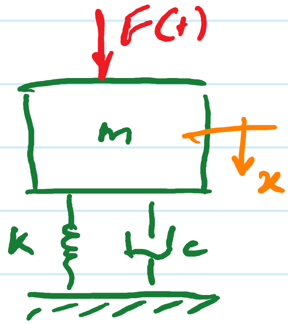
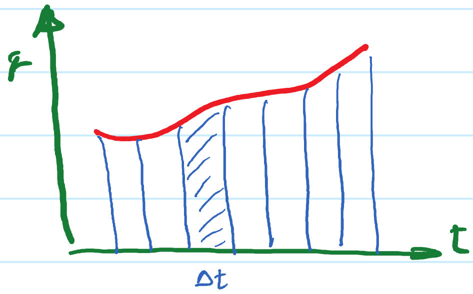
پاسخ به نیروی دلخواه General Forced Response

تا الان پاسخ یک سیستم تک درجه آزادی را به توابع هارمونیک و پریودیک بدست آوردیم. در اینجا به دنبال پاسخ سیستم به تابع دلخواه هستیم. این تابع دلخواه می‌تواند هر تابعی، حتی توابع هارمونیک باشد.



سیستم تک درجه آزادی مقابل را که تحت اثر بار $F(t)$ قرار دارد در نظر بگیرید. از نوشتن قانون دوم نیوتن برای آن خواهیم داشت:

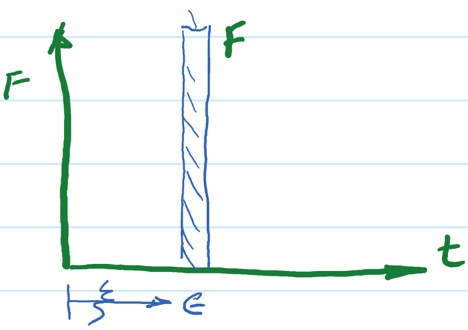
روش حل برای این معادله، حل معادله دیفرانسیل همگن و خصوصی است.



در صورتیکه تابع F تابع دلخواهی مطابق شکل باشد، برای حل می‌توان آن را به تعدادی ناحیه تقسیم کرد و هر کدام را به عنوان یک پالس در نظر گرفته، پاسخ سیستم را نسبت به آن بدست آورده و سپس با استفاده از اصل برهم نهی با هم جمع نمود.

اما ابتدا می‌بایست پاسخ سیستم بالا را به یک پالس بدست آورد. در صورتیکه مدت زمان Δt کوتاه گردد به نیروی آن یا تابع آن، تابع ضربه (Impulse) گویند.

پاسخ ضربه Impulse Response



در اینجا یک پالس با ضربه واحد دیده می‌شود که مدت زمان اثر آن ε است

هر چه ε به سمت صفر تیزتر میل کند، فرم تابع به صورت ضربه کامل‌تر است. نیروی متوسط ضربه به صورت زیر است:

$$F = \frac{\hat{F}}{\varepsilon} = \hat{F}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

ضربه عبارت است از:

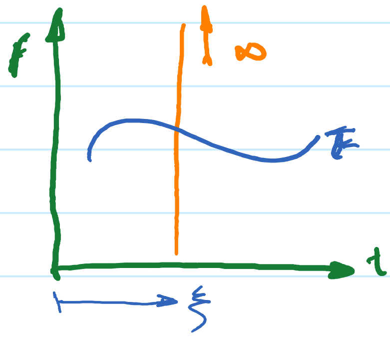
$$\hat{F} = \int_0^{\epsilon} F\,dt$$

که سطح زیر منحنی نیرو-زمان است.

دیده می‌شود که هرچه ϵ کمتر باشد مقدار F به سمت زیاد شدن می‌رود. ضربه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{F} = \int_0^{\epsilon} F\,dt = \frac{\hat{F}}{\epsilon}\,\epsilon = \hat{F}\left(\frac{1}{\epsilon}\right)\epsilon$$

رفتار تابع ضربه را می‌توان از روی تابع دلتای دیراک (Dirac Delta Function) به دست آورد.



ضابطه این تابع عبارت است از:

$$\delta(t-\xi) = \begin{cases} 0 & t \neq \xi \\ \infty & t = \xi \end{cases}$$

این تابع دارای دو خاصیت است:

۱.
$$\int_0^{\infty} \delta(t-\xi)\,dt = 1$$

که معادل است با:
$$\frac{1}{\epsilon}\,\epsilon = 1$$

$\epsilon \rightarrow$

تابع δ را می‌توان مانند $\frac{1}{\epsilon}$ گرفت که ϵ در حال کم شدن و به سمت صفر رفتن است که در $t=\xi$ دامنه آن به سمت بی‌نهایت می‌رود. این تابع در همه نقاط انتگرال‌گیری صفر است الا در $t=\xi$. طول هم مانند ϵ است که حاصل انتگرال یک می‌گردد.

۲.
$$\int_0^{\infty} F(t)\,\delta(t-\xi)\,dt = F(\xi)$$

حاصل ضرب تابع F در تابع δ در همه نقاط برابر صفر است زیرا $\delta = 0$، الا در $t=\xi$ که

$$F(\xi)\,\frac{1}{\epsilon}\,\epsilon = F(\xi)$$

بنابراین اگر ضربه‌ای با قدرت (دامنه) $\hat{F}$ اثر کند می‌توان نوشت:

$$F = \frac{\hat{F}}{\epsilon} = \hat{F}\,\frac{1}{\epsilon} = \hat{F}\,\delta$$

حال پاسخ سیستم را به فرم زیر به دست می‌آوریم:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \hat{F}\,\delta(t-\xi)$$

با شرایط اولیه $x(0)=x_0 ,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0$

- فعلاً $\xi = 0$ قرار می‌دهیم. در ادامه آن را اصلاح می‌کنیم

- فعلاً شرایط اولیه صفر در نظر گرفته، در ادامه آن را اصلاح می‌کنیم.

همچنین این شرایط صفر را به صورت: $x(0^-)=0 \ ,\ \dot{x}(0^-)=0$

بیان کرده که یعنی دقیقاً قبل از اعمال بار است.

برای حل معادله بالا و به دست آوردن جواب خصوصی، به دلیل شکل بودن تابع δ، اثر اعمال آن را به دست می‌آوریم. برای این کار دو طرف را در dt ضرب کرده و بر روی مدت زمان اثر بار یعنی ϵ که در حال کم شدن است انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\epsilon}(m\ddot{x}+c\dot{x}+kx)\,dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\epsilon}\hat{F}\,\delta(t)\,dt$$

حال انتگرال‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\epsilon} m\ddot{x}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0} m\dot{x}\Big|_0^{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} m\left(\dot{x}(\epsilon)-\dot{x}(0^-)\right) = m\dot{x}(0^+)$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{\epsilon} c\dot{x}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0} cx\Big|_0^{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0} c\left(x(\epsilon)-x(0^-)\right) = c\,x(0^+) = 0$$

در اینجا به علت زمان خیلی ناچیز، جسم فرصت جابجا شدن را پیدا نخواهد کرد.

$$\int_0^{\epsilon} kx\,dt = k x_{av}\,\epsilon = 0 \qquad (\epsilon \to 0)$$

به علت بازه خیلی کوتاه، x را به صورت مقدار متوسط در انتگرال گرفتیم که ثابت است.

همچنین انتگرال سمت راست عبارت است از:

$$\int_0^{\epsilon} \hat{F}\delta(t)\,dt = \hat{F} \qquad (\epsilon \to 0)$$

بنابراین تساوی دو طرف رابطه:

$$m\dot{x}(0^+) = \hat{F} \Rightarrow \dot{x}(0^+) = \frac{\hat{F}}{m}$$

این رابطه نشان می‌دهد که اثر ضربه بر روی سیستم، تغییر مومنتم آن یا سرعت جسم است.

حال برای حل چنین در نظر می‌گیریم که سیستم به جای ارتعاشات اجباری با تحریک $F(t)=\hat{F}\delta(t)$ و شرایط اولیه صفر، یک سیستم آزاد با شرایط زیر باشد:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$x(0) = x(0^+) = 0 \quad , \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(0^+) = \frac{\hat{F}}{m}$$

اما حل این معادله را در ابتدای ترم خواندیم:

$$x(t) = A e^{-\omega_n \zeta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

برای بدست آوردن ضرائب A و φ از شرایط اولیه استفاده می‌شود:

$$x(0^+) = 0 \rightarrow A \cancel{e^{0}} \sin(0+\varphi) = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n \zeta A e^{-\omega_n \zeta t} \sin\omega_d t + A\omega_d e^{-\omega_n \zeta t} \cos\omega_d t$$

$$\dot{x}(0^+) = -\omega_n \zeta A \cancel{e^{0}} \cancel{\sin 0} + A\omega_d \cancel{e^{0}} \cancel{\cos 0} = \frac{\hat{F}}{m} \Rightarrow A = \frac{\hat{F}}{m\omega_d}$$

در نتیجه:

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_d} e^{-\omega_n \zeta t} \sin\omega_d t$$

این پاسخ سیستم به ضربه‌ای با اندازه $\hat{F}$ در لحظه صفر است.

درصورتیکه اندازه ضربه (قدرت ضربه) واحد باشد، پاسخ به دست آمده تحت عنوان پاسخ ضربه واحد نامیده شده و عبارت است از:

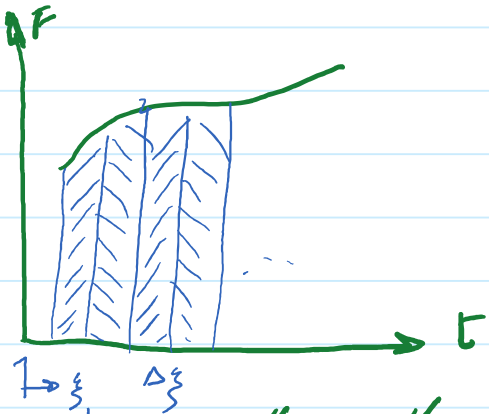
$$h(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\omega_n\xi t}\sin\omega_d t$$

درصورتیکه ضربه در زمان $t=\xi$ اعمال شود، کافی است هر جا متغیر زمان داریم آن را به $t-\xi$ منتقل کنیم یعنی:

$$h(t-\xi)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\omega_n\xi(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)$$

عبارت بالا پاسخ تابع ضربه واحد در زمان $t=\xi$ است. درصورتیکه پاسخ را برای ضربه‌ای با قدرت $\hat{F}=F(\xi)\Delta\xi$ بخواهیم کافی است این مقدار را در $h(t-\xi)$ ضرب کنیم.

حال اگر برای تمامی ضربه‌ها مطابق اصل جمع آثار، این پاسخها را با هم جمع کنیم پاسخ به تابع دلخواه $F(t)$ به دست می‌آید یعنی:



$$x(t)=h(t-\xi_1)F(\xi_1)\Delta\xi+h(t-\xi_2)F(\xi_2)\Delta\xi+\dots$$

$$=\sum_{i=1}^{n}h(t-\xi_i)F(\xi_i)\Delta\xi$$

درصورتیکه n به سمت بی‌نهایت میل کند یعنی $\Delta\xi\to d\xi$، علامت سیگما به انتگرال تبدیل می‌شود:

$$x(t)=\int_0^t h(t-\xi)F(\xi)\,d\xi=\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\xi)e^{-\omega_n\xi(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)\,d\xi$$

این رابطه بیان می‌دارد که پاسخ یک سیستم خطی به تابع دلخواه حاصل ضرب پاسخ ضربه واحد و تحریک است و تحت نام (Convolution, superposition, Duhamel) Integral معروف است.

در صورتیکه بخواهیم شرایط اولیه را نیز منظور نمائیم:

$$x(t)=e^{-\omega_n\xi t}(B_1\cos\omega_d t+B_2\sin\omega_d t)+\int_0^t F(\xi)h(t-\xi)d\xi$$

برای ثابت آوردن B_1 و B_2 از شرایط اولیه استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0 \end{cases}$$

برای تعیین ضرائب مجهول مقدار x را در نقطه صفر حساب می‌کنیم. اما اگر $t=0$ قرار دهیم

حد بالای انتگرال صفر شده و حذف می‌گردد. بنابراین ثابت آوردن B_1 و B_2 عیناً

مانند حالت قبل صورت می‌گیرد یعنی:

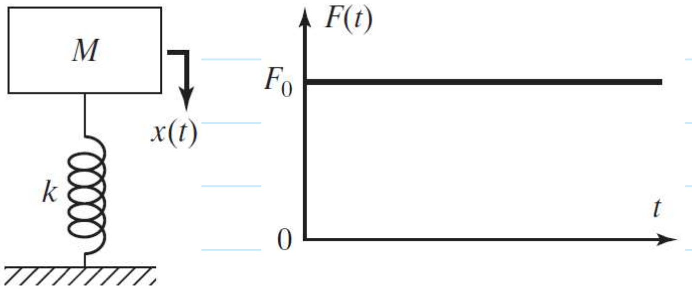
$$x(0)=x_0 \Rightarrow B_1=x_0$$

$$\dot{x}(0)=\dot{x}_0 \Rightarrow B_2=\frac{\dot{x}_0+\omega_n\xi x_0}{\omega_d}$$

پس پاسخ نهایی عبارت است از:

$$x(t)=e^{-\omega_n\xi t}\left(x_0\cos\omega_d t+\frac{\dot{x}_0+\omega_n\xi x_0}{\omega_d}\sin\omega_d t\right)+\frac{1}{m\omega_d}\int_0^t F(\xi)e^{-\omega_n\xi(t-\xi)}\sin\omega_d(t-\xi)d\xi$$

در ادامه چند مثال حل می‌گردد.



مثال: مطلوب است تعیین پاسخ سیستم شکل زیر به یک نیروی تابع پله‌ای (Step) در صورت عدم حضور استهلاک

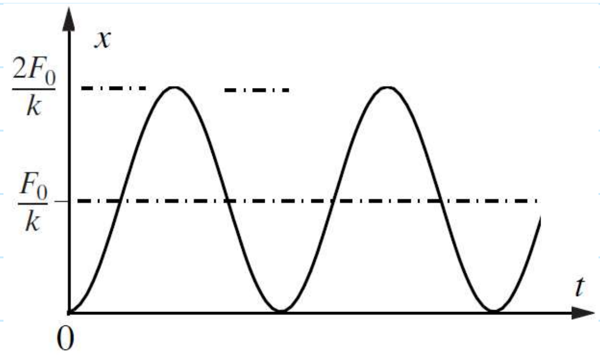
$$h = \frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n t$$

همچنین $F(t)=F_0$ بنابراین با شرایط اولیه صفر

$$x(t)=\int_0^t F_0\frac{1}{m\omega_n}\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi = \frac{F_0}{m\omega_n}\frac{1}{(-\omega_n)}\int_0^t \sin\omega_n(t-\xi)\,d[\omega_n(t-\xi)]$$

$$= \frac{F_0}{-m\omega_n^2}\Big[-\cos\omega_n(t-\xi)\Big]_0^t = \frac{F_0}{\underbrace{m\omega_n^2}_{k}}\Big[\cos\omega_n(\cancel{t-t}) - \cos\omega_n(t-0)\Big]$$

$$= \frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$



پاسخ نشان می‌دهد که پاسخ سیستم از صفر شروع شده و در $\omega_n t=\frac{\pi}{2}$ به $\frac{F_0}{k}$ یعنی پاسخ استاتیکی می‌رسد. در ادامه در $\omega_n t=\pi$ به $\frac{2F_0}{k}$ می‌رسد و در ادامه به نوسان با دامنه $\frac{2F_0}{k}$ ادامه می‌دهد.

در مثال فوق نیروی F_0 در لحظه صفر به سیستم وارد شده و بر روی آن باقی می‌ماند، درست مانند یک جرم که بر روی سیستم قرار گیرد. دیده می‌شود که پاسخ دینامیکی دو برابر پاسخ استاتیکی خواهد بود.

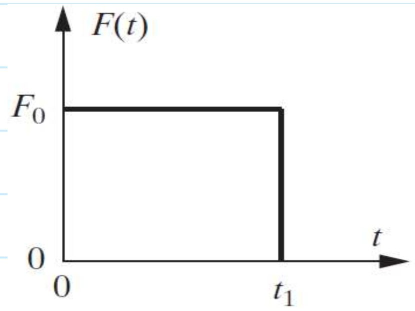
در صورتی که ارتعاشات آزاد با شرایط اولیه صفر را حل می‌کردیم به همین جواب می‌رسیدیم.

$$m\ddot{x}+kx=F_0 \ , \quad x(0)=\dot{x}(0)=0$$

$$x(t)=A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{F_0}{k}$$

$$x(0)=0 = A\cos 0 + B\sin 0 + \frac{F_0}{k} \Rightarrow A=-\frac{F_0}{k}$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_n A\sin 0 + \omega_n B\cos 0 = 0 \Rightarrow B=0 \Rightarrow x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$



مثال: سیستم یک درجه آزادی قبلی را با نیروی تحریک به شکل روبرو
درنظر گرفته و پاسخ را بدست آورید.

این مسئله مانند حالتی است که جسمی دارای وزن مشخص را بر روی
سطح سیستم قرار داده و پس از t_1 برداریم. پاسخ را می‌بایست برای دو حالت $t\le t_1$ و $t>t_1$ بدست آورد

اگر $t<t_1$ باشد، مانند حالت قبلی خواهد بود یعنی

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_n}\int_0^t F_0 \sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)$$

اگر $t>t_1$ باشد، دو روش برای حل وجود دارد:

۱- استفاده از روش معادل انتگرال گیری:

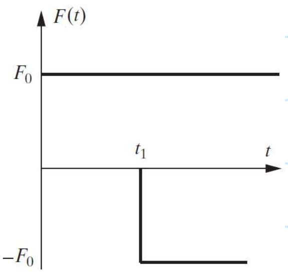
$$x(t)=\frac{1}{m\omega_n}\left[\int_0^{t_1} F_0 \sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi+\int_{t_1}^{t} 0\right]$$

$$=\frac{F_0}{m\omega_n^2}\Big[\cos\omega_n(t-\xi)\Big]_0^{t_1}=\frac{F_0}{k}\Big[\cos\omega_n(t-t_1)-\cos\omega_n(t-0)\Big]$$

$$x(t)=\frac{F_0}{k}\Big[\cos\omega_n(t-t_1)+\cos\omega_n t\Big]$$

۲- استفاده از ترکیب پله‌ای: اگر دو اصل را که بدست آمده درنظر بگیریم، آن را می‌توان به صورت
زیر نوشت:

$$x(t)=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t)-\frac{F_0}{k}\big(1-\cos\omega_n(t-t_1)\big)$$



این بدان معنی است که پاسخ حاصل دو تحریک پله‌ای
ادامه‌دار است که یکی از صفر با مقدار F_0 و دیگری از t_1
با مقدار $-F_0$ شروع می‌شوند.

۳- بعد از t_1 نیرویی بر سیستم وارد نشده و ارتعاشات آزاد خواهیم داشت. بنابراین

پاسخ ارتعاشات آزاد عبارت است از:

$$x(t) = A\cos\omega_n(t-t_1) + B\sin\omega_n(t-t_1)$$

شرایط اولیه این ارتعاشات، جابجایی و سرعت در t_1 یعنی آخرین لحظه‌ای که نیرو عمل می‌کرده است.

از پاسخ قسمت اول این مقادیر عبارتند از:

$$x(t_1) = \frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t_1)$$

$$\dot{x}(t_1) = \frac{F_0}{k}\omega_n \sin\omega_n t_1$$

در نتیجه:

$$x(t_1) = A\cos 0 + B\sin 0 \Rightarrow A = x(t_1)$$

$$\dot{x}(t_1) = -\omega_n A\sin 0 + \omega_n B\cos 0 \Rightarrow B = \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_n}$$

از جایگذاری این نتیجه دیگر در $x(t)$ همان پاسخ قبلی بدست می‌آید.

اگر از این مقادیر برای A و B استفاده گردد.

$$x(t) = x(t_1)\cos\omega_n(t-t_1) + \frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_n}\sin\omega_n(t-t_1)$$

دامنه پاسخ عبارت است از:

$$X = \sqrt{x^2(t_1) + \left(\frac{\dot{x}(t_1)}{\omega_n}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_n t_1)\right)^2 + \left(\frac{F_0}{k}\sin\omega_n t_1\right)^2}$$

$1+\cos^2\omega_n t_1 - 2\cos\omega_n t_1$ $\quad$ $\sin^2\omega_n t_1$

$$X = \frac{F_0}{k}\sqrt{2(1-\cos\omega_n t_1)} = \frac{F_0}{k}\sqrt{2\left(2\sin^2\frac{\omega_n t_1}{2}\right)} = \frac{2F_0}{k}\sin\frac{\omega_n t_1}{2}$$

و با توجه به: $\omega_n = \frac{2\pi}{\tau}$

$$X = \frac{2F_0}{k}\sin\frac{\pi t_1}{\tau}$$

دیده می‌شود که اگر $t_1 = \frac{\tau}{2}$ باشد $X = \frac{2F_0}{k}$ خواهد بود

اگر $t_1 = \tau$ باشد $X = 0$ خواهد شد، زیرا در این لحظه جابجایی سیستم صفر بوده و سرعت آن نیز صفر است.