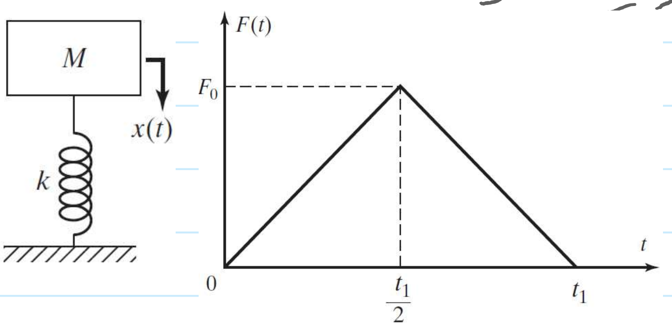
در ادامه پاسخ سیستم یک درجه آزادی بدون میرایی به تحریک مثلثی مطالعه می‌گردد.



سیستم یک درجه آزادی شکل روبرو تحت تحریک تابع نشان داده شده قرار دارد را در نظر بگیرید.

مطابقاً تابع عبارت است از:

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{2F_0t}{t_1} & 0\le t\le \dfrac{t_1}{2}\\ F_0-\dfrac{2F_0}{t_1}(t-t_1/2) & \dfrac{t_1}{2}\le t\le t_1\\ 0 & t>t_1\end{cases}$$

در اینجا سه حالت را بررسی می‌کنیم:

۱- $0\le t\le \frac{t_1}{2}$ با استفاده از روش انتگرال کانولوشن:

$$x(t)=\int_0^t \frac{2F_0}{t_1}\xi\left(\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\right)d\xi$$

$$=\frac{2F_0}{t_1}\left(\frac{1}{m\omega_n}\right)\left(\frac{1}{-\omega_n}\right)\int_0^t \xi\sin\omega_n(t-\xi)\,d[\omega_n(t-\xi)]$$

$$=\frac{2F_0}{t_1}\left(\frac{-1}{m\omega_n^2}\right)\int_0^t \xi\left(-d\cos\omega_n(t-\xi)\right)$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء جزء:

$$x(t)=\frac{2F_0}{kt_1}\left[\xi\cos\omega_n(t-\xi)\Big|_0^t-\int_0^t\cos\omega_n(t-\xi)\,d\xi\right]$$

$$=\frac{2F_0}{kt_1}\left[\xi\cos\omega_n(t-\xi)\Big|_0^t+\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\Big|_0^t\right]$$

$$=\frac{2F_0}{kt_1}\left[\left(t\cos\omega_n(\cancel{t-t})-0\right)+\frac{1}{\omega_n}\left(\cancel{\sin\omega_n(t-t)}-\sin\omega_n(t-0)\right)\right]$$

$$=\frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right)$$

۲- $\frac{t_1}{2} \le t \le t_1$

در اینجا به دو روش برای حل است. روش اول استفاده مستقیم از روش انتگرال کانولوشن است.

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{1}{m\omega_n}\left[\int_0^{t_1/2}\frac{2F_0}{t_1}\xi\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi + \int_{t_1/2}^{t}\left[F_0-\frac{2F_0}{t_1}\left(\xi-\frac{t_1}{2}\right)\right]\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi\right]$$

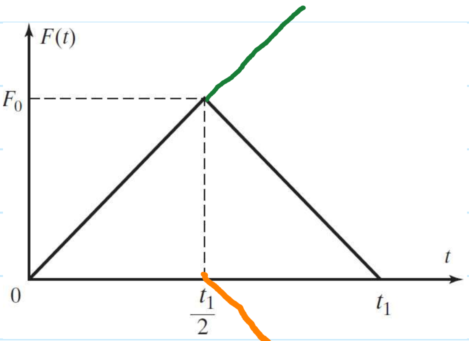
با استفاده از روش انتگرال گیری جزء به جزء:

$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\left\{1-\frac{t}{t_1}+\frac{1}{\omega_n t_1}\left[2\sin\omega_n\left(t-\frac{t_1}{2}\right)-\sin\omega_n t\right]\right\}$$

برای استفاده از روش دوم حل، جواب بالا را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right)-\frac{4F_0}{k}\left(\frac{t-t_1/2}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-t_1/2)}{\omega_n t_1}\right)$$

دیده می‌شود که دو عبارت خیلی شبیه به هم هستند. بنابراین در روش دوم فرض را بر این می‌گذاریم که نیم خط صعودی تا $\frac{t_1}{2}$ در ناحیه بعد از $\frac{t_1}{2}$ نیز ادامه یابد و از $\frac{t_1}{2}$ تابع خطی دیگری به سیستم وارد شود، بطوری که مجموع این دو تابع خطی، تابع واقعی وارد بر سیستم را بدهد.



$-\frac{4F_0}{t_1}\left(t-\frac{t_1}{2}\right)$

$$\frac{2F_0}{t_1}t + A\left(t-\frac{t_1}{2}\right) = F_0 - \frac{2F_0}{t_1}\left(t-\frac{t_1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{4F_0}{t_1}$$

بنابراین طبق اصل جمع آثار پاسخ کل برابر با پاسخ به دو تحریک خطی $\frac{2F_0}{t_1}t$ و $-\frac{4F_0}{t_1}\left(t-\frac{t_1}{2}\right)$ است.

$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1}-\frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right)-\frac{4F_0}{k}\left(\frac{t-t_1/2}{t_1}-\frac{\sin\omega_n(t-t_1/2)}{\omega_n t_1}\right)$$

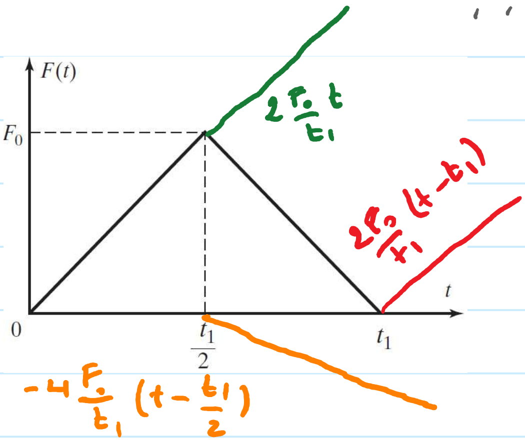
$t > t_1$ -۳

در اینجا سه روش برای حل موجود است:

روش اول استفاده از کانولوشن انتگرال است

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n}\left\{\int_0^{t_1/2} \frac{2F_0}{t_1}\xi \sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi + \int_{t_1/2}^{t_1}\left[F_0 - \frac{2F_0}{t_1}\left(\xi - \frac{t_1}{2}\right)\right]\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi\right\}$$

در روش دوم مانند حالت قبل فرض می‌کنیم که تابع تحریک $\frac{2F_0}{t}t$ از ابتدا به سیستم اعمال شده، سپس تابع $\frac{-4F_0}{t_1}\left(t-\frac{t_1}{2}\right)$ از لحظه $\frac{t_1}{2}$ به سیستم اعمال شود و بعد از آن تابع تحریک خطی دیگری از t_1 به سیستم اعمال شده، به طوری که مجموع هر سه تابع تحریک در $t > t_1$ برابر صفر گردد.



بنابراین:

$$\frac{2F_0}{t_1}t - 4\frac{F_0}{t_1}\left(t-\frac{t_1}{2}\right) + B(t-t_1) = 0$$

$$\Rightarrow B = \frac{2F_0}{t_1}$$

پاسخ نهایی عبارت است از:

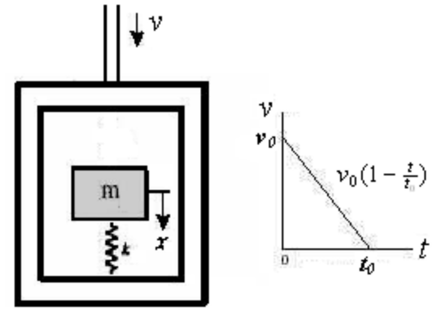
$$x(t) = \frac{2F_0}{k}\left(\frac{t}{t_1} - \frac{\sin\omega_n t}{\omega_n t_1}\right) - \frac{4F_0}{k}\left(\frac{t-\frac{t_1}{2}}{t_1} - \frac{\sin\omega_n\left(t-\frac{t_1}{2}\right)}{\omega_n t_1}\right) + \frac{2F_0}{k}\left(\frac{t-t_1}{t_1} - \frac{\sin\omega_n(t-t_1)}{\omega_n t_1}\right)$$

در روش سوم هم از آنجا که بعد از t_1 نیروی تحریک وجود ندارد، ارتعاشات آزاد خواهیم داشت، که شرایط اولیه آن پاسخ سیستم در لحظه t_1 است.

$$x(t) = A\cos\omega_n(t-t_1) + B\sin\omega_n(t-t_1)$$

از قرار دادن شرایط اولیه جابجایی و سرعت در لحظه t_1:

$$x(t) = x(t_1)\cos\omega_n(t-t_1) + \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_1)$$



آسانسوری با سرعت ثابت v_0 به سمت پایین حرکت می کند. در زمان $t=0$ آسانسور متوقف می شود. سرعت در خلال زمان t_0 به طور خطی به صفر کاهش می یابد $(v=v_0(1-t/t_0))$. مطلوبست جابجایی x مربوط به جرم m به ازای $t \le t_0$.

Jy

از رسم دیاگرام جسم آزاد و نوشتن قانون دوم نیوتن :

$\boxed{m}$ $\quad \sum F_x = m\ddot{x}$

$k(x-y)$

$$\Rightarrow -k(x-y) = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = ky$$

شرایط پاسخ عبارت است از :

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t k y(\xi)\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

سرعت آسانسور داده شده، بنابراین با انتگرال گیری آن جابجایی یا y را بدست می‌آوریم :

$$v = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t v_0\,dt \Rightarrow y = \int_0^t v_0(1-t/t_0)\,dt = v_0\left[t - \frac{t^2}{2t_0}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow y = v_0\left(t - \frac{t^2}{2t_0}\right)$$

جواب خصوصی پاسخ x (قسمت انتگرال کانولوشن آن) برابر است با :

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_n}\int_0^t k v_0\left(\xi - \frac{\xi^2}{2t_0}\right)\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

$$= \frac{kv_0}{m\omega_n}\left[\int_0^t \xi\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi - \frac{1}{2t_0}\int_0^t \xi^2\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi\right]$$

اما :

$$\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi = -\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\,d\omega_n(t-\xi) = \frac{1}{\omega_n}\,d\cos\omega_n(t-\xi)$$

پس ؛

$$x_p(t) = \frac{\cancel{k}v_0}{m\omega_n^2} \left[\int_0^t \xi\,d\cos\omega_n(t-\xi) - \frac{1}{2t_0}\int_0^t \xi^2\,d\cos\omega_n(t-\xi)\right]$$

$\cancel{k}$

با کمک انتگرال گیری جزء به جزء، انتگرال قسمت اول و با دو بار انتگرال قسمت دوم محاسبه می‌گردد. در نهایت :

$$x_p(t)=V_0\left\{\left[\xi\cos\omega_n(t-\xi)+\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\right]_0^t-\frac{1}{2t_0}\left[\xi^2\cos\omega_n(t-\xi)+\frac{2}{\omega_n}\left(\xi\sin\omega_n(t-\xi)-\frac{1}{\omega_n}\cos\omega_n(t-\xi)\right)\right]_0^t\right\}$$

از قرار دادن حدود انتگرال :

$$x_p(t)=V_0 t\left(1-\frac{t}{2t_0}\right)+\frac{V_0}{t_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)-\frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$

از قرار دادن شرایط اولیه در $x(t)$ که x_p حذف شده و :

$$t=0\Rightarrow\begin{cases}x(0)=0\\ \dot{x}(0)=V_0\end{cases}$$

$$x=A\cos\omega_n t+B\sin\omega_n t\Rightarrow\begin{cases}x(0)=A\cancel{\cos 0}+B\cancel{\sin 0}=0\Rightarrow A=0\\ \dot{x}(0)=B\omega_n\cancel{\cos 0}=V_0\Rightarrow B=\dfrac{V_0}{\omega_n}\end{cases}$$

بنابراین جواب نهایی x عبارت است از :

$$x(t)=\cancel{\frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t}+\left(V_0 t\left(1-\frac{t}{2t_0}\right)+\frac{V_0}{t_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)-\cancel{\frac{V_0}{\omega_n}\sin\omega_n t}\right)$$

$$x(t)=V_0 t\left(1-\frac{t}{2t_0}\right)+\frac{V_0}{t_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$$

این مسئله را می‌توانستیم از مختصات نسبی هم حل کنیم. اگر از $z=x-y$ استفاده گردد :

$$\sum F_x=m\ddot{x}\Rightarrow -k(x-y)=m\ddot{x}\Rightarrow -kz=m(\ddot{y}+\ddot{z})\Rightarrow m\ddot{z}+kz=-m\ddot{y}$$

که :

$$V=V_0\left(1-\frac{t}{t_0}\right)\Rightarrow \ddot{y}=\frac{dV}{dt}=-\frac{V_0}{t_0}\quad\Rightarrow m\ddot{z}+kz=m\frac{V_0}{t_0}$$

حل خصوصی رابطه بالا ساده است، زیرا همان تحریک پله‌ای است.

$$z(t)=\frac{\frac{mV_0}{t_0}}{k}(1-\cos\omega_n t)=\frac{V_0 m}{t_0 k}(1-\cos\omega_n t)=\frac{V_0}{t_0\omega_n^2}(1-\cos\omega_n t)$$

حرکت y نیز که قبلاً بدست آمد :

$$y=\int_0^t V\,dt=V_0\left(t-\frac{t^2}{2t_0}\right)$$

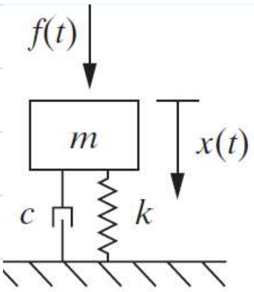
که همان جواب قبلی بدست می‌آید :

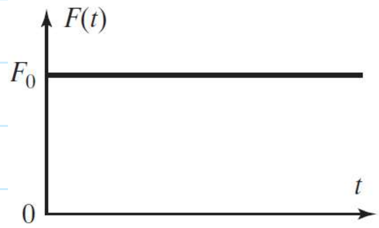
$$x(t)=z+y$$

از آنجا که در لحظه صفر x و y یک حرکت دارند شرایط اولیه z صفر بوده و پاسخ همگن آن صفر است.

در صورتی که استهلاک را در نظر بگیریم و از جواب انتگرال کانولوشن پاسخ را محاسبه کنیم، روابط کمی پیچیده تر می گردد. در ادامه پاسخ سیستم به نیروی پله ای و پالس مستطیلی را محاسبه می کنیم:

پاسخ به تحریک پله ای:





شرایط اولیه را برابر با صفر در نظر می گیریم:

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\xi)\, e^{-\omega_n\zeta(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)\,d\xi=\frac{F_0}{m\omega_d}\int_0^t e^{-\omega_n\zeta(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)\,d\xi$$

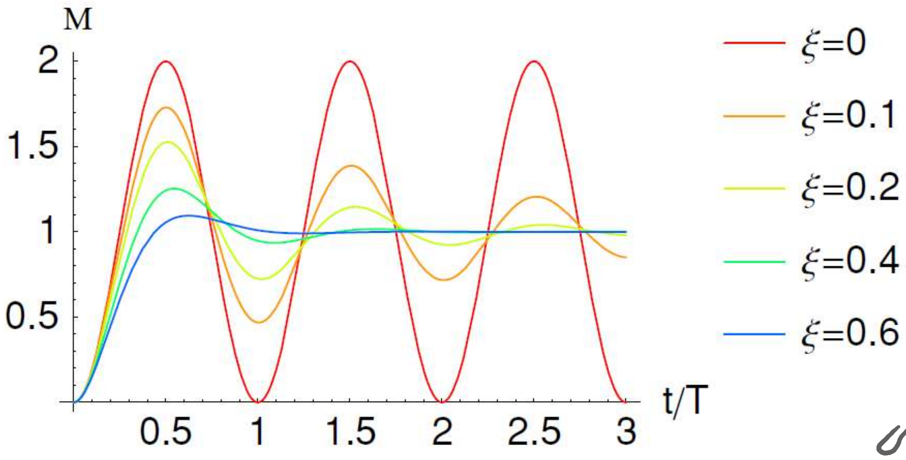
حل انتگرال بالا:

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_d}\left(\frac{e^{-t\zeta\omega_n}\left(\left(e^{\omega_n\zeta t}-\cos\omega_d t\right)\omega_d-\omega_n\zeta\sin\omega_d t\right)}{\omega_n^2\zeta^2+\omega_d^2}\right)$$

با ساده کردن این رابطه، ضریب بزرگنمایی دینامیکی عبارت است از:

$$M=\frac{x(t)}{F_0/k}=-e^{-\omega_n\zeta t}\cos\omega_d t-\frac{e^{-\omega_n\zeta t}\zeta\sin\omega_d t}{\sqrt{1-\zeta^2}}+1$$

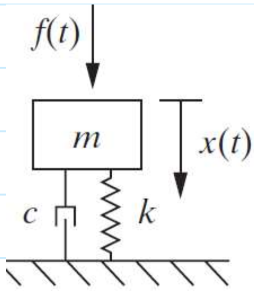
در صورتی که این مقدار برای ثابت های استهلاک متفاوت رسم گردد:

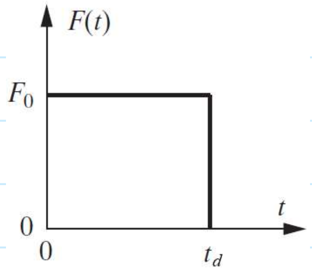


حالتی که $\zeta=0$ است را قبلاً حل کردیم که دامنه به اندازه دو برابر جابجایی استاتیکی می گردد.

در حالتی که استهلاک وجود دارد در سیستم حول وضعیت استاتیکی نوسان کرده و تدریجاً از دامنه آن کاسته می گردد.

پاسخ - ضربه مستطیلی





در ابتدا برای $t \le t_d$ از :

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F_0\, e^{-\omega_n\xi(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)\,d\xi$$

استفاده کرده و در $t>t_d$ از ارتعاشات آزاد با شرایط اولیه $x(t_d)$ و $\dot{x}(t_d)$ استفاده می‌کنیم :

$$x(t)=e^{-\omega_n\xi(t-t_d)}\left(x(t_d)\cos\omega_d(t-t_d)+\frac{\omega_n\xi x(t_d)+\dot{x}(t_d)}{\omega_d}\sin\omega_d(t-t_d)\right)$$

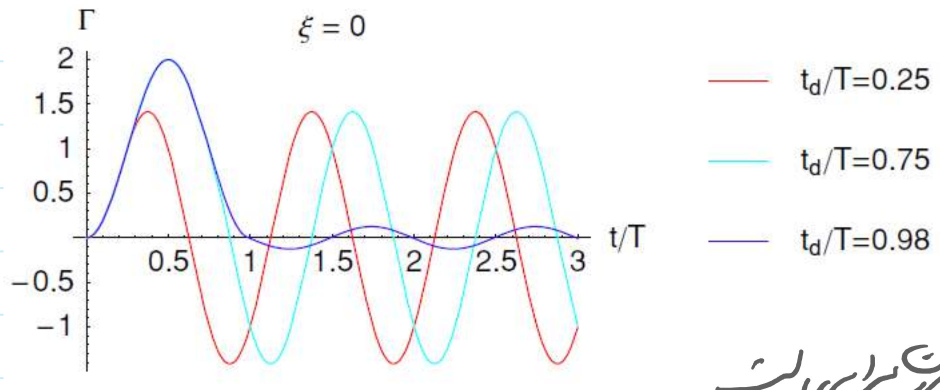
در $t\le t_d$ جواب معادله دیفرانسیل که در آن تابع نیرو ثابت آمده برقرار است. از این پاسخ استفاده کرده و $x(t_d)$ و $\dot{x}(t_d)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$x(t_d)=\frac{F_0}{k}\left(-e^{-\omega_n\xi t_d}\cos\omega_d t_d-\frac{e^{-\omega_n\xi t_d}\xi\sin\omega_d t_d}{\sqrt{1-\xi^2}}+1\right)$$

$$\dot{x}(t_d)=\frac{F_0}{k}\left[\frac{e^{-\omega_n\xi t_d}\omega_n\xi^2\sin\omega_d t_d}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-\omega_n\xi t_d}\xi\omega_n\cos\omega_d t_d-\frac{e^{-\omega_n\xi t_d}\omega_d\xi\cos\omega_d t_d}{\sqrt{1-\xi^2}}+e^{-\omega_n\xi t_d}\omega_d\sin\omega_d t_d\right]$$

در این صورت با جایگذاری این مقادیر در پاسخ ارتعاش آزاد و ساده‌سازی روابط حاصله، ضریب بزرگنمایی دینامیکی عبارت است از :

$$M=\frac{e^{-\omega_n\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(-\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_d t+e^{\omega_n\xi t_d}\sqrt{1-\xi^2}\cos\omega_d(t-t_d)-\xi\sin\omega_d t+e^{\omega_n\xi t_d}\xi\sin\omega_d(t-t_d)\right)$$



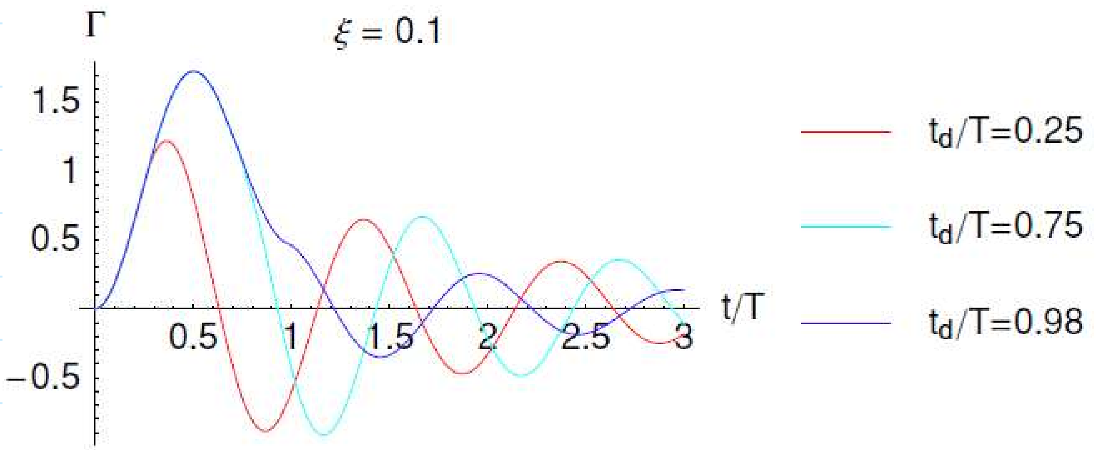
شکل روبرو ضریب بزرگنمایی را برای حالت نامیرا و برای سه مقدار متفاوت t_d نشان می‌دهد.

T در اینجا پریود ارتعاشات طبیعی سازه است.

از شکل دیده می‌شود هنگامیکه بار در $\frac{t_d}{T}$ برابر با ۰.۲۵ برداشته می‌شود، سیستم با سرعت و جابجایی که دارد به حرکت خود ادامه می‌دهد و ارتعاشات با دامنه مشخص خود را انجام می‌دهد. در صورتی که هنگام برداشتن بار در $\frac{t_d}{T}=0.75$ باشد، شرایط مانند حالت قبل بوده، فقط جهت سرعت متفاوت است. بنابراین دامنه حرکت ثابت می‌ماند.

اگر بار در $\frac{t_d}{T}=0.98$ برداشته شود، جابجایی در t_d هم و سرعت نیز کم است، بنابراین ارتعاشات با دامنه کم را خواهیم داشت.

اگر حالت $\xi=0.1$ را در نظر گرفته و همین نمودارها را رسم کنیم:



دیده می‌شود که رفتار مثل قبل است ولی با میرایی.