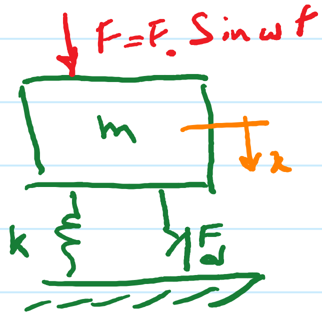
ارتعاشات اجباری با اصطکاک خشک



سیستم یک درجه آزادی روبرو را که تحت تأثیر نیروی هارمونیک F قرار دارد در نظر بگیرید. این سیستم دارای اصطکاک خشک بوده و معادله قانون دوم برای آن نتیجه می‌دهد:

$$m\ddot{x} + F_d\,\mathrm{Sgn}(\dot{x}) + kx = F_0 \sin\omega t$$

این یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است و حل آن در چهارچوب این درس نیست. به جای آن سیستم را با یک سیستم یک درجه آزادی با استهلاک ویسکوز معادل تقریب می‌زنیم.

برای معادل سازی دو سیستم از انرژی کمک گرفته، چنین شرط می‌کنیم که انرژی از دست رفته برای هر دو استهلاک در طول یک سیکل نوسان یکسان باشد. در این صورت به جای معادله بالا معادله:

$$m\ddot{x} + c_e\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

را حل می‌کنیم. برای محاسبه c_e، ابتدا انرژی تلف شده توسط اصطکاک خشک در یک سیکل با دامنه ثابت را حساب می‌کنیم:

$$E_D = \int_{x_1}^{x_2} F_D\, dx = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} F_D\, \dot{x}\, d\omega t$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} (F_d\, \mathrm{Sgn}\,\dot{x})\, \dot{x}\, d\omega t$$

اما:

$$x = x_0 \sin\omega t$$

$$\dot{x} = x_0\,\omega \cos\omega t$$

نمودار:

$$E_D = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} F_d \, \mathrm{Sgn}(x_0\omega\cos\omega t)\,(x_0\omega\cos\omega t)\,d\omega t$$

$$= F_d x_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{Sgn}(\cos\omega t)\cos\omega t\, d\omega t$$

مقدار علامت تابع cos

$$= F_d x_0\left[\int_0^{\pi/2}\cos\omega t\, d\omega t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\omega t\, d\omega t + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos\omega t\, d\omega t\right]$$

$$= x_0 F_d\left[\sin\omega t\Big|_0^{\pi/2} - \sin\omega t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} + \sin\omega t\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right]$$

$$= x_0 F_d\left[(1-0)-(-1-1)+(0-(-1))\right]$$

$$E_D = 4F_d x_0$$

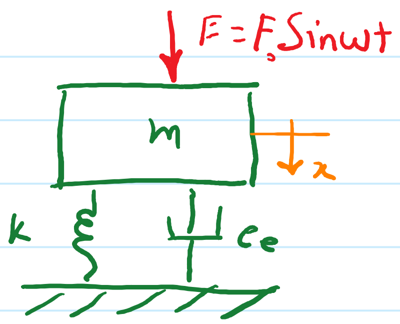
از آنجا که مقدار نیروی اصطکاک ثابت است کار آن در هر ربع سیکل $F_d x_0$ بوده و در چهار ربع مقدار تقابل می‌کند.

این مقدار انرژی تلف شده برابر انرژی تلف شده توسط مستهلک کننده ویسکوز معادل است:

$$4F_d \cancel{x_0} = \pi C_e \omega x_0^{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow C_e = \frac{4F_d}{\pi\omega x_0}$$

حال می‌توان از سیستم زیر به جای سیستم بالا استفاده نمود:



پاسخ سیستم تقابل عبارت است از:

$$x = x_0 \sin(\omega t - \alpha)$$

که در آن:

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c_e\omega)^2}} \quad , \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{c_e\omega}{k-m\omega^2}$$

از جایگذاری c_e

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+\left(\frac{4F_d}{\pi\omega x_0}\omega\right)^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+\left(\frac{4F_d}{\pi x_0}\right)^2}}$$

اما x_0 هم در طرف چپ رابطه و هم در طرف راست آن قرار دارد. با ساده‌سازی:

$$x_0^2 = \frac{F_0^2}{(k-m\omega^2)^2+\left(\frac{4F_d}{\pi}\right)^2\frac{1}{x_0^2}} \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{F_0^2-\left(\frac{4F_d}{\pi}\right)^2}}{|k-m\omega^2|}$$

$$x_0 = \frac{F_0\sqrt{1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}{k\left|1-(\omega/\omega_n)^2\right|} \Rightarrow$$

شبیه زیر:

$$\Rightarrow x_0 = \frac{F_0}{k}\,\frac{\sqrt{1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}{|1-r^2|} \quad , \quad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

در ضمن ضریب نسبت استهلاک معادل را هم حساب می‌کنیم.

$$\zeta_e = \frac{c_e}{2\sqrt{km}} = \frac{\frac{4F_d}{\pi\omega x_0}}{2\sqrt{km}}\,\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}} = \frac{2F_d}{\pi\omega\,\omega_n x_0 m}$$

زاویه اختلاف فاز هم عبارت است از:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{c_e\omega}{k-m\omega^2} = \tan^{-1}\frac{\frac{4F_d}{\pi\omega x_0}\omega}{k-m\omega^2} = \tan^{-1}\frac{\frac{4F_d}{\pi x_0}}{k-m\omega^2}$$

از جایگذاری مقدار x_0 در این رابطه:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{4F_d}{\pi\frac{\sqrt{F_0^2-\left(\frac{4}{\pi}F_d\right)^2}}{|k-m\omega^2|}(k-m\omega^2)} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{\pm 4F_d}{\pi\sqrt{F_0^2-\left(\frac{4F_d}{\pi}\right)^2}}$$

دیده می‌شود که در مقدار ثابت برای α جواب می‌آید. α را می‌توان نسبت استهلاک معادل هم جواب آورد:

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{2\zeta_e r}{1-r^2}=\frac{2}{1-r^2}\left(\frac{2F_d}{\pi\cancel{\omega}\,\underbrace{\omega_n x_0 m\left(\frac{\cancel{\omega}}{\omega_n}\right)}_{k/m}}\right)$$

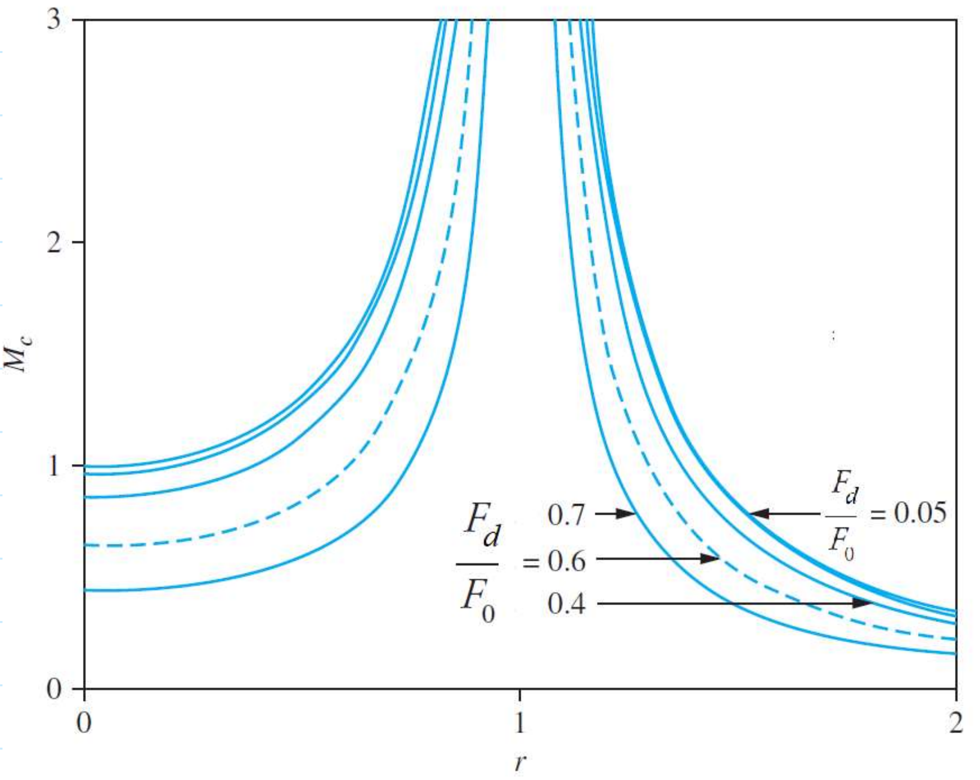
$$\varphi=\tan^{-1}\frac{1}{1-r^2}\,\frac{4F_d}{\pi\frac{k}{\cancel{m}}x_0\cancel{m}}=\tan^{-1}\frac{4F_d}{\pi k(1-r^2)x_0}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{4F_d}{\left(\pi k(1-r^2)\right)\dfrac{F_0}{k}\dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}{|1-r^2|}}$$

$$\varphi=\tan^{-1}\pm\frac{4F_d}{\pi F_0\sqrt{1-\left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}$$

علامت ± به خاطر قدر مطلق است که در این رابطه وجود دارد. بنابراین اگر $r<1$ باشد علامت مثبت و اگر $r>1$ باشد علامت منفی به کار می‌رود.

- منحنی پاسخ فرکانسی ارتعاشات به فرم شکل مقابل است.



نقاط در خور توجه این شکل در رابطه با دامنه پایانی عبارتند از:

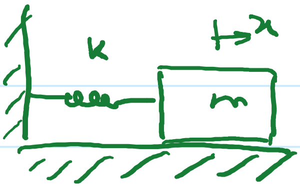
- بر خلاف اصطکاک ویسکوز، که وجود آن باعث عدم میل دامنه به بی‌نهایت در فرکانس طبیعی می‌شد، در اصطکاک خشک، به ازای جمیع مقادیر آن، در فرکانس طبیعی مخرج کسر صفر شده و دامنه به سمت بی‌نهایت می‌رود. یعنی وجود اصطکاک خشک مانع از تشدید نمی‌شود.

این نکته از آنجا حائز اهمیت است که این نوع اصطکاک در تمامی سیستم‌های مکانیکی وجود دارد.

- همچنین در اصطکاک ویسکوز، صورت کسر هیچگاه صفر نمی‌شد و همواره دامنه موجود بود، ولی در اصطکاک خشک دامنه می‌تواند صفر گردد. بنابراین شرط وجود ارتعاش است:

$$\frac{4F_d}{\pi F_0} < 1$$

یعنی نیروی تحریک ورودی که می‌بایست به جرم اعمال شده و جابجایی x در حالت پایدار را ارائه نماید، فقط هنگامی می‌تواند سیستم را به ارتعاش در آورد که بر نیروی اصطکاک خشک غلبه نموده و در راستای آن صدق نماید.



مثال: جرم 15 kg به فنری با سختی 1800 N/m متصل شده است. در صورتیکه ضریب اصطکاک بین جرم و زمین 0.1 باشد، مطلوبست:

الف - تعیین موقعیتی که جرم در آن متوقف می‌گردد اگر جابجایی اولیه 60 mm باشد. توقف پس از چند سیکل حاصل می‌گردد؟

ب - درصورتیکه سیستم فوق تحت اثر نیروی $F = 75\sin 100t$ N قرار گیرد، مطلوبست تعیین دامنه حرکت جرم.

$$F_d = \mu N = \mu m g \quad , \quad \frac{F_d}{k} = \frac{\mu m g}{k} = 8.175^{\,mm}$$

در هر سیکل به اندازه $2F_d/k$ از دامنه کم می‌گردد، بنابراین می‌توان تعداد نیم سیکل تا رسیدن به ناحیه سکون را محاسبه کرد.

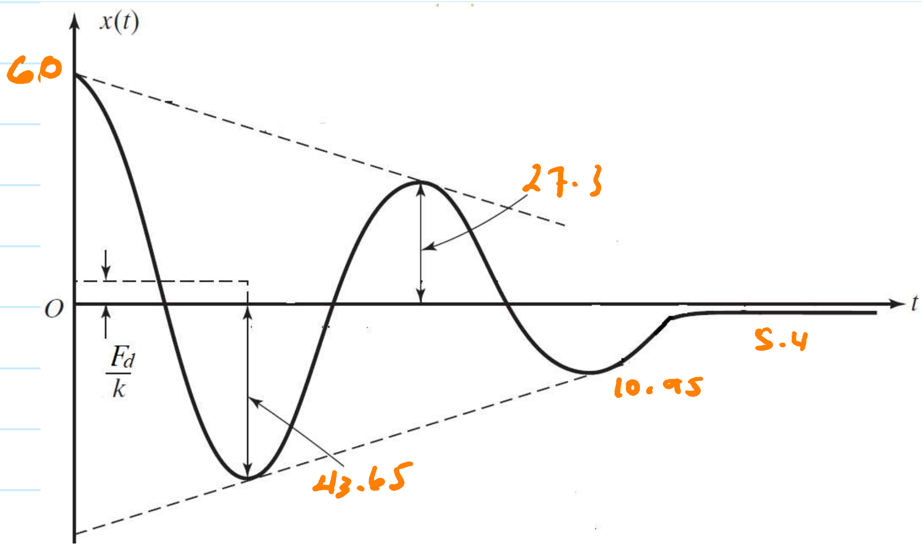
$$x_0 - n\left(\frac{2F_d}{k}\right) = \frac{F_d}{k} \Rightarrow n = \frac{k}{2F_d}\left(x_0 - F_d/k\right) = \frac{k x_0}{2F_d} - 1/2$$

$$n = \frac{(1800)(0.06)}{2(0.1)(15)(9.81)} - \frac{1}{2} = 3.1697 \Rightarrow n = 4$$ تعداد نیم سیکل

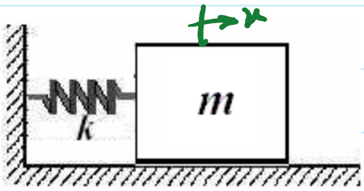
$$\text{محل توقف} = x_0 - n\left(\frac{2F_d}{k}\right) = 0.06 - (4)(2)(8.175) = -0.0054^{\,m} = -5.4^{\,mm}$$

$$x = \frac{\sqrt{F_0^2 - \left(\frac{4F_d}{\pi F_0}\right)^2}}{k - m\omega^2}$$ دامنه

$$= 0.49 \text{ mm}$$



ارتعاشات آزاد یک سیستم با اصطکاک خشک در شکل زیر نشان داده شده است. جرم سیستم 10 kg، سختی فنر 5000 N/m و ضریب اصطکاک بین جرم و سطح 0.08 می باشد. در صورتیکه جرم با شرایط اولیه $x(0)=50$ mm, $\dot{x}(0)=-2$ m/s رها گردد، مطلوبست تعیین حداکثر سرعت جسم و محل توقف آن.



جابجایی اولیه 50mm به سمت راست است و سرعت اولیه به سمت چپ است. بنابراین حرکت از راست به چپ است و ابتدا حرکت را بدست آورده و محل اولین توقف را مشخص می‌کنیم. سپس از این محل حرکت به صورت معمول با سرعت صفر صورت می‌پذیرد.

$$F_d = \mu m g = 7.848^{N} \quad , \quad \frac{F_d}{k} = 1.57^{mm}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 22.361^{rad/s}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = A_1 \cos\omega_n t + B_1 \sin\omega_n t + \frac{F_d}{k} \\ \dot{x}(t) = \omega_n(-A_1 \sin\omega_n t + B_1 \cos\omega_n t) \end{array}\right\} \begin{array}{l} x(0) = 50 = A_1 \cancel{\cos 0} + B_1 \cancel{\sin 0} + 1.57 \\ \dot{x}(0) = -2000 = 22.361(-A_1 \cancel{\sin 0} + B_1 \cancel{\cos 0}) \end{array}$$

$$\Rightarrow A_1 = 48.43^{mm} \quad , \quad B_1 = -89.44^{mm}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 48.43 \cos\omega_n t - 89.44 \sin\omega_n t + 1.57$$

ابتدا بیشترین جابجایی را در سمت چپ حساب کرده و سپس تعداد نیم سیکل‌ها تا توقف و سپس محل سکون را حساب می‌کنیم. در محل سکون سرعت صفر می‌شود.

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \cancel{\omega_n}(-A_1 \sin\omega_n t + B_1 \cos\omega_n t) = 0 \Rightarrow \tan\omega_n t = \frac{B_1}{A_1}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\omega_n} \tan^{-1}\frac{B_1}{A_1}$$

$$t = \frac{1}{22.361} \tan^{-1}\frac{-89.44}{48.43} = 0.0924^{s}$$

$$x_{max} = A_1 \cos\omega_n t_1 + B_1 \sin\omega_n t_1 + F_d/k$$

$$= 48.43 \cos 2.067 - 89.44 \sin 2.067 + 1.57 = -100.14^{mm}$$

$$x_{max} - n\left(\frac{2F_d}{k}\right) = \frac{F_d}{k} \Rightarrow n = \frac{x_{max} - F_d/k}{2F_d/k}$$

$n = 31.39 \Rightarrow n = 32$ نیم سیکل ← بعد از حرکت بسمت چپ.

$$x_s = x_{max} - n\left(2\frac{F_d}{k}\right) = 100,14 - 32(2)(1.57) = -0,34\ mm$$

جسم ساکن در سمت چپ تعادل استاتیکی قرار دارد.

ماکزیمم سرعت جسم در اولین عبور جسم از وضعیت تعادل، یعنی جایی که هم حرکت اولیه جهت و هم جابجایی اولیه رخ می‌دهد.

$$\dot{x} = \omega_n(-A_1 \sin\omega_n t + B_1 \cos\omega_n t)$$

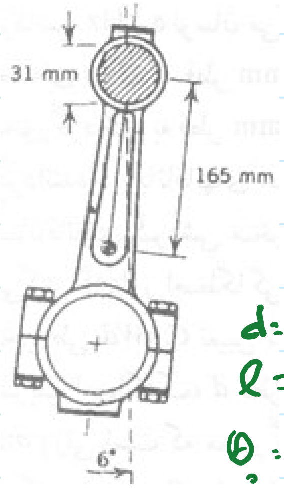
$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \Rightarrow -\omega_n^2(A_1 \cos\omega_n t + B_1 \sin\omega_n t) = 0 \Rightarrow \tan\omega_n t = -\frac{A_1}{B_1}$$

$$\Rightarrow t_{max} = \frac{1}{\omega_n}\tan^{-1}\frac{-A_1}{B_1} = 0.0222^{s}$$

$$\dot{x}_{max} = 22.361(-48.43 \sin 0.4963 - 89.44 \sin 0.4963)$$

$$= -2274.34\ mm/s \Rightarrow \dot{x}_{max} = -2.274\ m/s$$

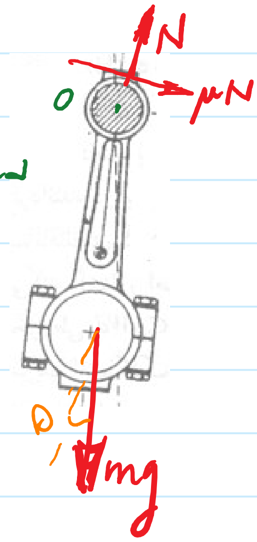
یک دسته پیستون از یک استوانه که بطور آزاد در نشیمنگاه گژن پین قرار گرفته، آویخته شده است. این دسته پیستون به اندازه 6^{o} جابجا و سپس رها شده است. ضریب اصطکاک بین نشیمنگاه و استوانه مزبور برابر $\mu=0.05$ است. تعداد سیکلهایی که تا متوقف شدن نوسان طی می شود و زاویه سکون دسته پیستون را تعیین کنید.



$d = 31\ mm$

$l = 165\ mm$

$\theta_0 = 6^{\circ} = 0.1047\ rad$



از رسم دیاگرام جسم آزاد:

$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$$

$$-mgl\sin\theta + \mu N \frac{d}{2} = m l^2 \ddot{\theta}$$

$$N = mg\cos\theta$$

$$\Rightarrow -\cancel{m}gl\sin\theta + \mu \cancel{m}g\frac{d}{2}\cos\theta = \cancel{m}l^2\ddot{\theta}$$

θ کوچک $\Rightarrow \quad -gl\theta + \mu g\frac{d}{2} = l^2\ddot{\theta}$

$$\rightarrow \quad l\ddot{\theta} + gl\theta = \mu g\, d/2$$

$$\rightarrow \quad \theta = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \theta_p$$

$$\theta_p = C \rightarrow l(0) + glC = \mu g\, d/2 \Rightarrow C = \frac{\mu \cancel{g} d}{2\cancel{g}l} = \frac{\mu d}{2l}$$

$$\theta = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{\mu d}{2l} \qquad \frac{F_d}{k}$$

$$\theta_0 - n\left(2\frac{\mu d}{2l}\right) = \frac{\mu d}{2l}$$

$$\Rightarrow n = \frac{l}{\mu d}\left(\theta_0 - \frac{\mu d}{2l}\right) = \frac{165}{0.05(31)}\left(0.1047 - \frac{0.05(31)}{2(165)}\right) = 10.64$$

$\Rightarrow n = 11$ نیم سیکل $= 5.\frac{1}{2}$ سیکل

محل توقف $\quad \theta = \theta_0 - n\left(\frac{\mu d}{l}\right) = 0.001386\ rad = 0.079^{\circ}$