ارتعاشات اجباری ناشی از تحریک غیرهارمونیک Nonharmonic Excitation

در سیستمهای مکانیکی بهترین عامل ارتعاشات اجباری، نیروهای هارمونیک می‌باشند. در این صورت همانطور که ملاحظه شد پاسخ به صورت ترکیب دو جواب گذرا و پایدار بدست آمد.

در خیلی از سیستمها نیروی محرک بصورت متغیر با زمان بوده و هارمونیک نمی‌باشند.

در اینجا ابتدا تحریکهای تکرار شونده (Periodic) را بررسی کرده و سپس تحریکهای غیر پریودیک بررسی می‌گردد.

تحریک پریودیک Periodic Excitation

توابع پریودیک توابعی هستند که در پریودهایی از زمان تکرار می‌شوند. لزومی ندارد که شکل آنها هارمونی و منظم زیبایی مانند توابع هارمونیک داشته باشد.

در صورتیکه $F(t)$ تابعی پریودیک از زمان با پریود τ باشد، با استفاده از سری فوریه (Fourier Series) می‌توان آن را به صورت یک سری با بی‌نهایت جمله نوشت:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

از ضرب دو طرف در $\cos m\omega t$ و انتگرال گیری بر روی پریود τ خواهیم داشت:

$$\int_0^{\tau} F(t) \cos m\omega t\, dt = \int_0^{\tau} \frac{a_0}{2} \cos m\omega t\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\tau} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \cos m\omega t\, dt$$

با توجه به خاصیت عمود بودن (Orthogonality) توابع هارمونیک:

$$\int_0^{\tau} \cos n\omega t \cos m\omega t\, dt = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\tau}{2} & n = m \end{cases}$$

همین روال برای Sin نیز برقرار است. در نتیجه:

$$\int_0^{\tau} F(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{a_n}{2}\tau \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos n\omega t\,dt$$

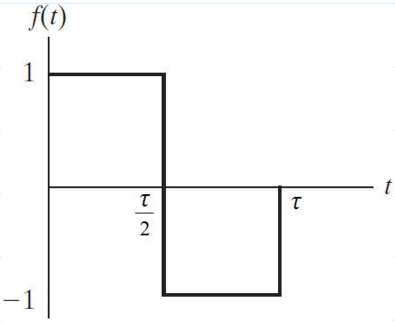
و:

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\,dt$$

و:

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\sin n\omega t\,dt$$

برای مثال فرض کنید که تابع پریودیک بشکل زیر که تابع موج مربعی است موجود است. درصورتیکه بخواهیم



سری فوریه آن را بخواهیم:

$$F(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \le \tau/2 \\ -1 & \frac{\tau}{2} < t \le \tau \end{cases}$$

ضرائب مربوطه را می‌توان از روابط بالا محاسبه کرد:

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\,dt = \frac{2}{\tau}\left[\int_0^{\tau/2}(1)\,dt + \int_{\tau/2}^{\tau}(-1)\,dt\right] = \frac{2}{\tau}\left[\left(\frac{\tau}{2}-0\right) - \left(\tau - \frac{\tau}{2}\right)\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos n\omega t\,dt = \frac{2}{\tau}\left[\int_0^{\tau/2}\cos n\omega t\,dt - \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\cos n\omega t\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\tau}\left[\frac{1}{n\omega}\left[\sin n\omega t\right]_0^{\tau/2 \to \frac{\pi}{\omega}} - \frac{1}{n\omega}\left[\sin n\omega t\right]_{\tau/2}^{\tau}\right] \qquad \omega = \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{\omega}$$

$$= \frac{2}{\tau}\left(\frac{1}{n\omega}\right)\left[\left(\overset{0}{\cancel{\sin n\omega \frac{\pi}{\omega}}} - \cancel{\sin 0}\right) - \left(\overset{0}{\cancel{\sin n\omega\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)}} - \cancel{\sin n\omega \frac{\pi}{\omega}}\right)\right] = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2}{\tau}\left[\int_0^{\tau/2}\sin n\omega t\,dt - \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau}\sin n\omega t\,dt\right]$$

$$= -\frac{2}{\tau}\left(\overset{\tau/2\pi}{\frac{1}{n\omega}}\right)\left[\cos \frac{2\pi n}{\tau}t\,\Big|_0^{\tau/2} - \cos \frac{2\pi n}{\tau}t\,\Big|_{\tau/2}^{\tau}\right]$$

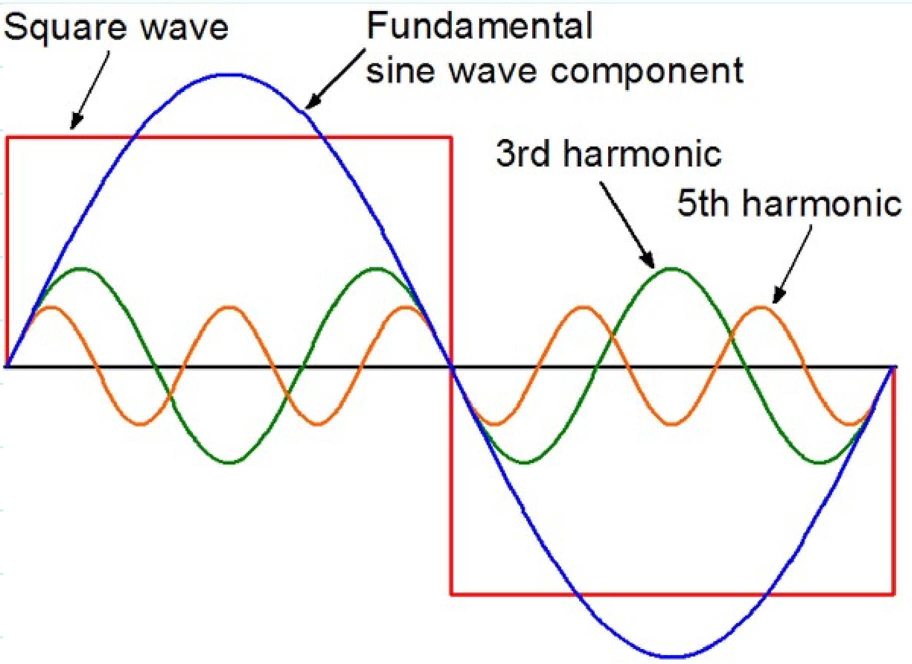
$$= -\frac{1}{n\pi}\left[\left(\cos n\pi - \overset{1}{\cancel{\cos 0}}\right) - \left(\overset{1}{\cancel{\cos 2n\pi}} - \cos n\pi\right)\right] = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

درنتیجه:

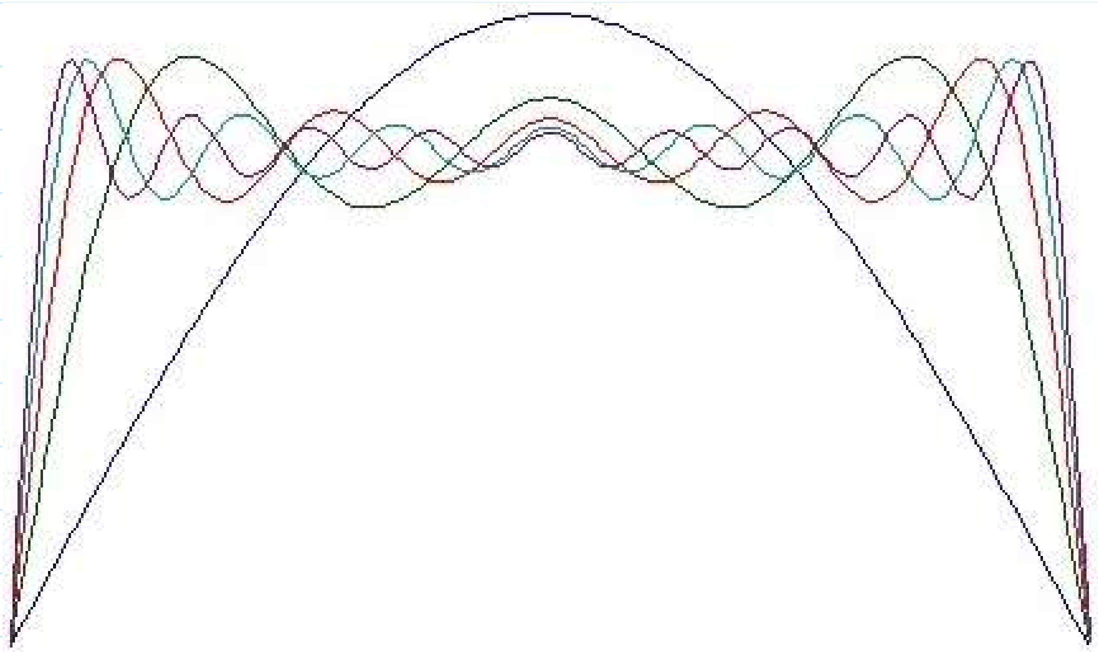
$$F(t)=\frac{4}{\pi}\left[\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\dots\right]$$

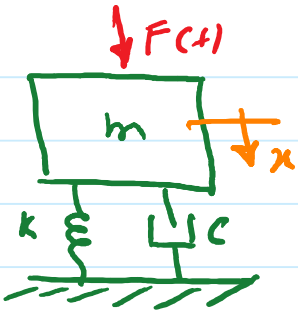
$$F(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{T}t$$

شکل زیر چند هارمونیک اول و حاصل قرار دادن آنها بر روی هم را F را نشان می‌دهد.



شکل زیر ساخت دوباره موج مربعی را با استفاده از ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ هارمونیک اول نشان می‌دهد.





حال سیستم یک درجه آزادی شکل مقابل را که تحت اثر نیروی پریودیک قرار گرفته است را در نظر بگیرید. از نوشتن قانون دوم نیوتن :

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t)$$

با جایگذاری بسط فوریه تابع F :

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right)$$

سمت راست این رابطه مجموع توابع هارمونیک می باشد. به علت خطی بودن سیستم می توان از اصل برهم نهی (Superposition) استفاده کرده و جواب پایدار را به صورت مجموع جواب های پایدار معادلات زیر بدست آورد.

$$m\ddot{x}_n+c\dot{x}_n+kx_n=a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t \qquad n=1,2,\dots,\infty$$

$$x_n=\frac{a_n\cos(n\omega t-\varphi_n)}{\sqrt{(k-(mn^2\omega^2))^2+(cn\omega)^2}}+\frac{b_n\sin(n\omega t-\varphi_n)}{\sqrt{(k-(mn^2\omega^2))^2+(cn\omega)^2}}$$

و

$$\varphi_n=\tan^{-1}\frac{cn\omega}{k-mn^2\omega^2}$$

به این رابطه می بایست پاسخ معادله به ازای $n=0$ که همان تابع $\frac{a_0}{2}$ است را اضافه کرد.

$$m\ddot{x}_0+c\dot{x}_0+kx_0=\frac{a_0}{2}$$

جواب پایدار این معادله همان $x_0=\frac{a_0}{2k}$ می باشد که بنام هارمونیک صفرم معروف است.

بنابراین پاسخ پایدار کلی سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$X(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos(n\omega t-\varphi_n)+b_n\sin(n\omega t-\varphi_n)}{\sqrt{(k-(mn^2\omega^2))^2+(cn\omega)^2}}\ ,\quad \varphi_n=\tan^{-1}\frac{cn\omega}{k-mn^2\omega^2}$$

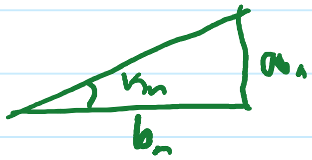
با داشتن $F(t)$ می‌توان ضرائب a_n و b_n را از سری فوریه بدست آورد و سپس در رابطه‌ای که برای جواب پایدار بدست آمد قرار داد. در یک مسئله عملی تنها نیاز به محاسبه تعدادی از این جملات است و بعد از مدتی می‌توان پاسخ را قطع کرد، زیرا با بزرگ شدن n مخرج بزرگ شده و عملاً جملات بالاتر حذف می‌شوند.

رابطه مربوط به ضرائب نیروی F را می‌توان به فرم دیگری نیز نوشت:

$$(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\frac{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}} = c_n\left(\overset{\sin k_n}{\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}}\cos n\omega t + \overset{\cos k_n}{\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}}\sin n\omega t\right)$$

که در آن:

$$c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad , \quad k_n=\tan^{-1}\frac{a_n}{b_n}$$



از جایگذاری:

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = c_n \sin(n\omega t + k_n)$$

و جواب پایدار عبارت است از:

$$x(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n \sin(n\omega t+k_n-\varphi_n)}{\sqrt{(k-(mn^2\omega^2))^2+(cn\omega)^2}}$$

و یا:

$$x(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{c_n}{k}\sin(n\omega t+k_n-\varphi_n)}{\sqrt{(1-r_n^2)^2+(2\xi r_n)^2}} \quad , \quad \varphi_n=\tan^{-1}\frac{2\xi r_n}{1-r_n^2}$$

که در آن:

$$r_n=nr=n\frac{\omega}{\omega_n}$$

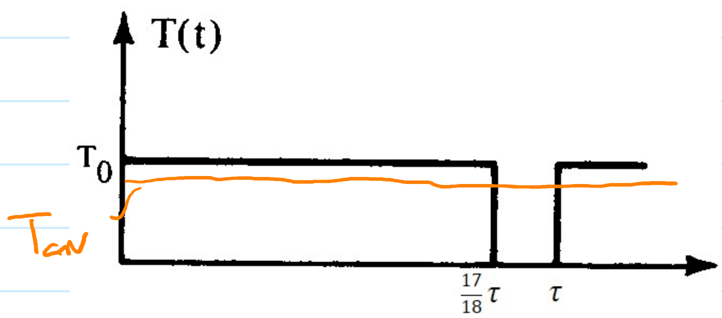
در ادامه به ارائه چند مثال می‌پردازیم.

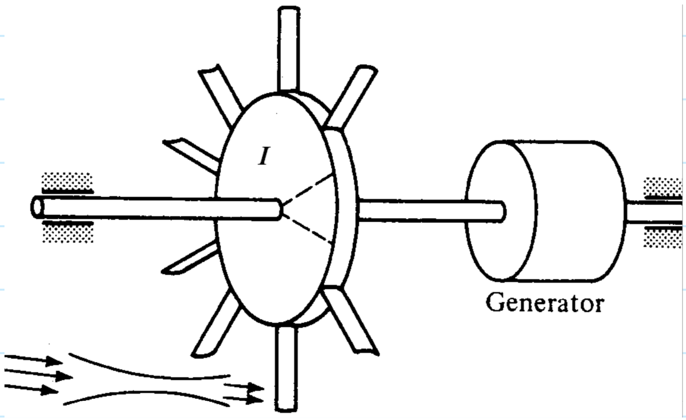
توربین بخار یک ژنراتور الکتریکی سینکرو را می چرخاند. رتور با سرعت ثابت 3600^{rpm} می چرخد. توربین دارای 18 پره است که یکی از آنها از بین رفته است. در صورتیکه قدرت تولیدی یکنواخت تولید شده 611 kw باشد، مطلوبست تعیین:

الف– نوسانات پیچشی پایدار این سیستم.

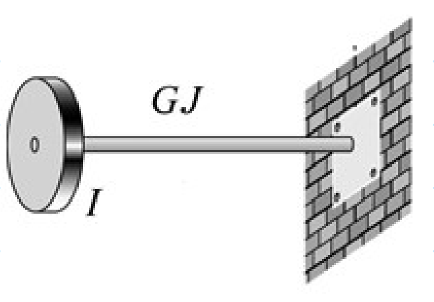
ب –تعیین دامنه هارمونیک های صفر تا سه.

ممان اینرسی جرمی توربین $I=1\ kgm^2$ می باشد. محور از جنس فولاد با $G=1.1\times10^{11}$ Pa، طول 0.64 متر و قطر 5^{cm} است





حرکت دورانی روتور توربین با سرعت ثابت می‌چرخد. در عین حال توربین ارتعاشات پیچشی نیز دارد.
با استفاده از اصل برهم‌نهی می‌توان حرکت کلی را مجموع دوران توربین و ارتعاش مرحله توربین
در حالی که ژنراتور ثابت است در نظر گرفت. برای بررسی ارتعاشات فقط حالت دوم را در نظر
می‌گیریم که می‌توان آن را به صورت شکل مقابل
نشان داد که دیسک نشان داده شده جرم مرحله
توربین است.



همچنین از نمودار گشتاور تولیدی دیده می‌شود که قدرت فقط در طی $\frac{17}{18}$ دوران تولید می‌شود و در طی $\frac{1}{18}$ دوران (عبور از پره شکسته) گشتاور تولید نمی‌شود. بنابراین متوسط گشتاور تولیدی:

$$T_{av}=\frac{P}{\omega}=\frac{611\times10^{3}\ W}{3600\times\frac{2\pi}{60}\ rad/s}=1.62\times10^{3}\ N.m$$

این گشتاور در تولید در یک دور است ولی ما فقط در $\frac{17}{18}$ دور گشتاور داریم، بنابراین گشتاور اصلی برابر است با:

$$T_{av}(\tau) = T_0\left(\frac{17}{18}\tau\right) \Rightarrow T_0 = \frac{18}{17}T_{av} = 1.72\times10^{3}\ N.m$$

برای حل از شکل مدل صفحه قبل دیده می‌شود که از شفت اجباری بدون میرایی خواهیم داشت که معادله دیفرانسیل آن عبارت است از:

$$I\ddot{\theta} + k_t\theta = T(t)$$

که:

$$K_t = \frac{GJ}{l} = \frac{G\frac{\pi d^4}{32}}{l} = 1.07\times10^{5}\ Nm/rad \quad , \quad I = 1\ kg\,m^2$$

برای حل بسط فوریه تابع $T(t)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

$$\omega = 3600\ rpm = 376.8\ rad/s \quad , \quad \tau = \frac{2\pi}{\omega} = 0.0166\ s$$

تابع T شبیه یک موج مربعی می‌باشد و ضرایب a_n و b_n آن عبارت است از:

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} T_0\,dt = \frac{2}{\tau}\left[\int_0^{\frac{17}{18}\tau} T_0\,dt + \int_{\frac{17}{18}\tau}^{\tau}(0)\,dt\right] = \frac{2T_0}{\tau}\left(\frac{17}{18}\tau\right) = 3240\ N.m$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} T_0\cos n\omega t\,dt = \frac{2T_0}{\tau}\int_0^{\frac{17}{18}\tau}\cos n\omega t\,dt = \frac{2}{\tau}T_0\frac{1}{n\omega}\left[\sin n\omega t\right]_0^{\frac{17}{18}\tau}$$

$$= \frac{\cancel{2}T_0}{\cancel{2\pi/\omega}}\frac{1}{n\cancel{\omega}}\left[\sin\left(n\left(\frac{2\pi}{\cancel{\tau}}\right)\left(\frac{17}{18}\cancel{\tau}\right)\right) - \sin 0\right] = \frac{T_0}{\pi n}\sin\frac{17}{9}\pi n$$

$$= \frac{547.5}{n}\sin 5.93n$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} T_0\sin n\omega t\,dt = \frac{2T_0}{\tau}\int_0^{\frac{17}{18}\tau}\sin n\omega t\,dt = -\frac{T_0}{\pi n}\left[\cos\left(n\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)\left(\frac{17}{18}\tau\right)\right) - \cos 0\right]$$

$$= \frac{T_0}{\pi n}\left[1 - \cos\frac{17}{9}\pi n\right] = \frac{547.5}{n}(1 - \cos 5.93n)$$

بنابراین معادله دیفرانسیل بفرم زیر درمی‌آید:

$$I\ddot{\theta} + k_t\theta = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right)$$

پاسخ پایدار هارمونیک nام:

$$\theta_n(t) = \frac{a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t}{k_t - I(n\omega)^2}$$

و پاسخ کلی:

$$\theta(t) = \frac{a_0}{2k_t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{547.5}{n}\left[\sin 5.93n \cos n\omega t + (1-\cos 5.93n)\sin n\omega t\right]}{k_t - I\omega^2 n^2}$$

هارمونیک‌ها عبارتند از:

- هارمونیک صفر (استاتیکی):

$$\theta_0 = \frac{a_0}{2k_t} = 0.0151 \text{ rad}$$

هارمونیک اول:

$$\theta_1 = \left|\frac{\left(\frac{547.5}{1}\right)\left[\sin^2(5.93) + (1-\cos 5.93)^2\right]^{1/2}}{1.07\times10^5 - 1.42\times10^5(1)}\right| = 5.484\times10^{-3} \text{ rad}$$

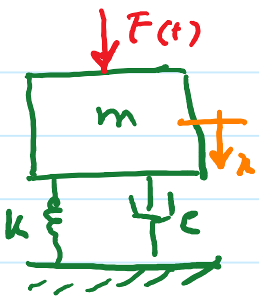
هارمونیک دوم:

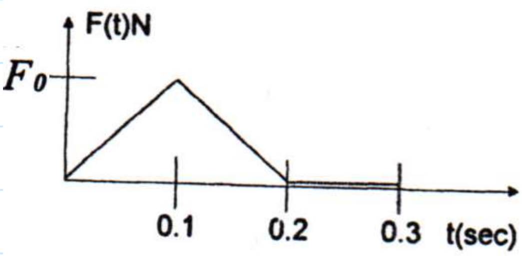
$$\theta_2 = \left|\frac{\left(\frac{547.5}{2}\right)\left[\sin^2(5.93\times2) + (1-\cos(5.93(2)))^2\right]^{1/2}}{1.07\times10^5 - 1.42\times10^5(4)}\right| = 4.097\times10^{-4} \text{ rad}$$

هارمونیک سوم:

$$\theta_3 = 1.571\times10^{-4} \text{ rad}$$

دیده می‌شود که با افزایش n مقدار دامنه هارمونیک‌ها کاهش می‌یابد.





مثال: سیستم یک درجه آزادی شکل مقابل را که تحت اثر نیروی پریودیک به فرم شکل نشان داده شده است در نظر بگیرید.

مطلوبست تعیین پاسخ پایدار سیستم به تحریک هارمونیک در صورتی که مشخصات مسئله عبارت است از:

$$m = 100^{kg}, \quad \omega_n = 40\ rad/s, \quad \xi = 0.2, \quad F_0 = 10000^N$$

تابع تحریک به فرم پریودیک با پریود $\tau = 0.3^s$ است. شکل ریاضی نیروی تحریک برابر است با:

$$F(t) = 10F_0 \begin{cases} t & 0 \le t \le 0.1 \\ -t+0.2 & 0.1 \le t \le 0.2 \\ 0 & 0.2 \le t \le 0.3 \end{cases}$$

ضرائب سری فوریه تابع فوق را پیدا کرده و سپس پاسخ پایدار را محاسبه می‌کنیم:

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)dt = \frac{2}{0.3}\left[\int_0^{0.1} 10F_0 t\, dt + \int_{0.1}^{0.2} 10F_0(-t+0.2)dt + 0\right] = \frac{2F_0}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{2}{0.3}(10F_0)\left[\int_0^{0.1} t\cos n\omega t\, dt + \int_{0.1}^{0.2}(-t+0.2)\cos n\omega t\, dt\right]$$

با توجه به: $\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{0.3} = \frac{20\pi}{3}$

$$a_n = \frac{200F_0}{3}\left[\int_0^{0.1} t\cos\frac{20\pi n}{3}t\, dt + \int_{0.1}^{0.2}(-t+0.2)\cos\frac{20\pi n}{3}t\, dt\right]$$

$$= \frac{3F_0}{2\pi^2 n^2}\left(2\cos\frac{2\pi n}{3} - \cos\frac{4\pi n}{3} - 1\right)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء:

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} F(t)\sin n\omega t\, dt = \frac{200F_0}{3}\left[\int_0^{0.1} t\sin\frac{20\pi n}{3}t\, dt + \int_{0.1}^{0.2}(-t+0.2)\sin\frac{20\pi n}{3}t\, dt\right]$$

$$= \frac{3F_0}{2\pi^2 n^2}\left(2\sin\frac{2\pi n}{3} - \sin\frac{4\pi n}{3}\right)$$

دیده می‌شود که a_n و b_n در مضارب 3 برابر صفر می‌شوند.

در نتیجه:

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{a_n^2+b_n^2}\right)\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\cos n\omega t+\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}\sin n\omega t\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\omega t+\kappa_n)\quad,\ c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\ ,\ \kappa_n=\tan^{-1}\frac{a_n}{b_n}$$

و پاسخ پایدار سیستم:

$$x(t)=\frac{a_0}{2k}+\sum_{n=1}^{\infty}x_n\sin\left(\frac{20\pi n}{3}t+\kappa_n-\varphi_n\right)$$

$$x_n=\frac{c_n/k}{\sqrt{(1-r_n^2)^2+(2\zeta r_n)^2}}=\frac{c_n M}{m\omega_n^2}\ ,\ M=\frac{1}{\sqrt{(1-r_n^2)^2+(0.4r_n)^2}}$$

و

$$r_n=\frac{n\omega}{\omega_n}=\frac{n\left(\frac{2\pi}{T}\right)}{40}=\frac{n\left(\frac{20\pi}{3}\right)}{40}=\frac{\pi n}{6}\ ,\ \varphi_n=\tan\frac{0.4r_n}{1-r_n^2}$$

جدول زیر مقادیر پایدار را برای ده هارمونیک اول می‌دهد.

ℓ	a_ℓ	b_ℓ	c_ℓ	κ_ℓ	r_ℓ	M_ℓ	X_ℓ (mm)	ϕ_ℓ
1	-2279	3948	4559	-.523	.523	1.324	37.7	.281
2	-569	-987	1139	.523	1.05	2.326	16.6	-1.35
3	0	0	0	0	1.57	0.625	0	-.405
4	-142	246	284	-.523	2.09	0.287	0.51	-.242
5	-91	-158	182	.523	2.62	0.168	0.19	-.177
6	0	0	0	0	3.14	0.112	0	-.141
7	-47	80	93	-.523	3.67	.080	.05	-.117
8	-35	-61	71	.523	4.19	0.060	.03	-.101
9	0	0	0	0	4.71	0.047	0	-.089
10	-23	39	45	-.523	5.24	0.038	.01	-.079

هارمونیک صفرم نیز برابر است با:

$$x_0=\frac{a_0}{2k}=\frac{a_0}{2m\omega_n^2}=20.83\ mm$$

همانطور که از جدول بالا دیده می‌شود با افزایش هارمونیک‌ها دامنه پاسخ پایدار هارمونیک‌ها کاسته شد

به نحوی که دامنه هارمونیک دهم به بعد زیر $0.01\,mm$ قرار می‌گیرد.

بنابراین پاسخ کلی پایدار عبارت است از:

$$x(t) = 20.83 + 37.72 \sin\left(\frac{20\pi}{3}t + -0.804\right)$$

$$+ 16.57 \sin\left(\frac{40\pi}{3}t + 1.867\right) + \cdots$$

$$+ 0.51 \sin\left(\frac{80\pi}{3}t - 0.281\right) + \cdots$$