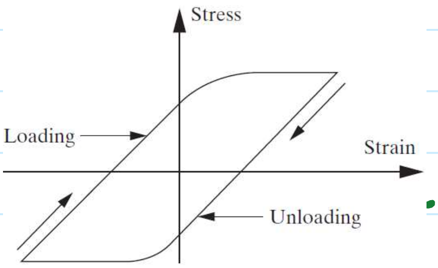
استهلاک سازه‌ای Structural Damping

یکی دیگر از انواع استهلاک‌های پرکاربرد مربوط به استهلاک سازه‌ای که بشکل‌های داخلی (Internal)، مواد (Material) و جامد (Solid) معروف است می‌باشد.

این نوع استهلاک مربوط به لغزش پلاستیک و حرکت نابجایی‌ها تحت بارهای متناوب می‌باشد که تحت این بارها ایجاد منحنی تنش-کرنش هیسترزیس می‌کند. سطح این منحنی‌ها مقدار انرژی از دست رفته در هر سیکل را می‌دهد.

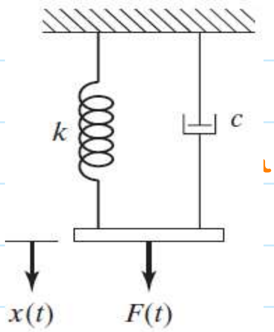


برای بررسی و مدل‌سازی این استهلاک دو مدل پیشنهاد شده:

الف- مدل ویسکوالاستیک خطی Linear Visco-Elastic Model

ب- مدل هیسترتیک غیرخطی Nonlinear Hysteretic Model

الف - مدل ویسکوالاستیک خطی



این مدل بصورت ترکیب یک فنر و یک دمپر مانند شکل مقابل است.

انرژی تلف شده توسط این سیستم همان انرژی تلف شده توسط دمپر و برابر است با

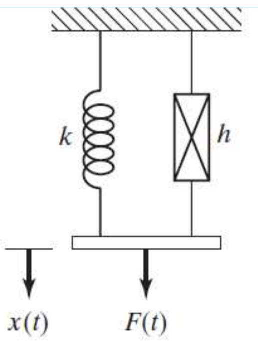
$$E = \pi c \omega x_0^2$$

همانطور که دیده می‌شود این انرژی تابعی از فرکانس است.

اما نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که استهلاک داخلی تابعی از فرکانس نیست.

بنابراین این مدل جوابگوی استهلاک داخلی نمی‌باشد.

ب - مدل هیسترتیک غیرخطی



شکل این مدل در روبرو نشان داده شده است.

در این مدل نیروی دمپر مستقیماً متناسب با سرعت و معکوساً متناسب با فرکانس است

به علاوه از یک فنر برای نشان دادن اثر الاستیک استفاده می‌شود.

دمپر نمایش داده شده به صورت زیر متناسب است:

$$F_d \propto \frac{\dot{x}}{\omega}$$

$$\Rightarrow F_d = h\frac{\dot{x}}{\omega}$$

h ضریب استهلاک هیسترتیک نامیده می‌شود

Coefficient of hysteretic Damping

نیروی منتقل شده عبارت است از:

$$F_t = kx + \frac{h}{\omega}\dot{x}$$

انرژی تلف شده در هر سیکل برابر است با:

$$E_D = \int_{x_1}^{x_2} F_d \, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} F_d \dot{x} \, d\omega t = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} \left(\frac{h}{\omega}\dot{x}\right)\dot{x} \, d\omega t$$

$$E_D = \pi h x_0^2$$

از این رابطه دیده می‌شود که انرژی تلف شده ارتباطی با فرکانس ندارد، که این امر با نتایج تجربی مطابقت دارد. بنابراین در ادامه از این مدل استفاده می‌شود.

با فرض حرکت هارمونیک:

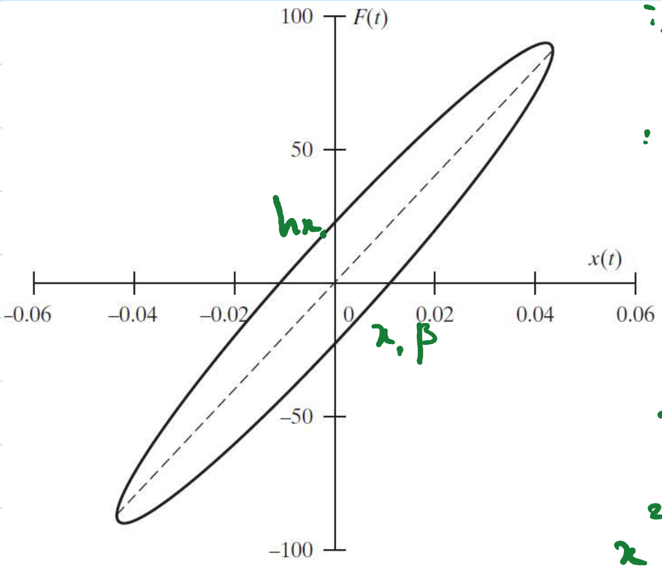
$$x = x_0 \sin(\omega t - \alpha) \quad , \quad \dot{x} = \omega x_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

همچنین

$$F_t = kx + \frac{h}{\omega}\dot{x} \Rightarrow \frac{F_t - kx}{h} = \frac{\dot{x}}{\omega} = x_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{F_t - kx}{h x_0} = \cos(\omega t - \alpha) \\ \frac{x}{x_0} = \sin(\omega t - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{F_t - kx}{h x_0}\right)^2 = 1$$

که نشان دهنده یک بیضی در صفحه نیرو جابجایی $(F_t - x)$ می‌باشد.



نقاط تقاطع بیضی با محورها را می‌توان بدست آورد:

از قرار دادن $F_t=0$ نقطه تقاطع با محور افقی بدست می‌آید:

$$F_t=0 \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\left(\frac{0-kx}{hx_0}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow x^2=\left(1+\frac{k^2}{h^2}\right)=x_0^2 \Rightarrow x^2=\frac{h^2x_0^2}{h^2+k^2}$$

$$x^2=\frac{x_0^2h^2}{k^2}\left(1+\frac{h^2}{k^2}\right)^{-1}$$

از قرار دادن $h=\beta k$ که β به نام فاکتور تلفات هیسترتیک (Hysteretic Loss Factor) خوانده می‌شود:

$$x^2=x_0^2\beta^2(1+\beta^2)^{-1} \Rightarrow x=\pm x_0\beta\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

از آنجا که h در مقابل k خیلی کمتر است β^2 خیلی کوچک بوده و از صرفنظر کردن از آن در مقابل ۱ خواهیم داشت:

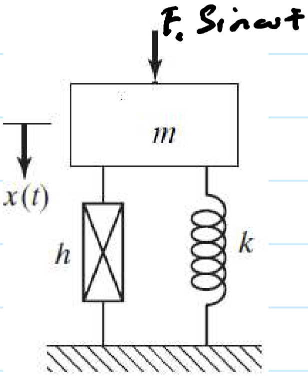
$$x=\pm x_0\beta=\pm x_0\frac{h}{k}$$

از قرار دادن $x=0$ نقطه تقاطع با محور عمودی بدست می‌آید:

$$x=0 \Rightarrow \left(\frac{0}{x_0}\right)^2+\left(\frac{F_t+0}{hx_0}\right)^2=1 \Rightarrow F_t=\pm hx_0$$

سطح بیضی انرژی تلف شده که $\pi h x_0^2$ است را می‌دهد.

اگر این سطح به طریق تجربی محاسبه شود، سپس می‌توان ضریب استهلاک h را از روی نقاط تقاطع بدست آورد:



ارتعاشات اجباری سیستم‌های دارای استهلاک سازه‌ای

در صورتیکه سیستم یک درجه آزادی روبرو که دارای استهلاک سازه‌ای است تحت نیروی تحریک هارمونیک قرار گیرد، معادله دیفرانسیل حرکت آن عبارت است از:

$$m\ddot{x}+\frac{h}{\omega}\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$$

در این صورت دیگر معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت نداریم. برای حل می‌توان از سیستم با میرا کننده ویسکوز معادل استفاده کرده و انرژی تلف شده را در دو سیستم معادل هم قرار داد:

$$\pi c_e \omega x_0^2=\pi h x_0^2 \Rightarrow c_e=\frac{h}{\omega}$$

که h بعنوان ضریب تجربی از شکل حلقه هیسترزیس بدست می‌آید. در نتیجه

$$m\ddot{x}+c_e\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$$

و یا:

$$m\ddot{x}+\frac{h}{\omega}\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$$

پاسخ پایدار عبارت است از:

$$x=X_0\sin(\omega t-\varphi)$$

که در آن:

$$x_0=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c_e\omega)^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\frac{h}{\omega}\omega)^2}}$$

$$x_0=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+h^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{c_e\omega}{k-m\omega^2}=\tan^{-1}\frac{\frac{h}{\omega}\omega}{k-m\omega^2}=\tan^{-1}\frac{h}{k-m\omega^2}$$

همچنین با استفاده از $\zeta_e=\frac{c_e}{2\sqrt{km}}$ و $\beta=\frac{h}{k}$ می‌توان این روابط را نوشت:

$$\xi_e = \frac{c_e}{2\sqrt{km}} = \frac{h}{2\omega\sqrt{km}} = \frac{k\beta}{2\omega\sqrt{km}} = \frac{\beta}{2\omega}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\beta\omega_n}{2\omega} = \beta/2r$$

که $r=\omega/\omega_n$ است. در نتیجه:

$$x_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi_e r)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(\cancel{2}\frac{\beta}{\cancel{2r}}\cancel{r})^2}}$$

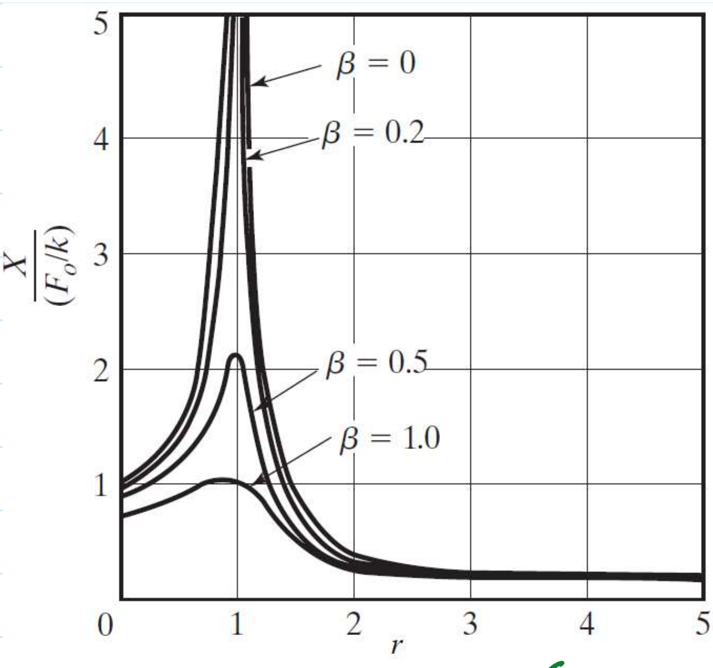
$$x_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}} \Rightarrow M = \frac{x_0}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}}$$

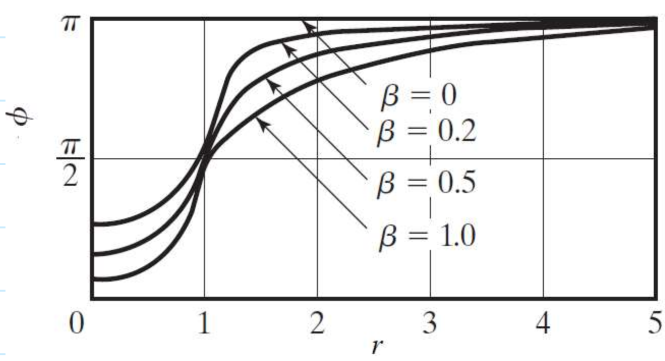
و زاویه تأخیر فاز:

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{c_e\omega}{k-m\omega^2} = \tan^{-1}\frac{2\xi_e r}{1-r^2} = \tan^{-1}\frac{\cancel{2}\frac{\beta}{\cancel{2r}}\cancel{r}}{1-r^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\beta}{1-r^2}$$

پاسخ فرکانسی سیستم و اختلاف فاز در زیر رسم شده است.





در منحنی پاسخ فرکانسی دیده می‌شود که برخلاف استهلاک ویسکوز، در استهلاک سازه‌ای همه منحنی‌ها از یک نقطه شروع نمی‌شوند. این به علت وجود جمله h و یا β در مخرج است.

همچنین در نمودار اختلاف فاز دیده می‌شود که در $\omega=0$ مقادیر متفاوتی برای اختلاف فاز ثابت می‌آید. اما در $r=1$ ($\omega=\omega_n$) همه منحنی‌ها از $\frac{\pi}{2}$ عبور کرده و با زیاد شدن r همه به سمت π می‌روند. بنابراین همیشه زاویه فاز φ محدود است الا در $\beta=0$ و بنابراین امکان هم‌فاز شدن جابجایی با نیروی خارجی وجود ندارد.

برای بدست آوردن محل ماکزیمم دامنه بر روی پاسخ فرکانسی از آن نسبت به r مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\,\frac{x_0}{F_0/k}}{dr}=0 \Rightarrow \frac{0-\frac{2(1-r^2)(-2r)}{2\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}}}{(1-r^2)^2+\beta^2}=0 \Rightarrow r(1-r^2)=0$$

$$\Rightarrow r=0 \Rightarrow x_{0\,max}=\frac{F_0/k}{\sqrt{1+\beta^2}}$$ هنگامی که $\beta>1$

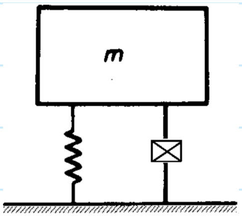
$$\Rightarrow r=1 \Rightarrow x_{0\,max}=\frac{F_0/k}{\sqrt{(\cancel{1-1})^2+\beta^2}}=\frac{F_0}{k\beta}=\frac{F_0}{h}$$ هنگامی که $\beta<1$

دیده می‌شود که در استهلاک سازه‌ای ماکزیمم دامنه در فرکانس تشدید رخ می‌دهد و استهلاک سازه‌ای تنها عاملی است که در سیستم‌های مکانیکی جلو تشدید را می‌گیرد.

در ادامه برخی مقادیر β برای مواد خاص ذکر شده است:

ماده	β
Aluminum	$2\times10^{-5} - 2\times10^{-3}$
Concrete	$0.02 - 0.06$
Glass	$0.001 - 0.002$
Rubber	$0.1 - 1$
Steel	$0.002 - 0.01$
Wood	$0.005 - 0.01$

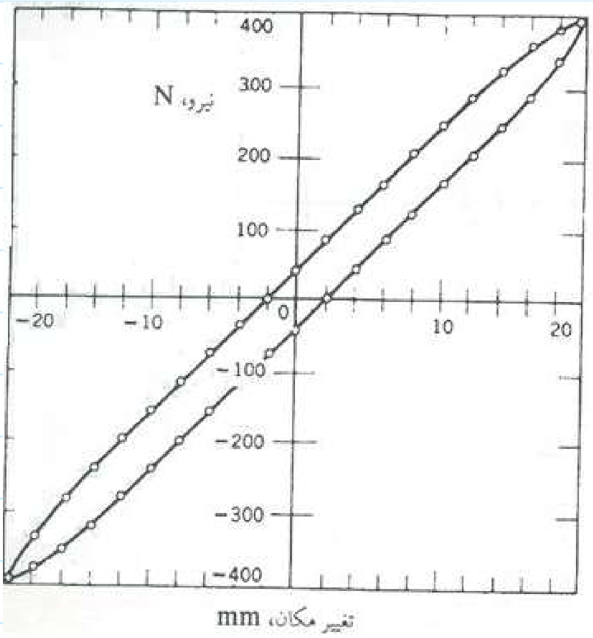
مثال:



موتوری به جرم $m=200^{Kg}$ بر روی 16 جداساز لاستیکی قرار گرفته است، که هر کدام مشخصات نیرو–تغییرمکان نشان داده شده را دارند. موتور دارای جرم خارج مرکز m_0e است.

الف– مقدار mx_0/m_0e را در فرکانس طبیعی در ارتعاش اجباری بدست آورید.

ب –قابلیت بزرگنمایی در دور 1800rpm چقدر است.



$$x_0 = \frac{F_0 \rightarrow m_0 e \omega^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+h^2}}$$

$$x_0 = \frac{\frac{m_0 e \omega^2}{m \omega_n^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(h/k)^2}}$$

$$\frac{mx_0}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(h/k)^2}}$$

در $r=1$، خواهیم داشت:

$$\frac{mx_0}{m_0 e} = \frac{1}{\sqrt{0+(h/k)^2}} = k/h$$

اما همانطور که قبلاً نشان داده شد، نقطه تقاطع با محور افقی 2mm است:

$$\frac{h}{k}x = 2^{m} \quad , \quad x = 20^{mm} \rightarrow \frac{h}{k} = \frac{2}{20} = 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{mx_0}{m_0 e} = 10$$

برای تعیین قابلیت بزرگنمایی، از منحنی دیده می‌شود که:

$$k = \frac{F}{x} = \frac{400^{N}}{20\ mm} = 2\times10^4\ N/m$$

چون 16 فنر موجود است: $k_{eq} = 16k = 3.2\times10^5\ N/m$

بنابراین:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = 40^{rad/s} \quad , \quad \omega = 1800^{rpm} = 188.49^{rad/s}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 4.71 \quad , \quad \frac{mx_0}{m_0 e} = 1.047$$

مثال:

یک فن به جرم 50 kg که دارای جرم نامیزان دواری به مقدار $me=0.2\ kg.m$ می باشد به انتهای تیر یک سر گیرداری متصل شده است. موقعی که سرعت فن تغییر می کند، حداکثر دامنه پایدار ارتعاشات فن برابر $35mm$ در فرکانس $1100\ rpm$ مشاهده می گردد. در صورتی که استهلاک از نوع سازه ای باشد، مطلوبست تعیین دامنه پایدار فن هنگامی که در دور $1200\ rpm$ کار می کند.

می دانیم که دامنه پاسخ پایدار در حالت نامتعادل دوران عبارت است از:

$$\hat{x}_0 = \frac{M x_0}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}}$$

برای بدست آوردن نرخ فرکانس مربوط به حداکثر دامنه از رابطه فوق نسبت به r مشتق می گیریم:

$$\frac{d\hat{x}_0}{dr} = 0 \Rightarrow r_{max} = \sqrt{1+\beta^2}$$

از قرار دادن این مقدار در $\hat{x}_0$ خواهیم داشت:

$$\hat{x}_{0max} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}$$

با توجه به $x_{max} = 35^{mm}$، می توان از رابطه بالا β را محاسبه نمود:

$$\hat{x}_{max} = \frac{M x_{0max}}{me} = 8.75 = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{\hat{x}_{0max}^2 - 1}} = 0.115$$

سپس ω_n را محاسبه می کنیم:

$$r_{max} = \sqrt{1+\beta^2} = 1.013 \Rightarrow r_{max} = \frac{\omega_{max}}{\omega_n} = \frac{(1100 \times \frac{2\pi}{60})}{\omega_n} = 1.013$$

$$\Rightarrow \omega_n = 113.713\ ^{rad}/_{s}$$

حال می توان دامنه را در 1200^{rpm} محاسبه نمود:

$$\omega_1 = 1200^{rpm} = 125.664\ ^{rad}/_{s} \Rightarrow r_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} = 1.105$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\frac{m}{M} r_1^2}{\sqrt{(1-r_1^2)^2+\beta^2}}\, e = 19.59^{mm}$$