیم داشت:

$$(2)-(1) \Rightarrow \left(m+\frac{M}{2}\right)\ddot{x}_1 - \frac{M}{2}\ddot{x}_2 + (k_1+k_2)x_1 - k_2x_2 = 0 \qquad (5)$$

لذا معادلات ① و ⑤ به عنوان معادلات حرکت می‌توان استفاده کرد

$$\begin{pmatrix} m+\frac{M}{2} & -\frac{M}{2} \\ -\frac{M}{2} & \frac{3}{2}M \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

حسن آن این است که اکنون ماتریس‌های m و k متقارن هستند.