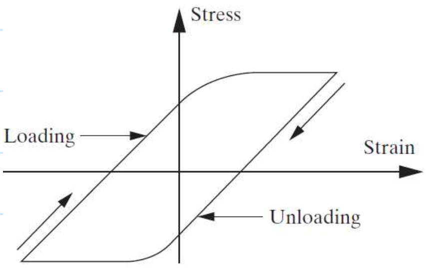
Structural Damping استهلاک سازه ای

یکی دیگر از انواع استهلاک های پرکاربرد مربوط به استهلاک سازه ای که بنام های داخلی (Internal)، مصالح (Material) و جامد (Solid) معروف است نیز می باشد.

این نوع استهلاک مربوط به لغزش پلاستیک و حرکت نابجایی ها تحت بارهای متناوب می باشد که تحت این بارها ایجاد منحنی های تنش - کرنش هیسترزیس می کند. سطح این منحنی ها مقدار انرژی از دست رفته در هر سیکل را نشان می دهد.

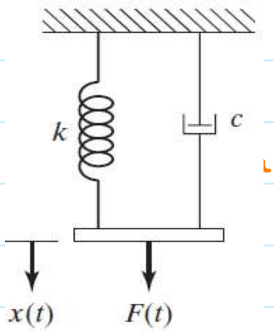


برای بررسی و مدل سازی این استهلاک دو مدل پیشنهاد شده:

الف- مدل ویسکو الاستیک خطی Linear Visco-Elastic Model

ب- مدل هیسترتیک غیرخطی Nonlinear Hysteretic Model

الف - مدل ویسکو الاستیک خطی



این مدل بصورت ترکیب یک فنر و یک دمپر مانند شکل مقابل است.

انرژی تلف شده توسط این سیستم همان انرژی تلف شده توسط دمپر و برابر است

$$E = \pi c \omega x_0^2$$

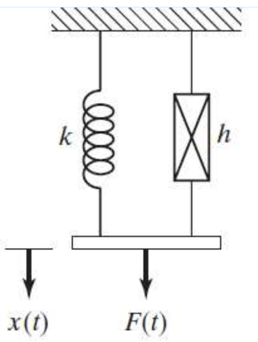
همانطور که دیده می شود این انرژی تابعی از فرکانس است.

اما نتایج آزمایشگاهی نشان می دهد که استهلاک داخلی تابعی از فرکانس نیست.

پس این مدل جوابگوی استهلاک داخلی نمی باشد.

ب - مدل هیسترتیک غیرخطی

شکل این مدل در روبرو نشان داده شده است.



در این مدل نیروی دمپر متناسب با سرعت و معکوساً متناسب با فرکانس است

به علاوه از یک فنر برای نشان دادن اثر الاستیک استفاده می‌شود.

دمپر تعادل برده شده به صورت زیر متناسب است:

$$F_d \propto \frac{\dot{x}}{\omega}$$

$$\Rightarrow F_d = h\frac{\dot{x}}{\omega}$$

h ضریب استهلاک هیسترتیک نامیده می‌شود

Coefficient of hysteretic Damping

نیروی منتقل شده عبارت است از:

$$F_t = kx + \frac{h}{\omega}\dot{x}$$

انرژی تلف شده در هر سیکل برابر است با:

$$E_D = \int_{x_1}^{x_2} F_d\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} F_d\,\dot{x}\,d\omega t = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi}\left(\frac{h}{\omega}\dot{x}\right)\dot{x}\,d\omega t$$

$$E_D = \pi h x_0^2$$

از این رابطه دیده می‌شود که انرژی تلف شده ارتباطی با فرکانس ندارد، که این امر با نتایج تجربی

مطابقت دارد. بنابراین در ادامه از این مدل استفاده می‌شود.

با فرض حرکت هارمونیک:

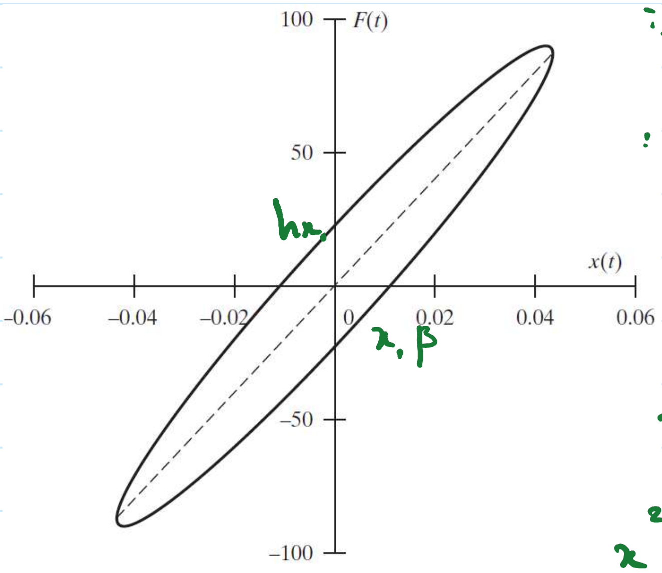
$$x = x_0 \sin(\omega t - \alpha)\ ,\ \dot{x} = \omega x_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

همچنین

$$F_t = kx + \frac{h}{\omega}\dot{x} \Rightarrow \frac{F_t - kx}{h} = \frac{\dot{x}}{\omega} = x_0\cos(\omega t - \alpha)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{F_t - kx}{h x_0} = \cos(\omega t - \alpha) \\ \dfrac{x}{x_0} = \sin(\omega t - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{F_t - kx}{h x_0}\right)^2 = 1$$

که نشان دهنده یک بیضی در صفحه نیرو جابجایی $(F_t - x)$ می‌باشد.



نقاط تقاطع بیضی با محورها را می‌توان بدست آورد:

از قرار دادن $F_t=0$ نقطه تقاطع با محور افقی بدست می‌آید:

$$F_t=0 \Rightarrow \left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\left(\frac{0-kx}{hx_0}\right)^2=1$$

$$\Rightarrow x^2=\left(1+\frac{k^2}{h^2}\right)=x_0^2 \Rightarrow x^2=\frac{h^2x_0^2}{h^2+k^2}$$

$$x^2=\frac{x_0^2h^2}{k^2}\left(1+\frac{h^2}{k^2}\right)^{-1}$$

از قرار دادن $h=\beta k$ که β نیز فاکتور تلفات هیسترتیک (Hysteretic Loss Factor) خوانده می‌شود:

$$x^2=x_0^2\beta^2(1+\beta^2)^{-1} \Rightarrow x=\pm x_0\beta\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}$$

از آنجا که h در مقابل k خیلی کمتر است β^2 خیلی کوچک بوده و از صرف‌نظر کردن از آن در مقابل ۱ خواهیم داشت:

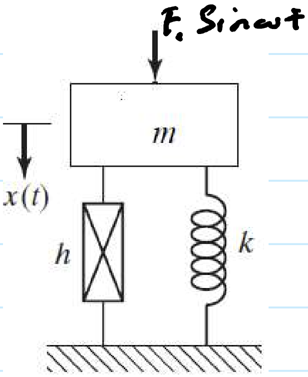
$$x=\pm x_0\beta=\pm x_0\frac{h}{k}$$

از قرار دادن $x=0$ نقطه تقاطع با محور عمودی بدست می‌آید:

$$x=0 \Rightarrow \left(\frac{0}{x_0}\right)^2+\left(\frac{F_t+0}{hx_0}\right)^2=1 \Rightarrow F_t=\pm hx_0$$

سطح بیضی انرژی تلف شده که $\pi h x_0^2$ است را می‌دهد.

اگر این سطح به طریق تجربی محاسبه شود، سپس می‌توان ضریب هیسترتیک و یا h را از روی نقاط تقاطع بدست آورد:



ارتعاشات اجباری سیستم‌های دارای استهلاک سازه‌ای

در صورتیکه سیستم یک درجه آزادی روبرو که دارای استهلاک سازه‌ای است تحت نیروی تحریک هارمونیک قرار گیرد، معادله دیفرانسیل حرکت آن عبارت است از:

$$m\ddot{x}+\frac{h}{\omega}\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$$

در این صورت دیگر معادله دیفرانسیل با ضرائب ثابت نداریم. برای حل می‌توان از سیستم با استهلاک کننده ویسکوز معادل استفاده نمود و انرژی تلف شده را در دو سیستم معادل هم قرار داد:

$$\pi C_e \omega x_0^2=\pi h x_0^2 \Rightarrow C_e=\frac{h}{\omega}$$

که h بعنوان تجربی از شکل حلقه هیسترزیس بدست می‌آید. در نتیجه

$$m\ddot{x}+C_e\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$$

و یا:

$$m\ddot{x}+\frac{h}{\omega}\dot{x}+kx=F_0\sin\omega t$$

پاسخ پایدار عبارت است از:

$$x=X_0\sin(\omega t-\varphi)$$

که در آن:

$$x_0=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(C_e\omega)^2}}=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\frac{h}{\omega}\omega)^2}}$$

$$x_0=\frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+h^2}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{C_e\omega}{k-m\omega^2}=\tan^{-1}\frac{\frac{h}{\omega}\omega}{k-m\omega^2}=\tan^{-1}\frac{h}{k-m\omega^2}$$

همچنین با استفاده از $\zeta_e=\frac{C_e}{2\sqrt{km}}$ و $\beta=\frac{h}{k}$ می‌توان این روابط را نوشت:

$$\xi_e=\frac{c_e}{2\sqrt{km}}=\frac{h}{2\omega\sqrt{km}}=\frac{k\beta}{2\omega\sqrt{km}}=\frac{\beta}{2\omega}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{\beta\omega_n}{2\omega}=\beta/2r$$

که $r=\omega/\omega_n$ است. درنتیجه:

$$x_0=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi_e r)^2}}=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(\cancel{2}\frac{\beta}{\cancel{2r}}\cancel{r})^2}}$$

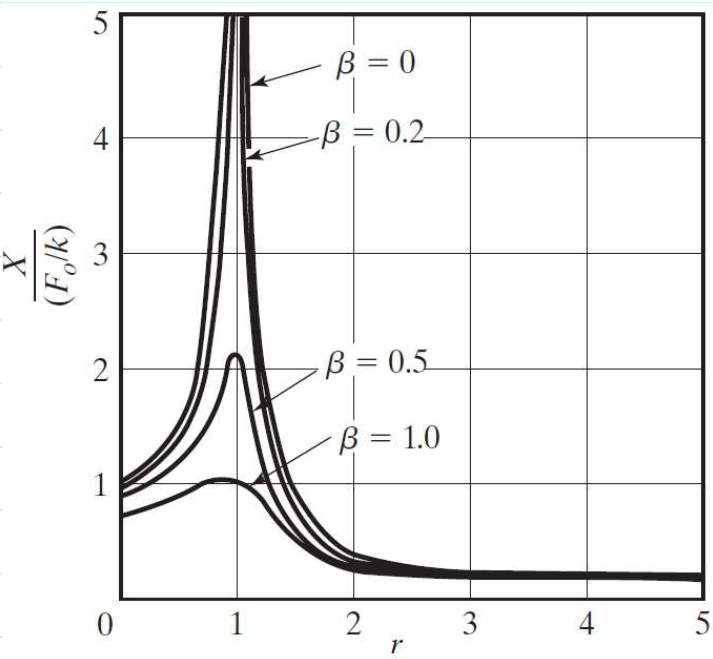
$$x_0=\frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}}\Rightarrow M=\frac{x_0}{F_0/k}=\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}}$$

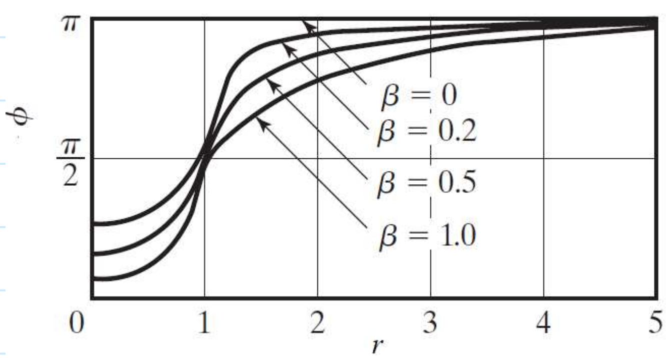
و زاویه تاخیر فاز:

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{c_e\omega}{k-m\omega^2}=\tan^{-1}\frac{2\xi_e r}{1-r^2}=\tan^{-1}\frac{\cancel{2}\frac{\beta}{\cancel{2r}}\cancel{r}}{1-r^2}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{\beta}{1-r^2}$$

پاسخ فرکانسی سیستم و اختلاف فاز در زیر رسم شده است.





در منحنی پاسخ فرکانسی دیده می‌شود که با حذف استهلاک ویسکوز، در استهلاک سازه‌ای همه منحنی‌ها از یک نقطه شروع نمی‌شوند. این به علت وجود جمله h یا β در مخرج است.

همچنین در منحنی اختلاف فاز دیده می‌گردد که در $\omega=0$ مقادیر متفاوتی برای اختلاف فاز ثابت می‌آید. اما در $r=1$ ($\omega=\omega_n$) همه منحنی‌ها از $\frac{\pi}{2}$ عبور کرده و با زیاد شدن r همه به سمت π می‌روند. بنابراین همیشه زاویه فاز ϕ موجود است الا در $\beta=0$ و بنابراین امکان هم‌فاز شدن جابجایی با نیروی خارجی وجود ندارد.

برای بدست آوردن محل ماکزیمم دامنه بر روی پاسخ فرکانسی از آن نسبت به r مشتق می‌گیریم:

$$\frac{d\, x_0/F_0/k}{dr}=0 \Rightarrow \frac{0-\frac{2(1-r^2)(-2r)}{2\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}}}{(1-r^2)^2+\beta^2}=0 \Rightarrow r(1-r^2)=0$$

$$\Rightarrow r=0 \Rightarrow x_{0_{max}}=\frac{F_0/k}{\sqrt{1+\beta^2}}$$ هنگامی که $\beta>1$

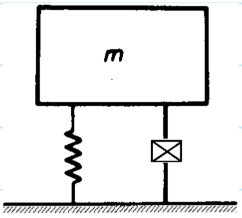
$$\Rightarrow r=1 \Rightarrow x_{0_{max}}=\frac{F_0/k}{\sqrt{\cancel{(1-1)^2}+\beta^2}}=\frac{F_0}{k\beta}=\frac{F_0}{h}$$ هنگامی که $\beta<1$

دیده می‌شود که در استهلاک سازه‌ای ماکزیمم دامنه در فرکانس تشدید رخ می‌دهد و استهلاک سازه‌ای همان عاملی است که در سیستم‌های مکانیکی جلوی تشدید را می‌گیرد.

در ادامه برخی مقادیر β برای اجسام ذکر شده است:

ماده	β
Aluminum	$2\times10^{-5}-2\times10^{-3}$
Concrete	0.02 – 0.06
Glass	0.001 – 0.002
Rubber	0.1 – 1
Steel	0.002 – 0.01
Wood	0.005 – 0.01

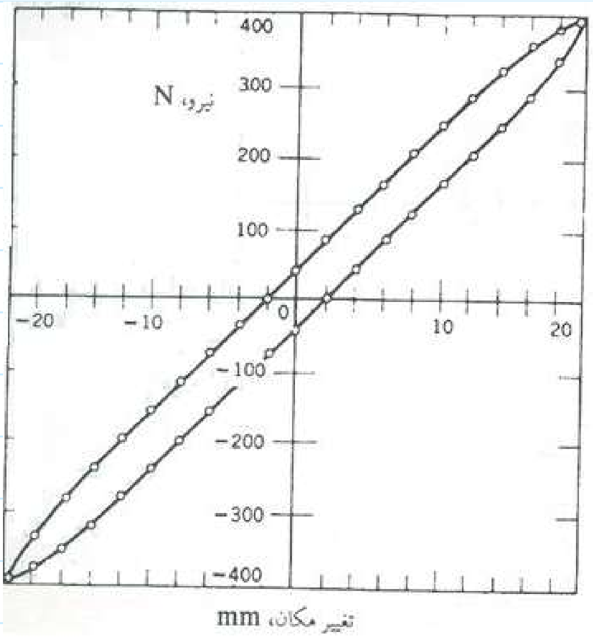
مثال :



موتوری به جرم $m=200^{Kg}$ بر روی 16 جداساز لاستیکی قرار گرفته است، که هر کدام مشخصات نیرو–تغییرمکان نشان داده شده را دارند. موتور دارای جرم خارج مرکز m_0e است.

الف– مقدار mx_0/m_0e را در فرکانس طبیعی در ارتعاش اجباری بدست آورید.

ب –قابلیت بزرگنمایی در دور 1800rpm چقدر است.



$$x_0 = \frac{F_0 \rightarrow m_0 e\omega^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+h^2}}$$

$$x_0 = \frac{\frac{m_0 e\omega^2}{m\omega_n^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2+(h/k)^2}}$$

$$\frac{mx_0}{m_0 e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(h/k)^2}}$$

در $r=1$ ، خواهیم داشت :

$$\frac{mx_0}{m_0 e} = \frac{1}{\sqrt{0+(h/k)^2}} = k/h$$

اما همانطور که قبلاً نشان داده شد، نقطه تقاطع با محور افقی 2mm است:

$$\frac{h}{k}x = 2^m \quad , \quad x = 20^{mm} \rightarrow \frac{h}{k} = \frac{2}{20} = 0.1$$

$$\Rightarrow \frac{mx_0}{m_0 e} = 10$$

برای تعیین قابلیت بزرگنمایی، از سختی دیده می‌شود که $K = \frac{F}{x} = \frac{400\ N}{20\ mm} = 2\times10^4\ N/m$.

چون 16 فنر موجود است: $K_{eq} = 16k = 3.2\times10^5\ N/m$

نتیجه برابر :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = 40^{rad/s} \quad , \quad \omega = 1800^{rpm} = 188.49^{rad/s}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\omega}{\omega_n} = 4.71 \quad , \quad \frac{mx_0}{m_0 e} = 1.047$$

مثال:

یک فن به جرم 50 *kg* که دارای جرم نامیزان دواری به مقدار *me*=0.2 *kg.m* می باشد به انتهای تیر یک سر گیرداری متصل شده است. موقعی که سرعت فن تغییر می کند، حداکثر دامنه پایدار ارتعاشات فن برابر 35*mm* در فرکانس 1100 *rpm* مشاهده می گردد. در صورتی که استهلاک از نوع سازه ای باشد، مطلوبست تعیین دامنه پایدار فن هنگامی که در دور 1200 *rpm* کار می کند.

می دانیم که دامنه پاسخ پایدار در حالت نامتعادل دوران عبارت است از:

$$\hat{x}_0 = \frac{M x_0}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+\beta^2}}$$

برای بدست آوردن نرخ فرکانس مربوط به حداکثر دامنه از رابطه مقابل نسبت به r مشتق می گیریم:

$$\frac{d\hat{x}_0}{dr} = 0 \Rightarrow r_{max} = \sqrt{1+\beta^2}$$

از قرار دادن این مقدار در $\hat{x}_0$ خواهیم داشت:

$$\hat{x}_{0max} = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}$$

با توجه به $x_{max} = 35^{mm}$، می توان از رابطه بالا β را محاسبه نمود:

$$\hat{x}_{max} = \frac{M x_{0max}}{me} = 8.75 = \frac{\sqrt{1+\beta^2}}{\beta}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{\hat{x}_{0max}^2 - 1}} = 0.115$$

سپس ω_n را محاسبه می کنیم:

$$r_{max} = \sqrt{1+\beta^2} = 1.013 \Rightarrow r_{max} = \frac{\omega_{max}}{\omega_n} = \frac{(1100\times\frac{2\pi}{60})}{\omega_n} = 1.013$$

$$\Rightarrow \omega_n = 113.713^{rad/s}$$

حال می توان دامنه را در 1200^{rpm} محاسبه نمود:

$$\omega_1 = 1200^{rpm} = 125.664^{rad/s} \Rightarrow r_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} = 1.105$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{\frac{m}{M} r_1^2}{\sqrt{(1-r_1^2)^2+\beta^2}} e = 19.59^{mm}$$