انرژی تلف شده توسط مستهلک کننده ویسکوز

مستهلک کننده ویسکوز قبلاً معرفی شد و طرز کار آن چگونگی در سیستم مکانیکی تشریح گردید.

در سیستم دارای مستهلک کننده و غیرکنسرواتیو در هر سیکل انرژی توسط عنصر استهلاکی از سیستم خارج گشته و تبدیل به حرارت و سایش می‌گردد. برای جبران انرژی از دست رفته، منبع تحریک خارج می‌بایست به سیستم انرژی وارد نماید. در این قسمت مستهلک کننده ویسکوز از نظر انرژی مورد بررسی قرار می‌گیرد. انرژی از دست رفته توسط مستهلک کننده ویسکوز در یک پریود را E_D می‌نامیم. این مقدار انرژی در هر پریود از انرژی اولیه سیستم، E، کم می‌گردد. مقدار انرژی باقیمانده $E-E_D$ باعث به هم خوردن تعادل سیستم شده و تا وقتی به صفر برسد، سیستم به حالت سکون درمی‌آید.

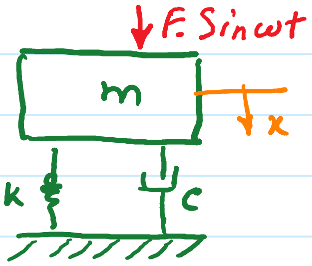
در صورتیکه منبع تحریک خارجی در سیستم موجود باشد و انرژی ورودی توسط این منبع در هر سیکل را E_E بنامیم، مقدار خالص تغییر در انرژی سیستم در هر پریود $E_E - E_D$ می‌باشد.

اگر این مقدار بزرگتر از صفر باشد، در این صورت ارتعاش سیستم تقویت گردیده و دامنه زیاد می‌گردد.

اگر منفی باشد، ارتعاشات میرا شده و دامنه کم می‌گردد.

در صورتیکه $E_E=E_D$ باشد، انرژی ورودی توسط منبع تحریک خارجی دقیقاً برابر انرژی تلف شده توسط مستهلک کننده می‌باشد، و سیستم مانند یک سیستم کنسرواتیو عمل کرده و دامنه ارتعاش ثابت می‌ماند.

در ادامه انرژی تلف شده توسط مستهلک کننده ویسکوز در یک سیستم جرم، فنر و دمپر که تحت تحریک هارمونیک قرار دارد محاسبه می‌شود.



سیستم یک درجه آزادی تعادل را در نظر بگیرید:

نحوه محاسبه انرژی تلف شده توسط استهلاک کننده ویسکوز را در یک سیکل محاسبه کنیم.

از رابطه کار و انرژی میدانیم که اتلاف انرژی برابر کار انجام شده توسط استهلاک کننده برابر جابجایی است.

$$E_D = \int F_c \, dx \qquad F_c = c\dot{x}$$ نیروی استهلاک کننده

$$x = x_0 \sin(\omega t - \alpha)$$ جابجایی

$$E_D = \int_{x_1}^{x_2} F_c \, dx = \int_{x_1}^{x_2} c\dot{x} \, dx = \int_{t_1}^{t_2} c\dot{x}\left(\frac{dx}{dt}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} c\dot{x}^2 dt$$

اگر t_1 را برابر صفر بگیریم در نتیجه:

$$t_2 = t_1 + \tau = \cancel{t_1} + \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$E_D = \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} c\dot{x}^2 dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} c\dot{x}^2 \omega \, dt = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} c\dot{x}^2 d(\omega t)$$

$$\dot{x} = \omega x_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

$$E_D = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} c\left(\omega x_0 \cos(\omega t - \alpha)\right)^2 d\omega t$$

$$= c\omega x_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(\omega t - \alpha) \, d\omega t =$$

$$= c\omega x_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\cos\omega t \cos\alpha + \sin\omega t \sin\alpha\right]^2 d\omega t$$

$$= c\omega x_0^2 \int_0^{2\pi} \left[\cos^2\omega t \cos^2\alpha + \sin^2\omega t \sin^2\alpha + 2\cos\omega t \sin\omega t \cos\alpha \sin\alpha\right] d\omega$$

با توجه به اینکه:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\omega t \, d\omega t + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\omega t}{2} d\omega t = \left[\frac{1}{2}(\omega t) + \frac{1}{4}\cancel{\sin 2\omega t}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \pi$$

و:

$$\int_0^{2\pi}\sin^2\omega t\,d\omega t=\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,d\omega t=\left[\frac{1}{2}\omega t-\frac{1}{4}\cancel{\sin 2\omega t}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

و

$$\int_0^{2\pi}2\cos\omega t\sin\omega t\,d\omega t=\int_0^{2\pi}\sin 2\omega t\,d\omega t=0$$

از جایگذاری در انتگرال:

$$E_D=c\omega x_0^2\left[\pi\cos^2\alpha+\pi\sin^2\alpha\right]=\pi c\omega x_0^2$$

ملاحظه که دیده می‌شود انرژی تلف شده متناسب با ضریب استهلاک ویسکوز، فرکانس تحریک

و مجذور دامنه نوسان است.

حال انرژی ورودی به سیستم را بدست آورده و با E_D مقایسه می‌کنیم.

این انرژی برابر کار انجام شده توسط نیروی تحریک ورودی در یک سیکل می‌باشد.

$$E_Z=\int_{x_1}^{x_2}F_0\sin\omega t\,dx\xrightarrow{\text{با تغییر متغیر}}E_Z=\frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi}F_0\sin\omega t\,\dot{x}\,d(\omega t)$$

$$=\frac{F_0}{\cancel{\omega}}\int_0^{2\pi}\sin\omega t\,(\cancel{\omega}x_0\cos(\omega t-\alpha))\,d\omega t$$

$$=F_0x_0\int_0^{2\pi}\sin\omega t\left[\cos\omega t\cos\alpha+\sin\omega t\sin\alpha\right]d\omega t$$

$$=F_0x_0\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cancel{\sin 2\omega t}\cos\alpha+\sin^2\omega t\sin\alpha\right]d\omega t=\pi F_0x_0\sin\alpha$$

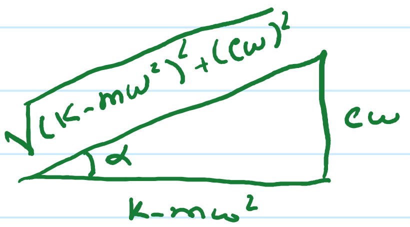
بنابراین:

$$E_Z=\pi F_0x_0\sin\alpha$$

کار انجام شده متناسب با دامنه نیرو و دامنه پاسخ بوده، به علاوه متناسب با سینوس اختلاف فاز است.

اما:

$$\sin\alpha=\frac{c\omega}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}}$$



بنابراین:

$$E_z = \pi x_0 F_0 \frac{c\omega}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \quad x_0$$

$$E_z = \pi c \omega x_0^2 \implies E_z = E_D$$

بنابراین دیده می‌شود که انرژی ورودی به سیستم با انرژی خارج شده از آن برابر بوده و دامنه نوسان ثابت می‌ماند.

اگر نیروی لازم برای جابجایی جرم را در نظر بگیریم:

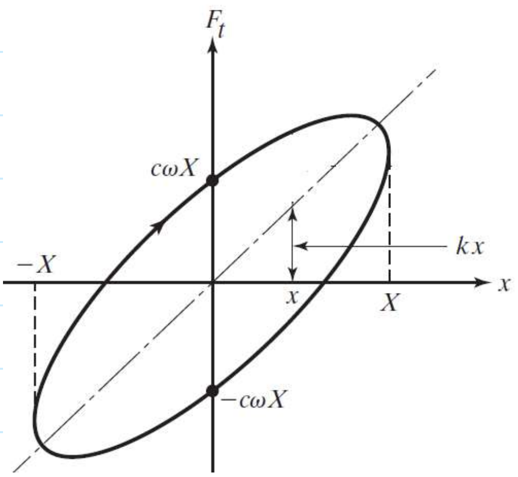
$$F_t = kx + c\dot{x}$$

$$\begin{cases} F_t - kx = c\dot{x} = c\omega x_0 \cos(\omega t-\alpha) \\ x = x_0 \sin(\omega t-\alpha) \end{cases} \implies \begin{cases} \dfrac{F_t - kx}{c\omega x_0} = \cos(\omega t-\alpha) \\ \dfrac{x}{x_0} = \sin(\omega t-\alpha) \end{cases}$$

از جمع مجذور دو طرف:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\left(\frac{F_t-kx}{c\omega x_0}\right)^2=1$$

که نشان دهنده یک بیضی می‌باشد. این نمودار به نام حلقه هیسترزیس (Hysteresis loop) خوانده شده و سطح زیر آن نشان دهنده انرژی تلف شده در یک سیکل می‌باشد.



نقاط تقاطع با محورها:

با محور افقی: $F_t = 0$

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2+\left(\frac{0-kx}{c\omega x_0}\right)^2=1$$

$$\implies \frac{c^2\omega^2 x_0^2 + k^2 x_0^2}{(c\omega x_0)^2}=1 \implies x = \pm\frac{c\omega x_0}{\sqrt{k^2+c^2\omega^2}}$$

تقاطع با محور قائم: $x=0$

$$\left(\frac{F_t}{c\omega x_0}\right)^2=1 \implies F_t = \pm c\omega x_0$$

سطح زیر نمودار $\pi c\omega x_0^2$ است.

بسیاری از انواع مستهلک کننده‌ها منجر به معادلات دیفرانسیل حرکت غیرخطی می‌شوند که بررسی آنها مشکل است. برای ساده‌سازی آنالیز کار، یک روش استفاده از مستهلک کننده ویسکوز معادل است، که دارای معادله‌ای خطی است. این کار باعث می‌گردد که با خطی شدن معادله دیفرانسیل بتوان آن را حل نمود. برای این کار انرژی تلف شده توسط مستهلک کننده واقعی را حساب نموده و برابر انرژی تلف شده توسط مستهلک کننده ویسکوز معادل قرار می‌دهیم:

$$E_d = \pi c_e \omega x_0^2$$

مثال: فرض کنید نیروی استهلاکی به فرم $F_d = b\dot{x}^3$ باشد، در صورتیکه ضریب استهلاک ویسکوز معادل را بخواهیم

فرض می‌کنیم:

$$x = x_0 \sin(\omega t-\alpha) \Rightarrow \dot{x} = \omega x_0 \cos(\omega t-\alpha)$$

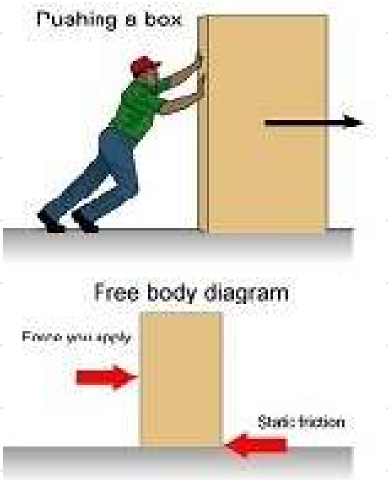
$$E_d = \int_{x_1}^{x_2} F_d\, dx = \int_0^{2\pi} F_d \left(\frac{1}{\omega}\dot{x}\right) d\omega t$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} (b\dot{x}^3)\dot{x}\, d(\omega t) = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} b\dot{x}^4 d(\omega t)$$

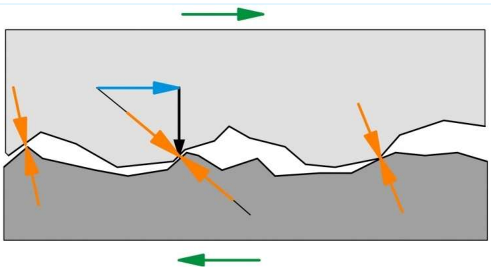
$$= \frac{1}{\omega}\int_0^{2\pi} b\left(\omega x_0 \cos(\omega t-\alpha)\right)^4 d(\omega t)$$

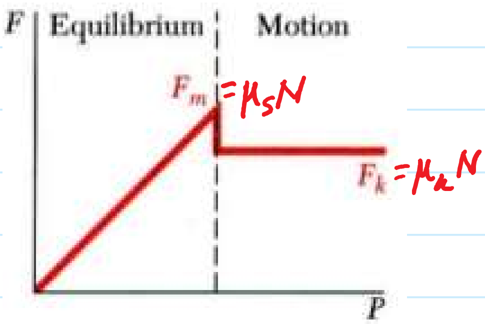
$$\Rightarrow \begin{cases} E_d = \frac{3}{4}\pi b x_0^4 \omega^3 \\ E_D = \pi c_e \omega x_0^2 \end{cases} \Rightarrow E_d = E_D \Rightarrow c_e = \frac{3}{4} b x_0^2 \omega^3$$

بررسی ارتعاشات آزاد با اصطکاک خشک



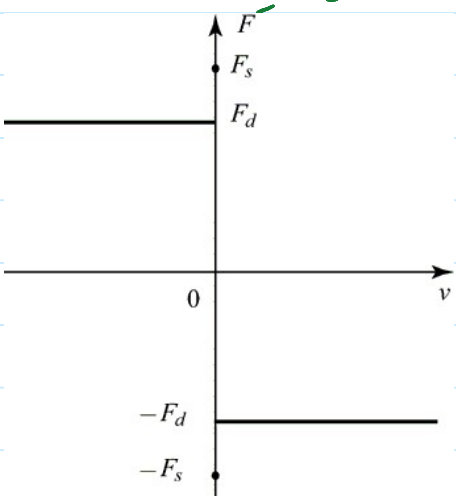
در صورتیکه جسمی را بر روی سطحی مانند شکل مقابل در نظر بگیریم، و برای حرکت آن نیرویی وارد کنیم دیده می‌شود که جسم حرکت نمی‌کند. اما ما به آن نیرو وارد کرده‌ایم در این صورت برابر تعادل استاتیکی دیده می‌شود که نیروی مقاوم جلو حرکت را می‌گیرد. این نیرو ناشی از جرش حتروگیرهای میتری است که بین جسم و سطح ایجاد شده





با افزایش نیرو همچنان جسم ثابت می‌ماند این به آن معنی است که نیروی مقاوم نیز زیاد می‌گردد. سرانجام مطابق شکل در نیروی خاص پیوندهای بین دو جسم شکسته شده و جسم شروع به حرکت می‌کند. در این صورت نیروی مقاوم کم شده و جسم را آسان‌تر حرکت می‌کند. نیروی اصطکاک متناسب با نیروی عمود بر سطح بوده و ضریب این تناسب در حالت استاتیکی μ_s است و در حالت حرکت (دینامیکی یا سینتیکی) μ_k

همانطور که دیده می‌شود این نیرو در حرکت جسم برابر مقدار ثابتی مانند شکل زیر است. لیکن جهت آن همیشه مخالف جهت حرکت می‌باشد

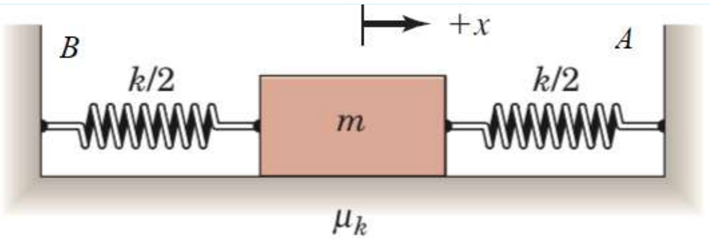


$$F_d = \mu_k N$$

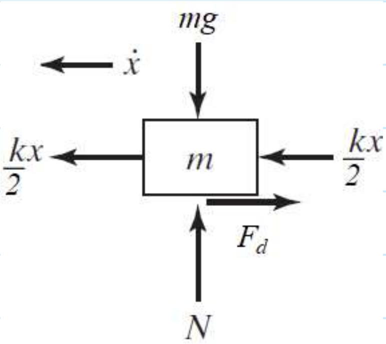
در ادامه به بررسی ارتعاشات آزاد با اصطکاک خشک می‌پردازیم.

ارتعاش آزاد با اصطکاک خشک Free Vibration with Dry (Coulomb) Friction

شکل مقابل را که دارای اصطکاک خشک با ضریب اصطکاک μ_k است در نظر بگیرید.



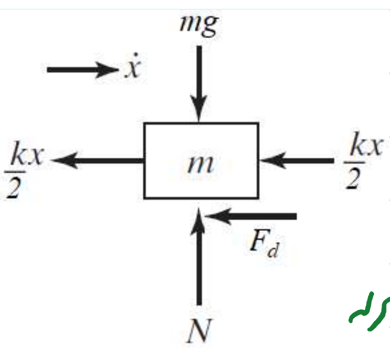
جسم را به اندازه x در جهت مثبت نشان داده شده (نقطه A) جابجا کرده و سپس رها می‌کنیم. بنابراین حرکت جسم از سمت راست به سمت چپ (از A به B) است. در این صورت نیروی اصطکاک به سمت راست می‌باشد. در یک لحظه دلخواه مثلاً هنگامی که جسم در فاصله x در جهت مثبت از وضعیت تعادل قرار دارد دیاگرام جسم آزاد را رسم کرده و قانون دوم نیوتن را اعمال می‌کنیم:



$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -\frac{k}{2}x - \frac{k}{2}x + F_d = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{m\ddot{x} + kx = F_d} \qquad \text{نیم سیکل اول}$$

جسم به حرکت خود ادامه داده تا به نقطه B برسد. سپس جهت حرکت عوض شده و از B به A حرکت می‌کند. در این صورت سرعت از چپ به راست است (در جهت مثبت x). در این وضعیت اگر دیاگرام جسم آزاد در یک لحظه مثلاً هنگامی که به اندازه x در جهت مثبت قرار دارد رسم گردد:



$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -\frac{k}{2}x - \frac{k}{2}x - F_d = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = -F_d \qquad \text{نیم سیکل دوم}$$

این دو رابطه را می‌توان با استفاده از تابع علامت $\mathrm{sgn}\,\dot{x}$ به صورت یک معادله درآورد:

$$m\ddot{x} + F_d\,\mathrm{sgn}\,\dot{x} + kx = 0$$

دیده می‌شود که به یک معادله دیفرانسیل غیرخطی رسیده ایم.

برای حل از آنجا که در این درس معادلات خطی را مد نظر قرار می‌دهیم، حرکت دو معادله در دو نیم سیکل را حل می‌کنیم. با در نظر گرفتن این معادلات:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_d}{m} & \text{نیم سیکل اول} \\ \ddot{x} + \frac{k}{m} x = -\frac{F_d}{m} & \text{نیم سیکل دوم} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \omega_n^2 x = F_d/m \\ \ddot{x} + \omega_n^2 x = -F_d/m \end{cases}$$

حل کلی این معادلات عبارت است از:

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t + \frac{F_d}{k} & 0 \le t \le \pi/\omega_n \\ x_2(t) = A_3 \cos \omega_n t + A_4 \sin \omega_n t - \frac{F_d}{k} & 0 \le t \le \pi/\omega_n \end{cases}$$

- این حل نشان دهنده حرکت هارمونیکی حول وضعیت تعادل $\left|\frac{F_d}{k}\right|$ می‌باشد.

- دقت شود که فرکانس طبیعی در ارتعاش آزاد با اصطکاک خشک ثابت می‌ماند.

ثابت‌های A_1 تا A_4 را از روی شرایط اولیه بدست می‌آوریم. دقت داریم که زمان در نیم سیکل اول و دوم از صفر شروع شده و نیم سیکل دوم بعد از نیم سیکل اول است:

در صورتیکه شرایط اولیه به صورت زیر باشد:

$x_1(0) = x_0 \; , \; \dot{x}_1(0) = 0$

$$x_1(0) = A_1 \cancel{\cos 0} + A_2 \cancel{\sin 0} + F_d/k = x_0 \Rightarrow A_1 = x_0 - F_d/k$$

$$\dot{x}_1(0) = \omega_n(-A_1 \sin 0 + A_2 \cos 0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

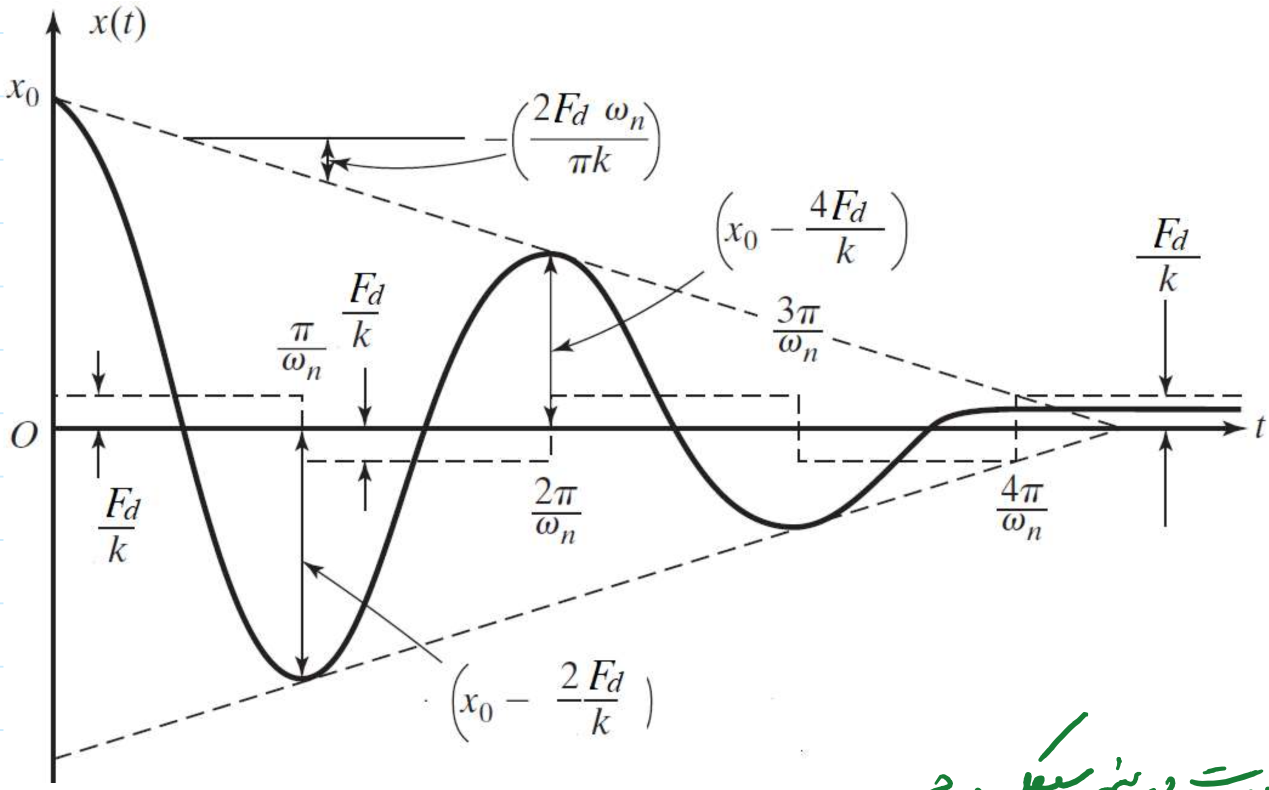
بنابراین:

$$x_1(t) = \left(x_0 - \frac{F_d}{k}\right) \cos \omega_n t + \frac{F_d}{k} \; , \; 0 \le t \le \frac{\pi}{\omega_n}$$

این معادله در نیم سیکل اول برقرار می‌باشد و نشان دهنده یک حرکت هارمونیک حول وضعیت تعادل $\frac{F_d}{k}$ است. شکل پاسخ در صفحه بعد نمایش داده شده است.

شرایط اولیه نیم سیکل دوم، برابر شرایط نهایی x_1 در نیم سیکل اول است یعنی:

$$t = \frac{\pi}{\omega_n} \Rightarrow x_1 = \left(x_0 - \frac{F_d}{k}\right) \cos \pi + F_d/k = \frac{2F_d}{k} - x_0 \; , \; \dot{x}_1 = 0$$



و برای حرکت در نیم سیکل دوم :

$$x_2(0) = A_3\cos 0 + A_4\sin 0 - \frac{F_d}{k} = \frac{2F_d}{k} - x_0 \Rightarrow A_3 = \frac{3F_d}{k} - x_0$$

$$\dot{x}_2(0) = 0 \Rightarrow A_4 = 0$$

در نتیجه :

$$x_2(t) = \left(\frac{3F_d}{k} - x_0\right)\cos\omega_n t - \frac{F_d}{k} \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\omega_n}$$

این نیم سیکل در ادامه نیم سیکل اول خواهد بود که در شکل نیز نشان داده شده است.

سپس نیم سیکل سوم را خواهیم داشت که به مانند نیم سیکل اول بوده، تنها ضرائب آن متفاوت است. شرایط اولیه این نیم سیکل، انتهای شرایط نیم سیکل دوم است یعنی :

$$x_2\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = \left(\frac{3F_d}{k} - x_0\right)\cos\pi - \frac{F_d}{k} = x_0 - \frac{4F_d}{k} \quad , \quad \dot{x}_2(\pi/\omega_n) = 0$$

دیده می‌شود که در هر سیکل نوسان به مقدار $\frac{4F_d}{k}$ از دامنه اولیه کم می‌گردد و این مقدار در هر نیم سیکل ثابت می‌ماند. این برخلاف حالت استهلاک ویسکوز است که در هر سیکل به صورت نمایی دامنه کم می‌شد.

همچنین دیده می‌شود که در نیم سیکل دوم حرکت جسم بصورت هارمونیک و حول وضعیت تعادل $-\frac{F_d}{k}$ صورت گرفته است. این نشانه دیگری از رفتار غیرخطی سیستم است.

حرکت در نیم سیکل‌های بعدی به همین صورت ادامه می‌یابد و فرکانس این نیم سیکل‌ها ω_n می‌گردد.
در هر نیم سیکل به اندازه $2F_d/k$ از دامنه کم می‌گردد. این کاهش تا زمانی که نیروی فنر kx کمتر از نیروی اصطکاک خشک F_d گردد و انرژی جنبشی نیز در سیستم نباشد (یعنی انتهای نیم سیکلی که سرعت صفر است) ادامه می‌یابد:

$$kx < F_d \Rightarrow x < F_d/k$$

در این حالت فنر توانایی رساندن جرم به حالت ابتدایی $x=0$ را نداشته و نیروی اصطکاک مانع از این امر می‌گردد، لذا سیستم در هر وضعیتی که قرار دارد می‌ایستد.

به ناحیه‌ای که بین $\frac{F_d}{k}$ و $-\frac{F_d}{k}$ بوده و در صورتی که در انتهای نیم سیکلی، جسم درون آن قرار داشته باشد ناحیه سکون (Stagnation Zone) گویند. در این صورت جسم در حالتی غیر از تعادل اولیه ساکن می‌گردد.

- هم چنین دیده می‌شود که زمان طی کردن ماکزیمم تغییر مکان تا تغییر مکان صفر با زمان مربوط به پیمودن تغییر مکان صفر تا ماکزیمم (مثبت و منفی) متفاوت است. بنابراین حرکت را نمی‌توان به صورت نوسانی و یا غیرنوسانی طبقه بندی کرد و نوسانی بودن آن غیرخطی است.

- به علاوه در اصطکاک ویسکوز در صورتی که اصطکاک زیاد باشد حرکت هارمونیک نخواهد بود. ولی در اصطکاک خشک اگر حرکت صورت پذیرد هارمونیک است.

- همچنین پوش منحنی در اصطکاک ویسکوز نمایی است ولی در اینجا خطی با شیب $-\frac{2F_d\omega_n}{\pi k}$ است.