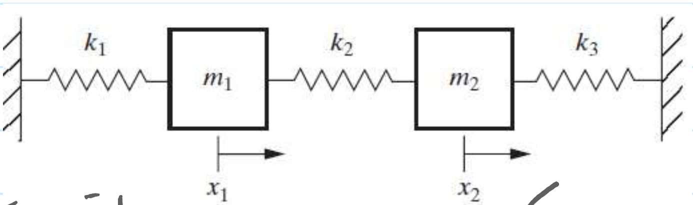
ارتعاشات آزاد سیستم‌های چند درجه آزادی Free Vibrations of multi D.O.F

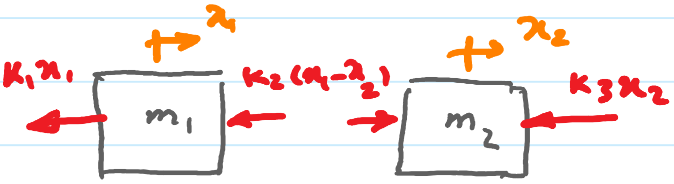
در ادامه درس به سراغ سیستم‌های چند درجه آزادی خواهیم رفت. تاکنون مباحث مختلفی را در رابطه با سیستم یک درجه انجام داده‌ایم. حال می‌توان آن‌ها را به سیستم‌های چند درجه آزادی گسترش داد.

در ابتدا ارتعاشات آزاد آن‌ها را بررسی می‌کنیم. نشان داده می‌شود که این سیستم‌ها به تعداد درجات آزادی، معادلات دیفرانسیل و فرکانس طبیعی خواهند داشت.

سیستم شکل مقابل را در نظر بگیرید:



در صورتی که جرم دوم را ثابت نگه‌داشته و اولی را در نظر بگیریم دیده می‌شود که نیاز به یک درجه آزادی برای بیان حرکت آن می‌باشد. به همین طریق در صورتی که اولی ثابت نگه داشته شود، دومی توانایی حرکت داشته و نیاز به یک درجه آزادی دارد. بنابراین کل سیستم دارای دو درجه آزادی است. برای تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت دیاگرام جسم آزاد را در یک لحظه نامشخص رسم می‌کنیم:



با نوشتن قانون دوم نیوتن برای هر کدام از جرم‌ها:

فرض بر این است که $x_1 > x_2$

$$\sum F_{x_i} = m_i \ddot{x}_i \qquad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} -k_1 x_1 - k_2(x_1 - x_2) &= m_1 \ddot{x}_1 \\ +k_2(x_1 - x_2) - k_3 x_2 &= m_2 \ddot{x}_2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3) x_2 = 0 \end{cases}$$

دیده می‌شود که سیستم دارای دو درجه آزادی است و دو معادله دیفرانسیل حرکت دارد.

این معادله را می‌توان بفرم ماتریس زیر نوشت :

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{Bmatrix}+\begin{pmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2+k_3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

ماتریس جرم   بردار شتاب   ماتریس سختی   بردار موقعیت

$$\underline{\underline{m}}\,\ddot{\underline{x}}+\underline{\underline{k}}\,\underline{x}=0$$

برای حل مانند سیستم یک درجه پاسخ را بفرم زیر می‌گیریم :

$$x_1 = X_1 e^{j\omega t}, \qquad x_2 = X_2 e^{j\omega t} \quad\Rightarrow\quad \underline{x}=\begin{Bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}e^{j\omega t}=\underline{X}\,e^{j\omega t}$$

از جاگذاری پاسخ فوق در معادلات دیفرانسیل حرکت :

$$\dot{\underline{x}}=\underline{X}(j\omega)e^{j\omega t}, \qquad \ddot{\underline{x}}=\underline{X}(j\omega)^2 e^{j\omega t}=-\omega^2\underline{X}\,e^{j\omega t}$$

$$-\omega^2\begin{pmatrix} m_1 & 0\\ 0 & m_2\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}\cancel{e^{j\omega t}}+\begin{pmatrix}k_1+k_2 & -k_2\\ -k_2 & k_2+k_3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\ X_2\end{Bmatrix}\cancel{e^{j\omega t}}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

و یا :

$$\begin{cases}\left[(k_1+k_2)-m_1\omega^2\right]X_1-k_2X_2=0\\ -k_1X_1+\left[(k_2+k_3)-m_2\omega^2\right]X_2=0\end{cases}$$

$$-\omega^2\underline{\underline{m}}\,\underline{X}+\underline{\underline{k}}\,\underline{X}=0 \Rightarrow (\underline{\underline{k}}-\omega^2\underline{\underline{m}})\underline{X}=0 \Rightarrow (\underline{\underline{k}}-\lambda\underline{\underline{m}})\underline{X}=0$$

که $\lambda=\omega^2$ است .

برای یافتن دو مجهول می‌توان از روش کرامر استفاده کرد :

$$X_1=\frac{\begin{vmatrix}0 & -k_2\\ 0 & (k_2+k_3)-m_2\omega^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(k_1+k_2)-m_1\omega^2 & -k_2\\ -k_2 & (k_2+k_3)-m_2\omega^2\end{vmatrix}}=0, \qquad X_2=\frac{\begin{vmatrix}(k_1+k_2)-m_1\omega^2 & 0\\ -k_2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(k_1+k_2)-m_1\omega^2 & -k_2\\ -k_2 & (k_2+k_3)-m_2\omega^2\end{vmatrix}}=0$$

دیده می‌شود که جواب بدیهی $x_1=0$ و $x_2=0$ بدست آمد. اما می‌دانیم که مسئله جواب دارد زیرا می‌توان جرم‌ها را حرکت داده و رها کرد. بنابراین تنها راه ممکن برای آنکه جواب غیربدیهی وجود داشته باشد آن است که دترمینان مخرج در رابطه قبلی صفر گردد. یعنی:

$$\begin{vmatrix} (k_1+k_2)-m_1\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-m_2\omega^2 \end{vmatrix}=0 \quad \underset{\lambda=\omega^2}{\Rightarrow} \quad \begin{vmatrix} (k_1+k_2)-m_1\lambda & -k_2 \\ -k_2 & (k_2+k_3)-m_2\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$m_1 m_2 \lambda^2-(k_2 m_1+k_3 m_1+k_1 m_2+k_2 m_2)\lambda+k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3=0$$

این معادله بنام معادله مشخصه معروف بوده و حل مقادیر λ را بدست می‌دهد. برای هر λ که جواب مسئله است دو مقدار ω بدست خواهد آمد و در مجموع چهار جواب بدست می‌آید. اگر سیستم n درجه آزادی داشته باشد، n معادله دیفرانسیل داشته و دترمینان آن یک دترمینان درجه n است، که معادله مشخصه آن برحسب λ از درجه n و برحسب ω از درجه $2n$ می‌باشد.

از قرار دادن مقادیر ω و λ بدست آمده در دستگاه معادلات بدست آمده، مقادیر X_i بدست می‌آید، یعنی پاسخ بدست می‌آید ($x_i = X_i e^{i\omega t}$).

در ادامه برای درک بهتر مسئله یک مثال حل می‌گردد.

مثال: اگر $m_1 = 9\,kg$، $m_2 = 1\,kg$، $k_1 = 38\,N/m$، $k_2 = 2\,N/m$ و $k_3 = 3\,N/m$ باشد، ωها و X را بیابید.

ماتریس‌های m و k عبارتند از:

$$\underline{m}=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{k}=\begin{pmatrix} 40 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

در این صورت دستگاه معادلات عبارت است از:

$$(\underline{K} - \lambda \underline{m})\underline{X} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (40-9\lambda)x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (5-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 40-9\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \underline{X} = 0$$

شرط وجود جواب غیربدیهی صفر شدن دترمینان ضرائب است:

$$\mathrm{Det}(\underline{K} - \lambda \underline{m}) = 0 \Rightarrow (40-9\lambda)(5-\lambda) - (-2)(-2) = 0$$

$$9\lambda^2 - 85\lambda + 196 = 0 \Rightarrow (\lambda-4)(9\lambda-49) = 0$$

$$\lambda = \lambda_1 = 4 \Rightarrow \omega_1 = \pm 2 \ \mathrm{rad/s}$$

$$\lambda = \lambda_2 = \frac{49}{9} \Rightarrow \omega_2 = \pm \frac{7}{3}$$

- فرکانس طبیعی کوچکتر، بنام فرکانس طبیعی اصلی و یا اول نامیده می‌شود.
- فرکانس بعدی، فرکانس طبیعی دوم است.
- دیده می‌شود که چهار پاسخ برای ω بدست آمد.
- از قرار دادن λ_1 یا $\pm\omega_1$ در معادلات بالا:

$\lambda = \lambda_1 = 4$

$$\begin{cases} (40-9(4))x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + (5-4)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

دیده می‌شود که هر دو معادله شبیه هم هستند و دومی ضریب $(-\frac{1}{2})$ اولی است. بنابراین در حقیقت یک معادله و دو مجهول داریم. یعنی سیستم بی‌نهایت پاسخ x_1 و x_2 دارد و چنین چیزی درست هم است، زیرا با تحریک‌های اولیه مختلف، بی‌نهایت حالت پاسخ سیستم بدست می‌آید. همچنین دترمینان ضرائب برابر صفر قرار دادیم، در این صورت یک سطر ضریبی از سطرهای دیگر است.

از یکی از دو معادله بالا:

$$x_2 = 2x_1$$

بنابراین مد ارتعاش اول:

$$\underline{X}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ 2X_1 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \text{ و } X_1 = 1 \Rightarrow \underline{X}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

X_1 بی‌نهایت حالت می‌تواند داشته باشد، اما هر مقداری که داشته باشد، در صورتیکه $\omega = \pm\omega_1$ و یا $\lambda = \lambda_1$ باشد، دامنه پاسخ دومی دو برابر اولی خواهد بود. اگر آن را $X_1 = 1$ بگیریم، بردار بدست آمده بنام شکل مود اول (اصلی) سیستم نامیده می‌شود (First / Fundamental modal shape)

در صورتیکه:

$$\omega = \pm\omega_2 \quad \text{یا} \quad \lambda = \lambda_2 = 49/9$$

$$\begin{cases} \left(40 - 9\left(\frac{49}{9}\right)\right)X_1 - 2X_2 = 0 \\ -2X_1 + \left(5 - \frac{49}{9}\right)X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9X_1 - 2X_2 = 0 \\ -2X_1 - \frac{4}{9}X_2 = 0 \end{cases}$$

از اینجا هم دیده می‌شود که معادله دومی ضریب $\left(+\frac{2}{9}\right)$ از اولی است. بنابراین در اینجا هم یک معادله مستقل موجود است. اگر از اولی بنویسیم:

$$X_2 = -\frac{9}{2}X_1$$

$$\underline{X}_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -\frac{9}{2}X_1 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{9}{2} \end{Bmatrix} \text{ و } X_1 = 1 \Rightarrow \underline{X}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{9}{2} \end{Bmatrix}$$

این بردار بنام شکل مود دوم سیستم نامیده می‌شود.

بنابراین پاسخ سیستم می‌تواند

$$\underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \underline{X}_1 e^{j\omega_1 t} \text{ یا } \underline{X}_1 e^{-j\omega_1 t} \text{ یا } \underline{X}_2 e^{j\omega_2 t} \text{ یا } \underline{X}_2 e^{-j\omega_2 t}$$

باشد، اما کلاسیک جواب را به صورت ترکیبی خطی از چهارتا پاسخ در نظر می‌گیریم.

$$\underline{x}(t) = a\underline{X}_1 e^{j\omega_1 t} + b\underline{X}_1 e^{-j\omega_1 t} + c\underline{X}_2 e^{j\omega_2 t} + d\underline{X}_2 e^{-j\omega_2 t}$$

ضرایب a، b، c و d که از روی شرایط اولیه مسئله به دست می‌آیند.

با در نظر گرفتن این پاسخ:

$$\underline{x}(t)=(a e^{j\omega_1 t}+b e^{-j\omega_1 t})\underline{X}_1+(c e^{j\omega_2 t}+d e^{-j\omega_2 t})\underline{X}_2$$

اگر هر کدام از عبارتهای e داخل پرانتز را در نظر بگیریم، عبارات آشنایی هستند که در ابتدای ترم برای پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم یک درجه حالت آمدند. در آنجا دیده شد که پاسخ آنها به شرح هارمونیک می باشد. بنابراین رابطه بالا بصورت زیر تبدیل می گردد:

$$\underline{x}(t)=\begin{Bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{Bmatrix}=(A_1\cos\omega_1 t+A_2\sin\omega_1 t)\underline{X}_1+(A_3\cos\omega_2 t+A_4\sin\omega_2 t)\underline{X}_2$$

این ضرائب A_1 تا A_4 یا در حالت کلی A_1 تا A_{2n} از روی شرائط اولیه بدست می آیند.

شرائط اولیه عبارت است از n جابجایی اولیه و n سرعت اولیه. با قرار دادن این شرائط پاسخ کلی و مشخص برای سیستم بدست می آید.

مثال: مسئله فوق را که پارامترهای سیستم داده شد را با شرائط اولیه زیر حل کنید:

$$\underline{x}(0)=\begin{Bmatrix}x_1(0)\\x_2(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix},\quad \underline{\dot{x}}(0)=\begin{Bmatrix}\dot{x}_1(0)\\\dot{x}_2(0)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

قبلاً فرکانسهای طبیعی و شکل مودها را بصورت زیر بدست آوردیم:

$$\omega_1=2\ \mathrm{rad/s}\qquad \underline{X}_1=\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}\quad ,\quad \underline{X}_2=\begin{Bmatrix}1\\-9/2\end{Bmatrix}$$

$$\omega_2=7/3\ \mathrm{rad/s}$$

بنابراین پاسخ سیستم از رابطه بالا برابر است با:

$$\underline{x}(t)=\begin{Bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{Bmatrix}=(A_1\cos 2t+A_2\sin 2t)\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}+(A_3\cos\tfrac{7}{3}t+A_4\sin\tfrac{7}{3}t)\begin{Bmatrix}1\\-\frac{9}{2}\end{Bmatrix}$$

$$x_1(t)=A_1\cos 2t+A_2\sin 2t+A_3\cos\tfrac{7}{3}t+A_4\sin\tfrac{7}{3}t$$

$$x_2(t)=2A_1\cos 2t+2A_2\sin 2t-\tfrac{9}{2}A_3\cos\tfrac{7}{3}t-\tfrac{9}{2}A_4\sin\tfrac{7}{3}t$$

با مشتق گیری از روابط الف :

$$\dot{x}_1(t) = -2A_1\sin 2t + 2A_2\cos 2t - \frac{7}{3}A_3\sin\frac{7}{3}t + \frac{7}{3}A_4\cos\frac{7}{3}t$$

$$\dot{x}_2(t) = (2)(-2A_1\sin 2t) + (2)(2A_2\cos 2t) + \left(-\frac{9}{2}\right)\left(-\frac{7}{3}A_3\sin\frac{7}{3}t\right) + \left(-\frac{9}{2}\right)\left(\frac{7}{3}A_4\cos\frac{7}{3}t\right)$$

با جایگذاری شرایط اولیه در چهار معادله فوق : $t=0$

$$x_1(0) = A_1 + A_3 = 1$$

$$x_2(0) = 2A_1 - \frac{9}{2}A_3 = 0$$

$$\dot{x}_1(0) = 2A_2 + \frac{7}{3}A_4 = 0$$

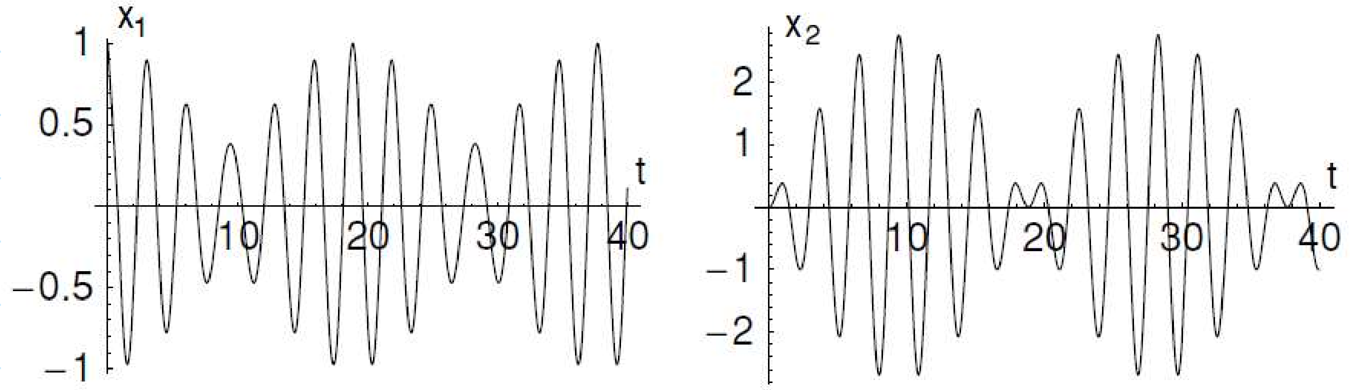
$$\dot{x}_2(0) = 4A_2 - \frac{21}{2}A_4 = 0$$

دیده می‌شود که در اینجا چهار معادله و چهار مجهول نداریم، بلکه دو دستگاه دو معادله و دو مجهول داریم زیرا در معادلات جابجایی اولیه فقط ضرائب فرد ظاهر می‌شوند و در معادلات سرعت فقط معادلات زوج.

که در معادله اول : $A_1 = \frac{9}{13}$, $A_3 = \frac{4}{13}$

از دو معادله دوم : $A_2 = 0$, $A_4 = 0$

و پاسخ حرکت : $x_1(t) = \frac{9}{13}\cos 2t + \frac{4}{13}\cos\frac{7}{3}t$, $x_2(t) = \frac{18}{13}\cos 2t - \frac{18}{13}\cos\frac{7}{3}t$



دیده می‌شود که پاسخ سیستم ترکیبی از دو شکل مود آن خواهد بود.

در حالت سیستم n درجه آزادی، n معادله دیفرانسیل حرکت، n فرکانس طبیعی و n شکل مود خواهیم داشت

و پاسخ ترکیبی از شکل مودها است. ضرائب این ترکیب از روی شرائط اولیه و فرکانس‌های طبیعی به دست

می‌آیند.

در مثال فوق اگر شرائط اولیه به فرم زیر باشد:

$x_1(0)=1 \qquad \dot{x}_1(0)=0$

$x_2(0)=2 \qquad \dot{x}_2(0)=0$

از جایگذاری در معادلات قبلی دیده می‌شود که:

$$x_1(0)=A_1+A_3=1$$
$$x_2(0)=2A_1-\frac{9}{2}A_3=2$$
$$\rightarrow A_1=1 \;,\; A_3=0$$

از دو شرط دیگر هم: $A_2=A_4=0$

بنابراین پاسخ سیستم عبارت است از:

$x_1(t)=\cos 2t$

$x_2(t)=2\cos 2t$

دیده می‌شود که در پاسخ فقط فرکانس طبیعی اول ظاهر شده است.

از پاسخ همچنین دیده می‌شود که همیشه پاسخ دومی دو برابر اولی است، یعنی سیستم در مود اول

نوسان می‌کند، این بدان معنی است که سیستم در مود اول قرار داده شده است.

امّا چرا؟

با تحریک اولیه به فرم شکل مود اول، یعنی جابجایی دومی به فرم دو برابر اولی، سیستم را در مود اول

انداخته‌ایم ـ بنابراین مود دوم و فرکانس طبیعی آن در پاسخ ظاهر نمی‌شود.