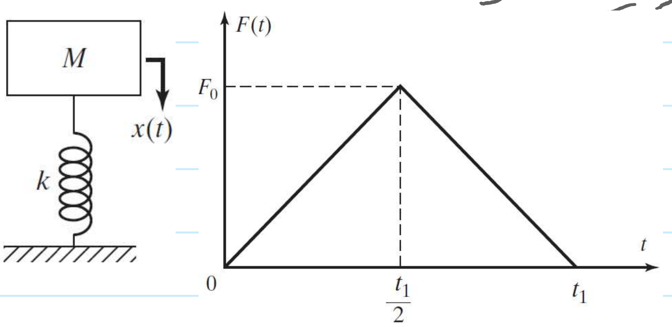
در ادامه پاسخ سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی به تحریک مثلثی محاسبه می‌گردد.



سیستم یک درجه آزادی شکل روبرو که تحت تحریک تابع نشان داده شده قرار دارد را در نظر بگیرید.

ضابطه تابع عبارت است از :

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{2F_0t}{t_1} & 0\le t\le \dfrac{t_1}{2}\\ F_0-\dfrac{2F_0}{t_1}\left(t-t_1/2\right) & \dfrac{t_1}{2}\le t\le t_1\\ 0 & t>t_1\end{cases}$$

در اینجا سه حالت را بررسی می‌کنیم:

۱- $0\le t\le \frac{t_1}{2}$ با استفاده از روش انتگرال کانولوشن :

$$x(t)=\int_0^t \frac{2F_0}{t_1}\xi\left(\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\right)d\xi$$

$$=\frac{2F_0}{t_1}\left(\frac{1}{m\omega_n}\right)\left(\frac{1}{-\omega_n}\right)\int_0^t\xi\sin\omega_n(t-\xi)\,d\left[\omega_n(t-\xi)\right]$$

$$=\frac{2F_0}{t_1}\left(\frac{-1}{m\omega_n^2}\right)\int_0^t\xi\left(-d\cos\omega_n(t-\xi)\right)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء :

$$x(t)=\frac{2F_0}{kt_1}\left[\xi\cos\omega_n(t-\xi)\Big|_0^t-\int_0^t\cos\omega_n(t-\xi)\,d\xi\right]$$

$$=\frac{2F_0}{kt_1}\left[\xi\cos\omega_n(t-\xi)\Big|_0^t+\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\Big|_0^t\right]$$

$$=\frac{2F_0}{kt_1}\left[\left(t\cos\omega_n(\cancel{t-t})-0\right)+\frac{1}{\omega_n}\left(\cancel{\sin\omega_n(t-t)}-\sin\omega_n(t-0)\right)\right]$$

$$=\frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_nt}{\omega_nt_1}\right)$$

۲- $\frac{t_1}{2} \le t \le t_1$

در اینجا به دو روش برای حل است. روش اول استفاده مستقیم از روش انتگرال کانولوشن است.

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{m\omega_n}\left[\int_0^{t_1/2}\frac{2F_0}{t_1}\xi\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi + \int_{t_1/2}^{t}\left[F_0 - \frac{2F_0}{t_1}\left(\xi-\frac{t_1}{2}\right)\right]\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi\right]$$

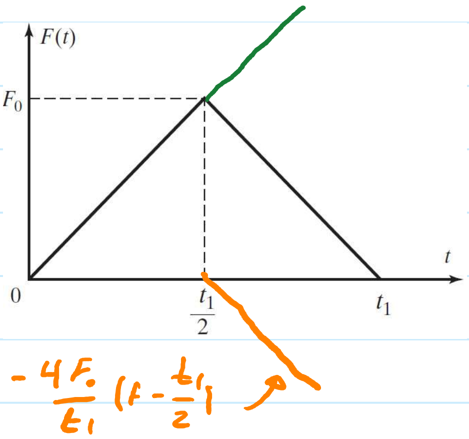
با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء:

$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\left\{1-\frac{t}{t_1}+\frac{1}{\omega_n t_1}\left[2\sin\omega_n\left(t-\frac{t_1}{2}\right)-\sin\omega_n t\right]\right\}$$

برای استفاده از روش دوم حل، جواب بالا را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right)-\frac{4F_0}{k}\left(\frac{t-t_1/2}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-t_1/2)}{\omega_n t_1}\right)$$

دیده می‌شود که دو عبارت خیلی شبیه به هم هستند. بنابراین در روش دوم فرض را بر این می‌گذاریم که نیم خط صعودی تا $\frac{t_1}{2}$ در ناحیه بعد از $\frac{t_1}{2}$ نیز ادامه یابد و از $\frac{t_1}{2}$ تابع خطی دیگری به سیستم وارد شود، به گونه‌ای که مجموع این دو تابع خطی، تابع واقعی وارد بر سیستم را بدهد.



$$\frac{2F_0}{t_1}t + A\left(t-\frac{t_1}{2}\right) = F_0 - \frac{2F_0}{t_1}\left(t-\frac{t_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{4F_0}{t_1}$$

بنابراین طبق اصل جمع آثار پاسخ کل سیستم مجموع پاسخ‌ها به دو تحریک خطی $\frac{2F_0}{t_1}t$ و $-\frac{4F_0}{t_1}\left(t-\frac{t_1}{2}\right)$ است.

$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right)-\frac{4F_0}{k}\left(\frac{t-t_1/2}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-t_1/2)}{\omega_n t_1}\right)$$

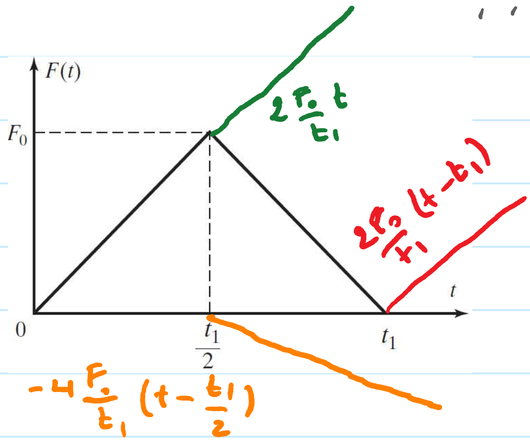
۳- $t > t_1$

در اینجا سه روش برای حل موجود است:

روش اول استفاده از کانولوشن انتگرال است

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_n}\left\{\int_0^{t_1/2}\frac{2F_0}{t_1}\xi\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi+\int_{t_1/2}^{t_1}\left[F_0-\frac{2F_0}{t_1}\left(\xi-\frac{t_1}{2}\right)\right]\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi\right\}$$

در روش دوم مانند حالت قبل فرض می‌کنیم که تابع تحریک $\frac{2F_0}{t}t$ از ابتدا به سیستم اعمال شده، سپس تابع $-\frac{4F_0}{t_1}(t-\frac{t_1}{2})$ از لحظه $\frac{t_1}{2}$ به سیستم اعمال شود و بعد از آن تابع تحریک خطی دیگری از t_1 به سیستم اعمال شده، بگونه‌ای که مجموع هر سه تابع تحریک در $t>t_1$ برابر صفر گردد.



بنابراین:

$$\frac{2F_0}{t_1}t-4\frac{F_0}{t_1}\left(t-\frac{t_1}{2}\right)+B(t-t_1)=0$$

$$\Rightarrow B=\frac{2F_0}{t_1}$$

پاسخ نهایی عبارت است از:

$$x(t)=\frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right)-\frac{4F_0}{k}\left(\frac{t-\frac{t_1}{2}}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-\frac{t_1}{2})}{\omega_n t_1}\right)+\frac{2F_0}{k}\left(\frac{t-t_1}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1}\right)$$

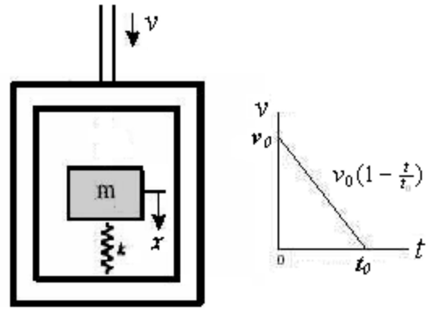
در روش سوم هم از آنجا که بعد از t_1 نیروی تحریک وجود ندارد، ارتعاشات آزاد خواهیم داشت، که شرایط اولیه آن پاسخ سیستم در لحظه t_1 است.

$$x(t)=A\cos\omega_n(t-t_1)+B\sin\omega_n(t-t_1)$$

از قرار دادن شرایط اولیه جابجایی و سرعت در لحظه t_1:

$$x(t)=x(t_1)\cos\omega_n(t-t_1)+\frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_1)$$

آسانسوری با سرعت ثابت v_0 به سمت پایین حرکت می کند. در زمان $t=0$ آسانسور متوقف می شود. سرعت در خلال زمان t_0 به طور خطی به صفر کاهش می یابد $(v=v_0(1-t/t_0))$. مطلوبست جابجایی x مربوط به جرم m به ازای $t\leq t_0$.



Jy

از رسم دیاگرام جسم آزاد و نوشتن قانون دوم نیوتن :

$\boxed{m}$ $\quad \sum F_x = m\ddot{x}$

$k(x-y)$

$$\Rightarrow -k(x-y)=m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x}+kx=ky$$

بنابراین پاسخ عبارت است از :

$$x(t)=A\cos\omega_n t+B\sin\omega_n t+\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t ky(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

سرعت آسانسور داده شده، بنابراین با انتگرال گیری آن جابجایی y را بدست می آوریم :

$$v=\frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_0^y dy=\int_0^t v_0\,dt \Rightarrow y=\int_0^t v_0(1-\frac{t}{t_0})dt = v_0\left[t-\frac{t^2}{2t_0}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow y=v_0\left(t-\frac{t^2}{2t}\right)$$

جواب خصوصی پاسخ x (قسمت انتگرال کانولوشن آن) برابر است با :

$$x_p(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t kv_0\left(\xi-\frac{\xi^2}{2t_0}\right)\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

$$=\frac{kv_0}{m\omega_n}\left[\int_0^t \xi\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi-\frac{1}{2t_0}\int_0^t \xi^2\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi\right]$$

اما :

$$\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi=-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\,d\omega_n(t-\xi)=\frac{1}{\omega_n}d\cos\omega_n(t-\xi)$$

پس :

$$x_p(t)=\frac{\cancel{k}v_0}{\underbrace{m\omega_n^2}_{\cancel{k}}}\left[\int_0^t \xi\,d\cos\omega_n(t-\xi)-\frac{1}{2t_0}\int_0^t \xi^2\,d\cos\omega_n(t-\xi)\right]$$

با کمک انتگرال گیری جزء به جزء، انتگرال قسمت اول و با دو بار انتگرال قسمت دوم محاسبه می گردد. در نهایت :

$$x_p(t)=V_0\left\{\left[\xi\cos\omega_n(t-\xi)+\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\right]_0^t-\frac{1}{2t_0}\left[\xi^2\cos\omega_n(t-\xi)+\frac{2}{\omega_n}\left(\xi\sin\omega_n(t-\xi)-\frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\xi)\right)\right]_0^t\right\}$$

از قرار دادن حدود انتگرال:

$$x_p(t)=V_0t\left(1-\frac{t}{2t_0}\right)+\frac{V_0}{t_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)-\frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

از قراردادن شرایط اولیه در $x(t)$ که x_p حذف شده و:

$$t=0\Rightarrow\begin{cases}x(0)=0\\ \dot{x}(0)=V_0\end{cases}$$

$$x=A\cos\omega_n t+B\sin\omega_n t\quad\Rightarrow\quad\begin{aligned}&x(0)=A\cancel{\cos 0}+B\cancel{\sin 0}=0\Rightarrow A=0\\&\dot{x}(0)=B\omega_n\cancel{\cos 0}=V_0\Rightarrow B=\frac{V_0}{\omega_n}\end{aligned}$$

بنابراین جواب نهایی x عبارت است از:

$$x(t)=\cancel{\frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t}+\left(V_0t\left(1-\frac{t}{2t_0}\right)+\frac{V_0}{t_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)-\cancel{\frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t}\right)$$

$$x(t)=V_0t\left(1-\frac{t}{2t_0}\right)+\frac{V_0}{t_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)\quad\leftarrow$$

این مسئله را می‌توانستیم از مختصات نسبی هم حل کنیم. اگر از $z=x-y$ استفاده گردد:

$$\sum F_x=m\ddot{x}\Rightarrow -k(x-y)=m\ddot{x}\Rightarrow -kz=m(\ddot{y}+\ddot{z})\Rightarrow m\ddot{z}+kz=-m\ddot{y}$$

لذا:

$$V=V_0\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\Rightarrow\ddot{y}=\frac{dV}{dt}=-\frac{V_0}{t}\qquad\Rightarrow m\ddot{z}+kz=m\frac{V_0}{t_0}$$

حل خصوصی رابطه بالا ساده است، زیرا همان تحریک پله‌ای است.

$$z(t)=\frac{\frac{mV_0}{t_0}}{k}(1-\cos\omega_n t)=\frac{V_0m}{t_0k}(1-\cos\omega_n t)=\frac{V_0}{t_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$$

حرکت y نیز که قبلاً بدست آمد:

$$y=\int_0^t V\,dt=V_0\left(t-\frac{t^2}{2t_0}\right)$$

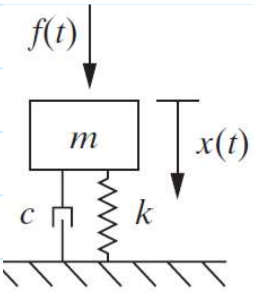
که همان جواب قبلی بدست می‌آید:

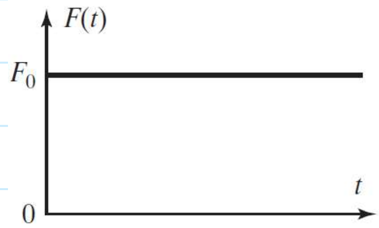
$$x(t)=z+y$$

از آنجا که در لحظه صفر x و y یک حرکت دارند شرایط اولیه z صفر بوده و بنابراین همگن آن صفر است.

در صورتیکه استهلاک را در نظر بگیریم و از طریق انتگرال کانولوشن پاسخ را محاسبه کنیم، روابط کمی پیچیده تر می گردد. در ادامه پاسخ سیستم به نیروی پله‌ای و پالس مستطیلی را محاسبه می‌کنیم:

پاسخ به تحریک پله‌ای:





شرایط اولیه را برابر با صفر در نظر می‌گیریم:

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\xi)\,e^{-\omega_n\zeta(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)\,d\xi=\frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\omega_n\zeta(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)\,d\xi$$

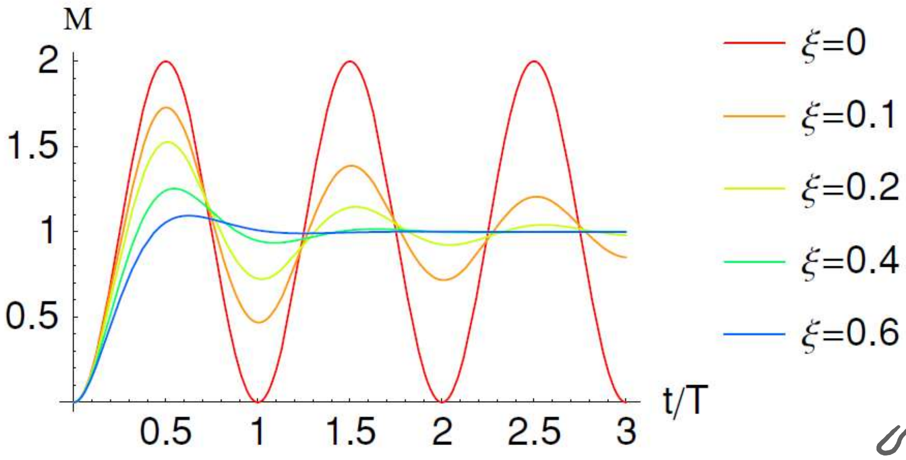
با حل انتگرال بالا:

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_d}\left(\frac{e^{-t\zeta\omega_n}\left(\left(e^{\omega_n\zeta t}-\cos\omega_d t\right)\omega_d-\omega_n\zeta\sin\omega_d t\right)}{\omega_n^2\zeta^2+\omega_d^2}\right)$$

با ساده کردن این رابطه، ضریب بزرگنمایی دینامیکی عبارت است از:

$$M=\frac{x(t)}{F_0/k}=-e^{-\omega_n\zeta t}\cos\omega_d t-\frac{e^{-\omega_n\zeta t}\zeta\sin\omega_d t}{\sqrt{1-\zeta^2}}+1$$

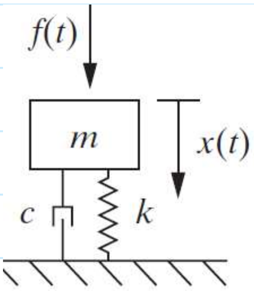
در صورتیکه این مقدار را برای ضریب‌های استهلاک متفاوت رسم کنیم:

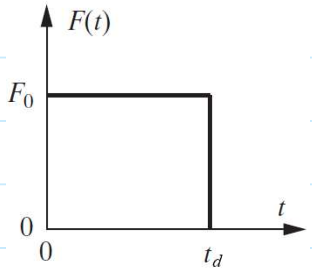


حالتی که دمپ صفر است را قبلاً حل کردیم که دامنه به اندازه دو برابر جابجایی استاتیکی می‌گردد.

در حالتی که استهلاک وجود دارد سیستم حول وضعیت استاتیکی نوسان کرده و تدریجاً از دامنه آن کاسته می‌گردد.

پاسخ به ضربه مستطیلی





در بازه $t \le t_d$ از:

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F_0\, e^{-\omega_n\xi(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)\,d\xi$$

استفاده کرده و در $t>t_d$ از ارتعاشات آزاد با شرایط اولیه $x(t_d)$ و $\dot{x}(t_d)$ استفاده می‌کنیم:

$$x(t)=e^{-\omega_n\xi(t-t_d)}\left(x(t_d)\cos\omega_d(t-t_d)+\frac{\omega_n\xi\, x(t_d)+\dot{x}(t_d)}{\omega_d}\sin\omega_d(t-t_d)\right)$$

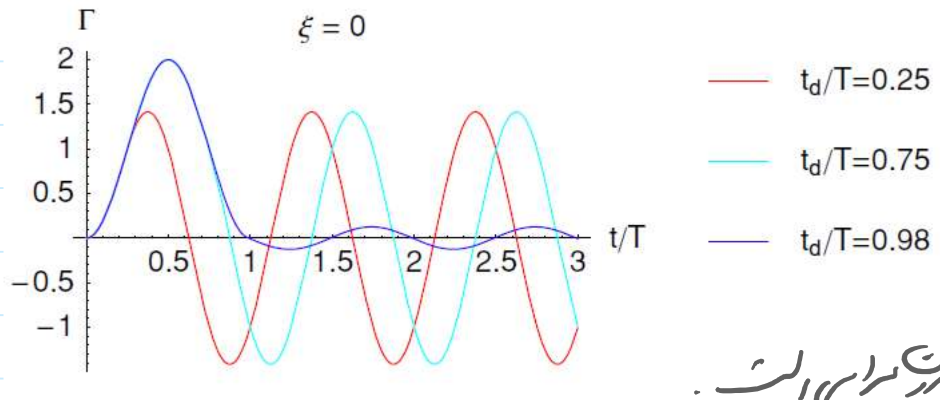
در $t\le t_d$ جواب مانند پاسخ به تابع پله‌ای ثابت آمده برقرار است. از این پاسخ استفاده کرده و $x(t_d)$ و $\dot{x}(t_d)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x(t_d)=\frac{F_0}{k}\left(-e^{-\omega_n\xi t_d}\cos\omega_d t_d-\frac{e^{-\omega_n\xi t_d}\,\xi\sin\omega_d t_d}{\sqrt{1-\xi^2}}+1\right)$$

$$\dot{x}(t_d)=\frac{F_0}{k}\left[\frac{e^{-\omega_n\xi t_d}\,\omega_n\xi^2\sin\omega_d t_d}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-\omega_n\xi t_d}\,\xi\omega_n\cos\omega_d t_d-\frac{e^{-\omega_n\xi t_d}\,\omega_d\xi\cos\omega_d t_d}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-\omega_n\xi t_d}\,\omega_d\sin\omega_d t_d\right]$$

در این صورت با جایگذاری این مقادیر در پاسخ ارتعاش آزاد و ساده‌سازی روابط حاصله، ضریب بزرگنمایی دینامیکی عبارت است از:

$$M=\frac{e^{-\omega_n\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(-\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_d t+e^{\omega_n\xi t_d}\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_d(t-t_d)-\xi\sin\omega_d t+e^{\omega_n\xi t_d}\,\xi\sin\omega_d(t-t_d)\right)$$



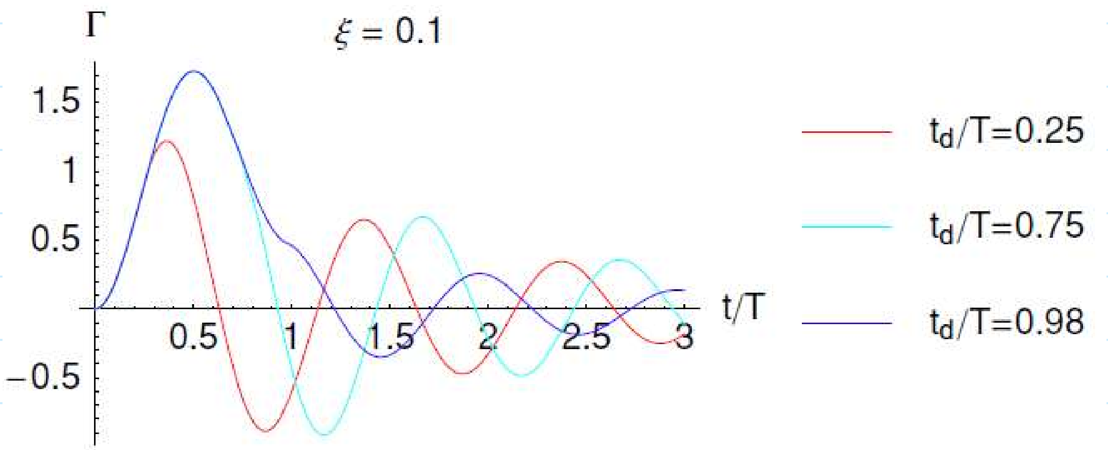
شکل روبرو ضریب بزرگنمایی را برای حالت نامیرا و برای سه مقدار متفاوت t_d نشان می‌دهد.

T در اینجا پریود ارتعاشات طبیعی سیستم است.

از شکل دیده می‌شود هنگامیکه بار در $\frac{t_d}{T}$ برابر با 0.25 برداشته می‌شود، سیستم با سرعت و جابجایی که دارد به حرکت خود ادامه می‌دهد و ارتعاشات با دامنه مشخص حول تراز صفر انجام می‌دهد. در صورتیکه هنگام برداشتن بار $\frac{t_d}{T}=0.75$ باشد، شرایط مانند حالت قبل بوده، فقط جهت سرعت متفاوت است. بنابراین دامنه حرکت ثابت می‌ماند.

اگر بار در $\frac{t_d}{T}=0.98$ برداشته شود، جابجایی در t_d کم و سرعت نیز کم است، بنابراین ارتعاشات با دامنه کم را خواهیم داشت.

اگر حالت $\xi=0.1$ را در نظر گرفته و همین نمودارها را رسم کنیم:



دیده می‌شود که مشابه شکل قبل است ولی با میرایی.