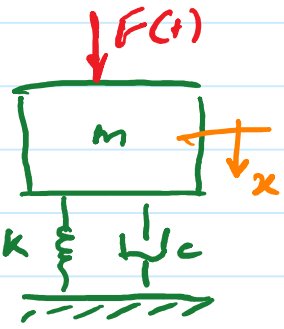


General Forced Response

پایع به نیروی دلخواه

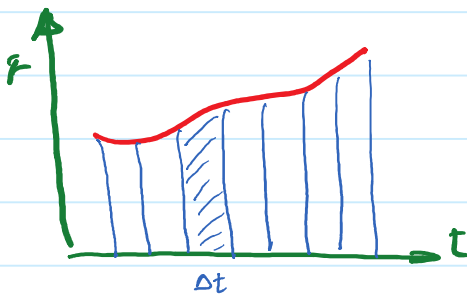
تا آنجا که پایع یک سیستم یکدیده آزاد را به تابع هارمونیک دربردارد. در اینجا دیدن پایع به پایع دلخواه هستیم. این تابع دلخواه می تواند هر تابعی، حتی تابع هارمونیک باشد.



سیستم یکدیده آزاد را به بل را که تحت اثر بار $F(t)$ قرار دارد و تغییر می دهد. از دستن تا آنکه درم نوبت برای آن خواص دیت:

روش حل برای این معادله حل معادله دفرانسیل همگن و خصوصیات

درصد شده تابع F تابع دلخواه مطابق شکل باشد، برای



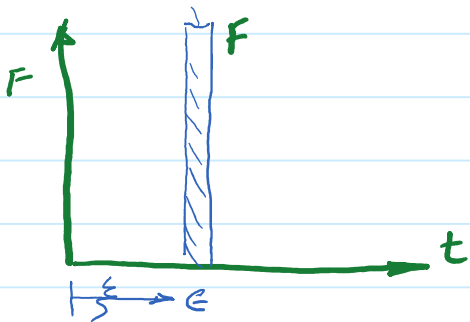
حل می توان آن را به تعدادی ناحیه تقسیم کرد و هر کدام را به عنوان یک پالس در نظر گرفته، پایع سیستم را

نسبت به آن بدست آورده پس با استفاده از اصل برهم نش با هم جمع نمود.

اما ابتدا به نسبت پایع سیستم بالا را یک پالس بدست آورد. در صورتیکه مدت زمان ماه کوتاه شود

به نیروی آن یا تابع آن، تابع ضربه (Impulse) نوشته.

پایع ضربه Impulse Response



رابطه یک پالس با ضربه دیدن می شود مدت زمان اثر آن عایت

هر چه ϵ به سمت صفر میل کند، نرم تابع به صورت ضربه

مانند است. نیروی متوسط ضربه معین زیرا است: $F = \frac{\hat{F}}{\epsilon} = F \left(\frac{1}{\epsilon} \right)$

ضرب عبارت اولت از :

$$\hat{F} = \int_{-\infty}^{\infty} F dt$$

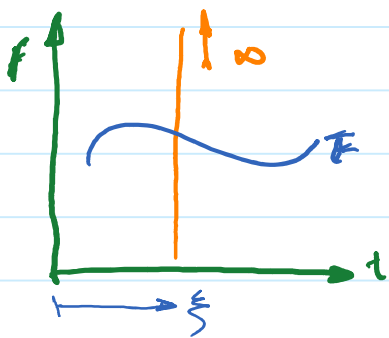
که سطح زیر منحنی محدودترمان است.

دیده می شود که هر چه ϵ کمتر باشد مقدار F به سمت زیاد شدن می رود. ضرب را می توان تغییر داد

$$\hat{F} = \int_{-\infty}^{\infty} F dt = \frac{\hat{F}}{\epsilon} \epsilon = \hat{F} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \epsilon$$

توسعه زدگی :

رشته تابع ضرب را می توان از روی تابع دلتای دیراک (Dirac Delta Function) به دست آورد.



ضرایب این تابع عبارت است از :

$$\delta(t - \xi) = \begin{cases} 0 & t \neq \xi \\ \infty & t = \xi \end{cases}$$

این تابع دارای دو خاصیت است :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \xi) dt = 1$$

۱-

که حاصل آن ۱ است :

$$\frac{1}{\epsilon} \epsilon = 1$$

تابع δ را می توان مانند $\frac{1}{\epsilon}$ گرفت که در حال تم شدن به سمت صفر شدن است که در $t = \xi$

دانه آن به سمت بی نهایت می رود. این تابع در همه نقاط اشتراک گیری صفر است الا در $t = \xi$.

۲- هم مانند ϵ است که حاصل اشتراک یک می گردد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \delta(t - \xi) dt = F(\xi)$$

۲-

حاصل ضرب تابع F در تابع δ در همه نقاط برابر صفر است زیرا $\delta = 0$ الا در $t = \xi$ که

$$F(\xi) \frac{1}{\epsilon} \epsilon = F(\xi)$$

بنابراین اگر ضرب این با قدرت (دانه) \hat{F} اثر کند می توان نوشت :

$$F = \frac{\hat{F}}{\epsilon} = \hat{F} \frac{1}{\epsilon} = \hat{F} \delta$$

حال پاسخ سیستم را به نرم زیر به دست می آوریم:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{F} \delta(t - t_0)$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$$

- فعلاً $t = 0$ قرار می دهیم. در ادامه آن را اصلاح می کنیم

- فعلاً شرایط اولیه صفر در نظر گرفته، در ادامه آن را اصلاح می کنیم.

معنی این شرایط صفر است:

$$x(0^-) = 0, \dot{x}(0^-) = 0$$

بین کرده که - یعنی دقیقاً قبل از اعمال بار است.

برابر صل صفر به بالا و به دست آوردن جواب حفره، دلیل نقل بودن تابع δ است

اعمال آن را به دست می آوریم. برابر این کار دو طرف را در dt ضرب کرده در بر روی

درت زمان از $t_0 - \epsilon$ که در حل کم کردن است اشتغال گیری می کنیم:

$$\int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx) dt = \int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} \hat{F} \delta(t) dt$$

حال اشتغال ϵ را می دهیم:

$$\int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} m\ddot{x} dt = m\dot{x} \Big|_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} = m(\dot{x}(t_0 + \epsilon) - \dot{x}(t_0 - \epsilon)) = m\dot{x}(t_0^+)$$

$$\int_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} c\dot{x} dt = cx \Big|_{t_0 - \epsilon}^{t_0 + \epsilon} = c(x(t_0 + \epsilon) - x(t_0 - \epsilon)) = cx(t_0^+) = 0$$

در اینجا به علت ϵ صفر ناخن، جسم فرصت جابجایی را پیدا نخواهد کرد.

عملت به خطی کوتاه، اگر چه صورت مقدار متوسط
در نظر گرفته شده است.

$$\int_{\epsilon \rightarrow 0}^{\epsilon} kx dt = kx_{av} \epsilon = 0$$

صیغه انتگرال است، حالت عبارت است از:

$$\int_{\epsilon \rightarrow 0}^{\epsilon} \hat{F} \delta(t) dt = \hat{F}$$

مابراین فرکانس و طول را به هم:

$$m \dot{x}(0^+) = \hat{F} \Rightarrow \dot{x}(0^+) = \frac{\hat{F}}{m}$$

این را به همان شکل در حد که اثر ضرب بر روی سیستم، تغییر صفت آن را به صورت جسم است.

حال برای حل صیغه در نظر می‌گیریم که سیستم به جبر ارتعاشات اجباری با یک $F(t) = \hat{F} \delta(t)$ در شرایط اولیه صفر، یک سیستم گسیخته با شرایط اولیه صفر:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$$

$$x(0) = x(0^+) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(0^+) = \frac{\hat{F}}{m}$$

آن‌ها حل این معادله را در ابتدای ترم خواندیم:

$$x(t) = A e^{-\omega_n t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

برای تعیین آماره فرکانس A و φ از شرایط اولیه استفاده می‌شود:

$$x(0^+) = 0 \rightarrow A \cancel{e^0} \sin(0 + \varphi) = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A e^{-\omega_n t} \sin \omega_d t + A \omega_d e^{-\omega_n t} \cos \omega_d t$$

$$\dot{x}(0^+) = -\omega_n A \cancel{e^0} \cancel{\sin 0} + A \omega_d \cancel{e^0} \cancel{\cos 0} = \frac{\hat{F}}{m} \Rightarrow A = \frac{\hat{F}}{m \omega_d}$$

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m \omega_d} e^{-\omega_n t} \sin \omega_d t$$

در نتیجه:
این صیغه سیستم به ضرب با اندازه \hat{F} در لحظه صفر است.

در صورتیکه اندازه ضربه (قدرت ضربه) واحد باشد، پاسخ به دست آمده تبیین پاسخ ضربه

واحد نامیده شده و عبارت است از:

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\omega_n \xi t} \sin \omega_d t$$

در صورتیکه ضربه در زمان $t = \xi$ اعمال شود، مانند آنست که هر جا تغییر زمان داریم آن را به

$t - \xi$ منتقل کنیم یعنی:

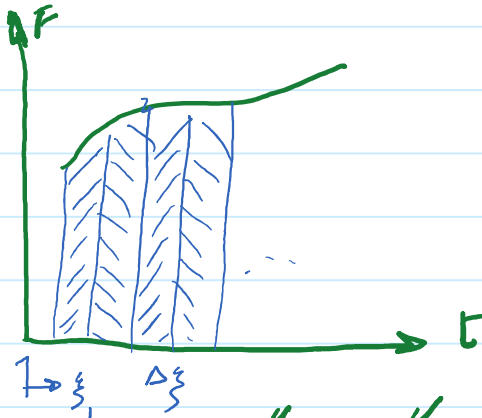
$$h(t - \xi) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\omega_n \xi (t - \xi)} \sin \omega_d (t - \xi)$$

عبارت بالا پاسخ تابع ضربه واحد در زمان $t = \xi$ است. در صورتیکه پاسخ را در ضربه ای

با قدرت $F = F(\xi)$ تکویم گان می‌کنیم، این مقدار را در $h(t - \xi)$ ضربه کنیم.

حال اگر برابر تمام ضربه‌ها مطابق اصل جمع آثار، این پاسخها را با هم جمع کنیم پاسخ به

تابع دلخواه $F(t)$ به دست می‌آید بالست:



$$x(t) = h(t - \xi_1) F(\xi_1) \Delta \xi + h(t - \xi_2) F(\xi_2) \Delta \xi + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^n h(t - \xi_i) F(\xi_i) \Delta \xi$$

در صورتیکه $n \rightarrow \infty$ به سمت بی‌نهایت میل کند یعنی $\Delta \xi \rightarrow d\xi$ ، عبارات گویا به انتگرال تبدیل می‌شوند

$$x(t) = \int_0^t h(t - \xi) F(\xi) d\xi = \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t F(\xi) e^{-\omega_n \xi (t - \xi)} \sin \omega_d (t - \xi) d\xi$$

این رابطه بیان می‌دارد که پاسخ سیستم خطی به تابع دلخواه حاصل ضربه واحد و تحریف است و

تبیین آن در Integral (Convolution, superposition, Duhamel) معروف است.

در صورتیکه مجرای هم فرکانس اولیه را نیز در نظر نمانیم:

$$x(t) = e^{-\omega_n \xi t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) + \int_0^t F(\xi) h(t-\xi) d\xi$$

برای تعیین ثابت آوردن B_1 و B_2 از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases}$$

با تعیین ثابت مقدار x را در لحظه صفر می‌کنیم. آنگاه اگر $t=0$ قرار دهیم

عدد باید اشتغال مندر شده، حذف می‌گردد. بنابراین ثابت آوردن B_1 و B_2 عبارتند

علاوه بر این صورت می‌گیرند یعنی:

$$x(0) = x_0 \Rightarrow B_1 = x_0$$

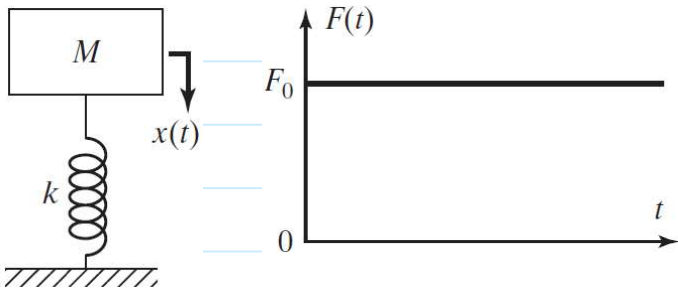
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Rightarrow B_2 = \frac{\dot{x}_0 + \omega_n \xi x_0}{\omega_d}$$

پس پاسخ نهایی عبارت است از:

$$x(t) = e^{-\omega_n \xi t} \left(x_0 \cos \omega_d t + \frac{\dot{x}_0 + \omega_n \xi x_0}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) + \frac{1}{m \omega_d} \int_0^t F(\xi) e^{-\omega_n \xi (t-\xi)} \sin \omega_d (t-\xi) d\xi$$

در ادامه چند مثال حل می‌گردد.

مثال: مطلوب است تعیین تابع جابجایی
 مکرر: در یک سیستم به تابع پله (Step)
 در صورت عدم ضربه ابتدایی



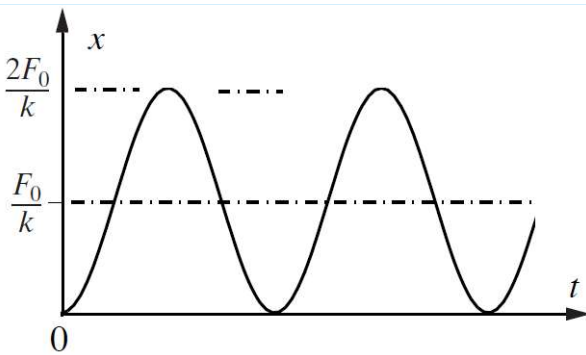
$$h = \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n t$$

هرچنین $F(t) = F_0$ متناظر با شرایط اولیه صفر

$$x(t) = \int_0^t F_0 \frac{1}{m\omega_n} \sin \omega_n (t-\xi) d\xi = \frac{F_0}{m\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n (t-\xi) d[\omega_n(t-\xi)]$$

$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2} [-\cos \omega_n (t-\xi)]_0^t = \frac{F_0}{m\omega_n^2} [\cos \omega_n (t-\xi) - \cos \omega_n (t-0)]$$

$$= \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$



پایخ نشان می دهد که پاسخ سیستم از صفر شروع شده
 و در $\omega_n t = \frac{\pi}{2}$ به $\frac{F_0}{k}$ یعنی پاسخ است. شیب در آن
 در ادامه در $\omega_n t = \pi$ به $\frac{2F_0}{k}$ می رسد و در
 ادامه به نوسان با دامنه $\frac{2F_0}{k}$ ادامه می دهد.

در مثال فوق نبرد F_0 در لحظه صفر به سیستم وارد شده و در برخی آن تغییر می دهد و به حالت پایداری می رسد
 که در برخی سیستم قرار گیرد دیده می شود که پاسخ در ابتدا دو برابر پاسخ است. شیب خواهد بود.

$$m\ddot{x} + kx = F_0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$$

در صورتی که ارتعاشات آزاد با شرایط اولیه

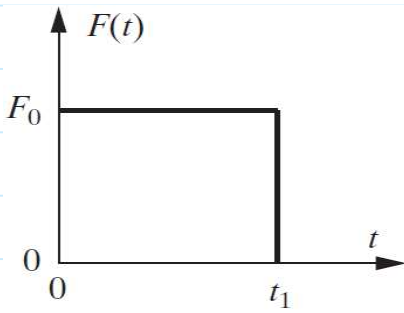
$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t + \frac{F_0}{k}$$

صفر را حل می کردیم به همین جواب می رسیدیم.

$$x(0) = 0 = A \cos 0 + B \sin 0 + \frac{F_0}{k} \Rightarrow A = -\frac{F_0}{k}$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A \sin 0 + \omega_n B \cos 0 = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$

مثال: سیستم مگدیر به آزار قبلی را به نیروی تحرک پهن بزرگ در نظر گرفته و پاسخ را به دست آورید.



این سنده مانند حالتی است که جسم را از زمان t_1 تا t_2 تسخیر را بر روی

سطح سیستم قرار داده و پس از t_1 برداریم. پاسخ را می‌توانیم برای دو حالت $t < t_1$ و $t > t_1$ به دست آوریم

اگر $t < t_1$ باشد، مانند حالت قبل خواهد بود یعنی

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \int_0^t F_0 \sin \omega_n(t-\xi) d\xi$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t)$$

اگر $t > t_1$ باشد، به روشی برابر حل وجود دارد:

۱- استفاده از روش معادل استاندارد گیری:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_n} \left[\int_0^{t_1} F_0 \sin \omega_n(t-\xi) d\xi + \int_{t_1}^t 0 d\xi \right]$$

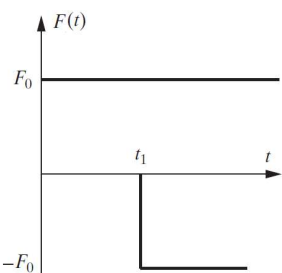
$$= \frac{F_0}{m\omega_n^2} \left[\cos \omega_n(t-\xi) \right]_0^{t_1} = \frac{F_0}{k} \left[\cos \omega_n(t-t_1) - \cos \omega_n(t-0) \right]$$

$$x(t) = \frac{F_0}{k} \left[\cos \omega_n(t-t_1) + \cos \omega_n t \right]$$

۲- استفاده از در تابع پله‌ای: اگر در ابتدا را به دست آوریم در نظر بگیریم، آن را می‌توان به خنرم

در آوریم:

$$x(t) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t) - \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n(t-t_1))$$



این بدان معنی است که پاسخ حاصل دو تحرک پله‌ای داده دارد است که یکی از صفر به مقدار F_0 و دیگری از t_1 با مقدار $-F_0$ شروع می‌شوند.

۳. بعد از t_1 نیروی بر سیستم وارد شده و ارتعاشات آزاد فراموش می‌شوند. بنابراین
 پاسخ ارتعاشات آزاد عبارت است از:

$$x(t) = A \cos \omega_n (t - t_1) + B \sin \omega_n (t - t_1)$$

شرایط اولیه این ارتعاشات، جایگاه و سرعت در t_1 یعنی آخرین لحظه که نیرو اعمال می‌شود است.

لذا پاسخ قسمت اول این‌ها به صورت زیر است:

$$x(t_1) = \frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t_1)$$

$$\dot{x}(t_1) = \frac{F_0}{k} \omega_n \sin \omega_n t_1$$

$$x(t_1) = A \cos 0 + B \sin 0 \Rightarrow A = x(t_1)$$

$$\dot{x}(t_1) = -\omega_n A \sin 0 + \omega_n B \cos 0 \Rightarrow B = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_n}$$

لذا جایگزین این‌ها در $x(t)$ همان پاسخ قبلی می‌شود.

اگر از این‌ها مقدار A و B استخراج کردیم.

$$x(t) = x(t_1) \cos \omega_n (t - t_1) + \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_n} \sin \omega_n (t - t_1)$$

دامنه پاسخ عبارت است از:

$$X = \sqrt{x(t_1)^2 + \left(\frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{F_0}{k} (1 - \cos \omega_n t_1)\right)^2 + \left(\frac{F_0}{k} \sin \omega_n t_1\right)^2}$$

\swarrow $1 + \cos^2 \omega_n t_1 - 2 \cos \omega_n t_1$ \downarrow $\sin^2 \omega_n t_1$

$$X = \frac{F_0}{k} \sqrt{2(1 - \cos \omega_n t_1)} = \frac{F_0}{k} \sqrt{2 \left(2 \sin^2 \frac{\omega_n t_1}{2}\right)} = \frac{2F_0}{k} \sin \frac{\omega_n t_1}{2}$$

$$X = \frac{2F_0}{k} \sin \frac{\pi t_1}{\tau} \quad \text{و باید صبر: } \omega_n = \frac{2\pi}{\tau}$$

دیده می‌شود که اگر $t_1 = \frac{\tau}{2}$ باشد، $X = \frac{2F_0}{k}$ خواهد بود.

اگر $t_1 = \tau$ باشد، $X = 0$ خواهد بود، زیرا در این لحظه جایی که سیستم هنوز برده و حرکت آن نیز صفر است.