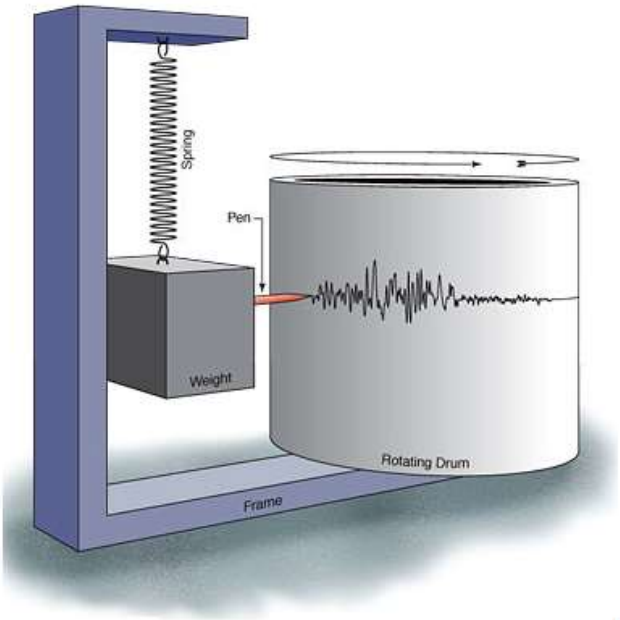
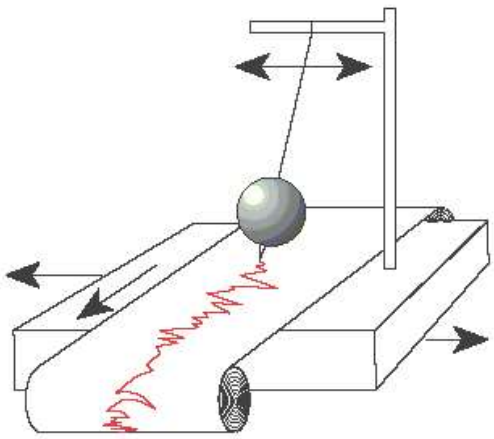
اندازه گیری ارتعاشات Vibration Measurement

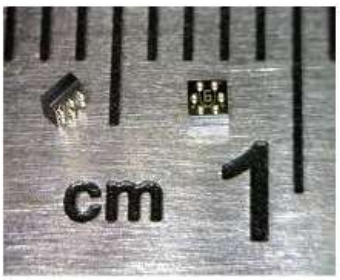
امروزه استفاده از وسایل اندازه‌گیری ارتعاشات توسعه زیادی یافته است. این وسایل در اندازه‌گیری ارتعاشات دستگاههای حساس و گران قیمت برخط و غیر برخط آنلاین و آفلاین کاربرد فراوانی دارند.

معمولاً از این وسایل در اندازه دامنه ارتعاش، سرعت و یا شتاب آن استفاده می‌شود.

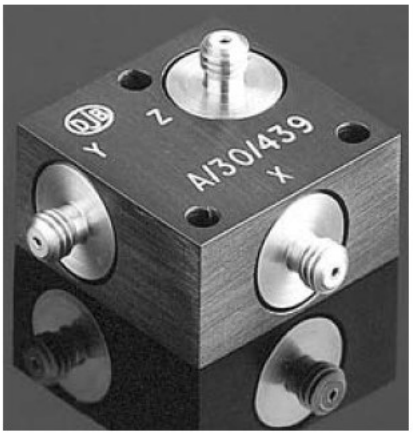
برخی از وسایل اندازه‌گیری ارتعاش را شکل‌های زیر ارائه شده اند.







mCube MC3571 1x1mm Accelerometer

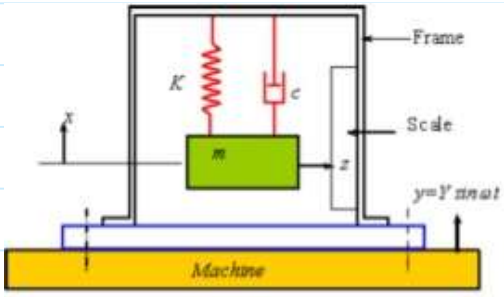


برای اندازه‌گیری ارتعاشات از وسایلی مانند شتاب‌سنج (Accelerometer) و یا سیسموتر (Seismometer) استفاده می‌شود.

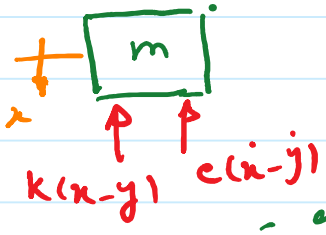
همه سیستم‌های اندازه‌گیری ارتعاشات دارای جرم و فنر بوده و بنابراین خود دارای فرکانس طبیعی ω_n می‌باشند. مشخصه اصلی وسایل اندازه‌گیری در ناحیه‌ای از دامنه فرکانس (نسبت به ω_n) است که از آنها استفاده می‌شود.

برای بیان طرز کار آنها از سیستم‌های یک درجه آزادی شروع می‌کنیم.

معمولاً یک ابزار اندازه‌گیری ارتعاشات نظیر شکل زیر است:



وسیله اندازه‌گیری به بدنه‌ای که حرکت آن را می‌خواهیم متصل می‌کنیم. حال فرض کنید که قبلاً در حرکت پایه دیدیم:



$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -k(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) = m\ddot{x} \quad (1)$$

قبلاً حل x را دیدیم. ولی در وسایل اندازه‌گیری ارتعاشات به x دسترسی نداریم، بلکه حرکت نسبی بین جرم m و بدنه را می‌توان اندازه گرفت.

بنابراین حرکت نسبی بین x و y را اندازه می‌گیریم. در صورتی که:

$$z = x - y \quad (2)$$

در این صورت:

$$\dot{z} = \dot{x} - \dot{y}, \quad \ddot{z} = \ddot{x} - \ddot{y} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{y} + \ddot{z}$$

از جایگذاری در رابطه (1):

$$-kz - c\dot{z} = m(\ddot{y} + \ddot{z})$$

$$\Rightarrow m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y} \quad (3)$$

و یا تقسیم بر m:

$$\ddot{z} + 2\omega_n\zeta\dot{z} + \omega_n^2 z = -\ddot{y} \quad (4)$$

در صورتی که حرکت پایه مغزم را بصورت $y=y_0 \sin \omega t$ فرض کنیم، معادله حرکت به صورت زیر است:

$$\ddot{z} + 2\omega_n \zeta \dot{z} + \omega_n^2 z = \omega^2 y_0 \sin \omega t \quad (5)$$

از حل این رابطه برای پاسخ پایدار z:

$$z = z_0 \sin(\omega t - \varphi)$$

$$z_0 = \frac{m\omega^2 y_0}{\sqrt{(K - m\omega^2)^2 + (C\omega)^2}} = \frac{\omega^2 y_0}{\sqrt{\frac{(K - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}{m}}}$$

$$= \frac{\omega^2 y_0}{\sqrt{(\frac{k}{m} - \omega^2)^2 + (\frac{c}{m}\omega)^2}} = \frac{\omega^2 y_0}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad (6)$$

با فاکتورگیری از ω_n^2:

$$z_0 = \frac{(\frac{\omega}{\omega_n})^2 y_0}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2 + (2\zeta\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

$$z_0 = \frac{r^2 y_0}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \qquad r = \frac{\omega}{\omega_n}$$

و یا از حالت بی بعد:

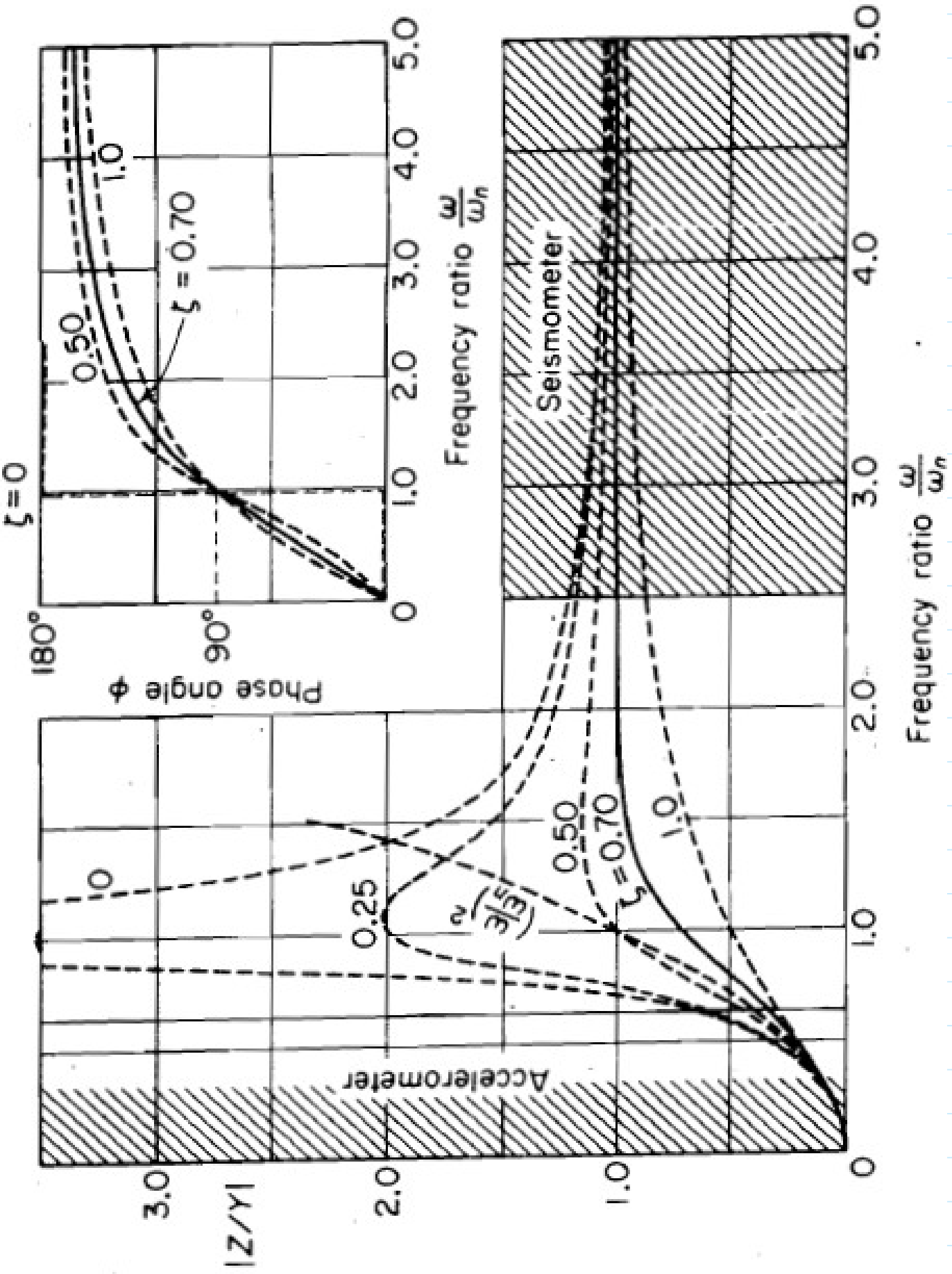
$$\frac{z_0}{y_0} = \frac{r^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad (7)$$

و همچنین ترتیب زاویه فاز:

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{2\zeta r}{1 - r^2} \quad (8)$$

در حالت مهم این رابطه را در نظر می‌گیریم که یکی لرزه‌نگار را می‌دهد و دیگری شتاب‌نگار را.

در صورتیکه پاسخ فرکانسی را هم کنیم، شکل زیر را خواهیم داشت :



لرزه‌نگار Seismometer

در اینجا جرم m مرتب می‌باشد و بدور یک سیم پیچ، پیچیده شده که با حرکت جرم اطراف آن جریان الکتریکی بوجود می‌آید و توسط سیم به خارج منتقل شده و در اندازه‌گیری استفاده می‌شود.

در صورتیکه در لحظه اولیه زمانی مقدار z مرتب باشد $\omega \gg \omega_0$ و $z \gg 1$

از رابطه (7) دیده می‌شود که:

$$\frac{z_0}{y_0} \longrightarrow 1 \Rightarrow \frac{z_0}{y_0} \simeq 1 \Rightarrow z \simeq y$$

$z \to \infty$

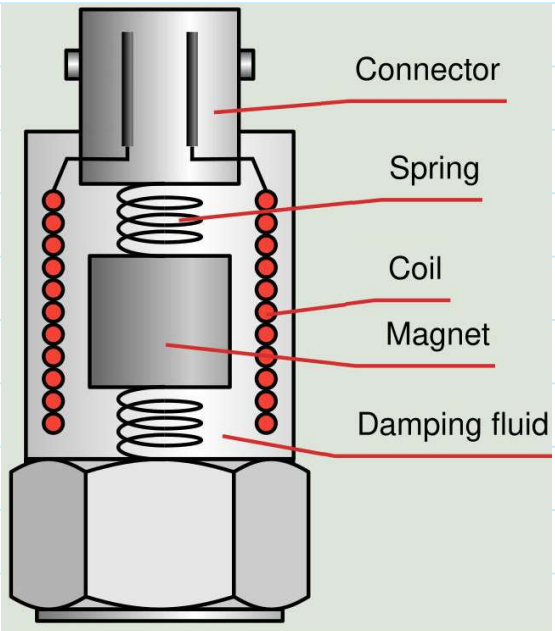
بنابراین حرکت y همان حرکت نسبی جرم m یعنی z می‌باشد. در این صورت دامنه جرم تقریباً ثابت مانده و بدنه سیموتر با اندازه‌گیری می‌رود. حرکت جرم باعث ایجاد ولتاژ الکتریکی در کویل می‌شود. این ولتاژ مستقیماً متناسب با سرعت یا به اینکه متناسب با بالا یا پائین رفتن z است.

$$V = Blz$$

که V ولتاژ القایی، B میدان مغناطیسی و l طول سیم پیچ است.

این ولتاژ را کالیبره کرده و به عنوان سرعت زمین نگار می‌کنند.

معمولاً در لرزه‌نگار، جرم m سنگین کرده و به همین علت به پائین است.



شتاب‌سنج Accelerometer

شتاب‌سنج طوری طراحی می‌شود که فرکانس طبیعی آن بسیار بزرگ‌تر بوده و فرکانس کاری نسبت به فرکانس طبیعی خیلی کوچک باشد، یعنی: $\omega \ll \omega_n$ یا $r \ll 1$

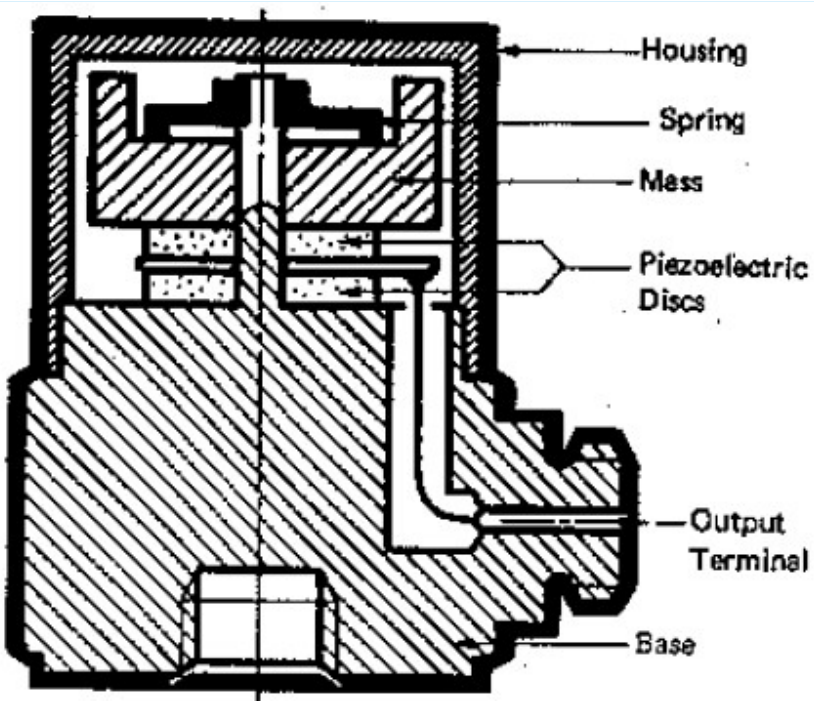
برای اندازه‌گیری می‌توان از شتاب‌سنج پیزوالکتریک استفاده کرد. در اینجا از یک کریستال پیزوالکتریک نخت به عنوان فنر استفاده می‌شود که متصل به یک جرم کوچک m می‌باشد. در اطراف فرکانس طبیعی می‌تواند نقش مهمی داشته باشد.

در رابطه (7) از صفحه قبل r خیلی کوچک باشد:

$$\frac{z_0}{y_0} \simeq r^2 = \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \Rightarrow z_0 \simeq \frac{1}{\omega_n^2}(\omega^2 y_0)$$

جابجایی نسبی جرم m نسبت به y و یا شتاب y می‌باشد.

وقتی کریستال پیزوالکتریک دارای تغییر فرم جهی ایجاد ولتاژ الکتریکی می‌کند که این ولتاژ متناسب با جهی است. با کالیبره کردن این ولتاژ می‌توان شتاب را اندازه‌گیری نمود.



نکاتی که در مراحل و استفاده از شتاب سنج می بایست رعایت نمود.

- شتاب سنج وسیله ای است که معمولاً در تمام انواع اندازه گیری های ارتعاش کاربرد دارد. در صورتیکه سرعت و یا جابجایی مورد نیاز باشد، با انتگرال گیری از شتاب می توان آنها را محاسبه نمود.

- در اندازه گیری شتاب، ابتدا می بایست شتاب سنجی را انتخاب نمود که دامنه فرکانس اندازه گیری ارتعاشات آن، فرکانس هایی را که می خواهیم پوشش دهد معمولاً دامنه فرکانس آنها بین 2^{Hz} تا 100^{kHz} است.)

برای سازه های فرکانس شتاب سنجهای با دامنه زیر 1^{Hz} نیز رایج است.

معمولاً دامنه حد بالای کار شتاب سنجها در حدود $\frac{1}{3}$ فرکانس تشدید انتخاب می گردد.

حداکثر دامنه شتابی که این شتاب سنجها اندازه گیری می کنند $(0.3 - 100000)g$ است.

همچنین با استفاده از شتاب سنجهای که محدوده شتاب را در سه جهت عمود بر هم اندازه گیری می کنند.

صافی پاسخ — Flatness of the response

همانطور که دیدیم شتاب سنج براساس تقریب پاسخ در فرکانس های پایین کم بوده که g را متناسب با شتاب پایه a_0 می دهد. آیا این تقریب تا چه حد قابل قبول است؟ به عبارت دیگر پاسخ تا کجا هموار است؟

پاسخ این سوال به خطا بستگی دارد که عبارت است از تفاوت بین پاسخ دقیق و تقریبی.

درصد خطا را نسبت اختلاف مقدار تخمینی $\frac{a_0}{\omega^2 y_0}$ و مقدار دقیق آن می نامیم:

$$\epsilon = \left.\frac{a_0}{\omega^2 y_0}\right|_{\text{اندازه گیری}} - \left.\frac{a_0}{\omega^2 y_0}\right|_{\text{رابطه (7)}}$$

در این صورت :

$$\epsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

$$= 1 - \left[(1+r^4-2r^2)+4\xi^2 r^2\right]^{-1/2} = 1 - \left[1+(4\xi^2-2)r^2+r^4\right]^{-1/2}$$

از جبر می دانیم که اگر $x<1$ باشد :

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{(1)(3)}{(2)(4)}x^2 - \frac{(1)(3)(5)}{(2)(4)(6)}x^3 + \cdots$$

در این صورت از لحاظ خطا برابر است با :

$$\epsilon = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}\left((4\xi^2-2)r^2+r^4\right) + \cdots\right]$$

در این از این حقیقت که r کوچک است استفاده کرده ایم. در صورتیکه از ارجاعات بالاتر از r^2 صرفنظر نکنیم خواهیم داشت :

$$\epsilon = 1 - \left[1 - \frac{1}{2}(4\xi^2-2)r^2 + O(r^4)\right]$$

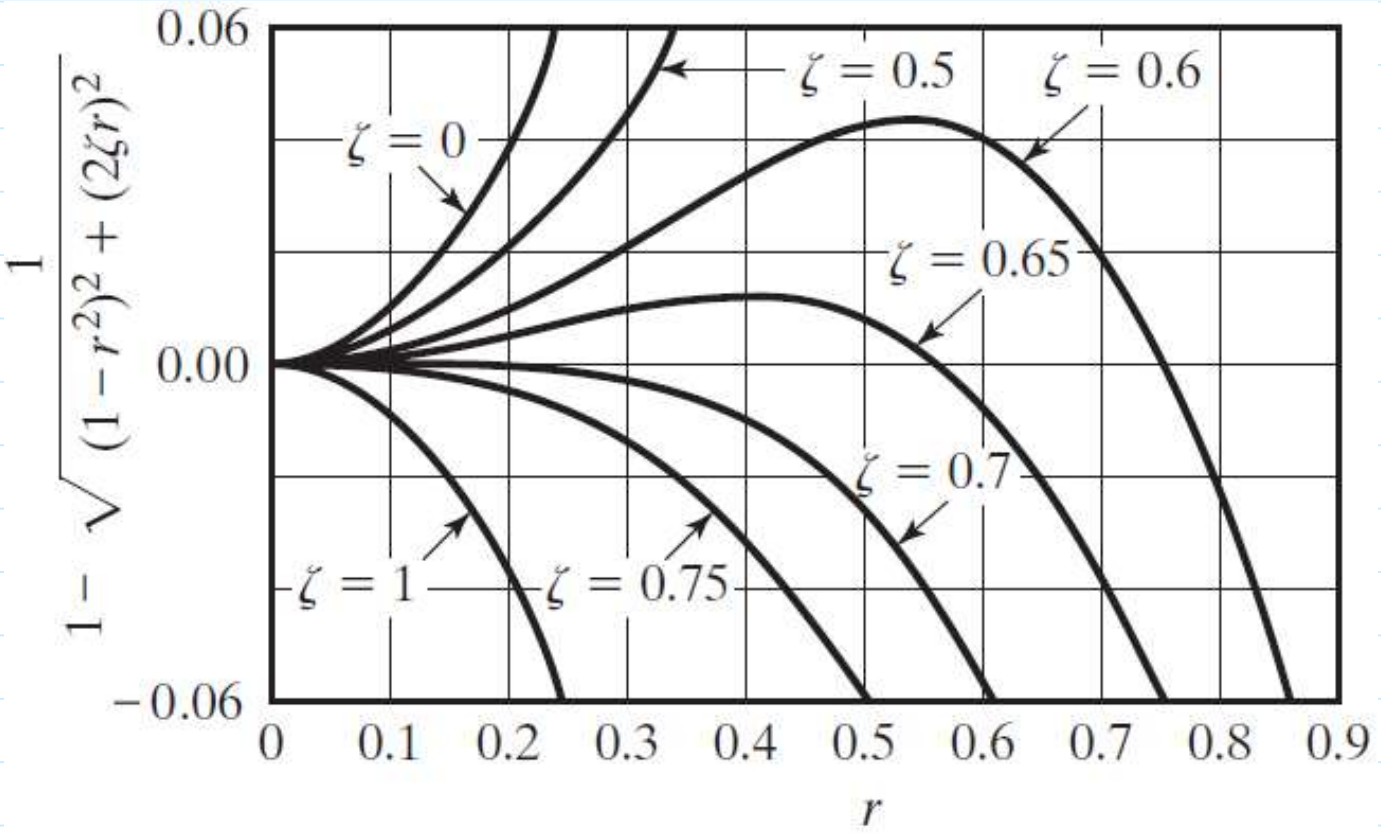
$$= (2\xi^2-1)r^2 + O(r^4)$$

برای آنکه خطا در یک محدوده بزرگ از فرکانس های r بیشتر گردد می بایست استهلاک را آنچنان انتخاب نمود که ضریب r^2 در لحاظ خطا صفر گردد. در این صورت :

$$2\xi^2 = 1 \rightarrow \xi = \sqrt{2}/2$$

بنابراین استهلاک بهینه برابر است با $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است که باعث می شود خطا در یک دامنه بزرگ از r کم شود.

به همین علت دستگاه هایی که از خاصیت الکترومغناطیس استفاده می کنند استهلاک را این مقدار در نظر می گیرند. اما در دستگاه های پیزوالکتریک به علت آنکه دارای استهلاک بسیار ضعیفی هستند، در نواحی 0.01 کار می کنند.



مثال: جسمی به جرم 20 kg بر پایه تحریک متصل شده است.

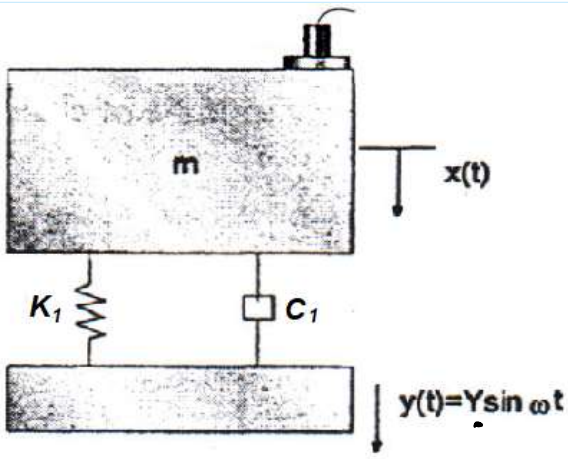
پایه دارای حرکت هارمونیک y است. در صورتیکه:

$K_1 = 1\times10^5\ N/m$, $c_1 = 600\ N/m/s$, $Y = 25\ mm$

$\omega = 40\ rad/s$,

مطلوبست تعیین خروجی سنسور با مشخصات:

$\omega_{na} = 25\ Hz$ و $\zeta = 0.2$



در صورتیکه z جابجایی بین جرم سنسور نسبت به بلوک و x جابجایی جرم بلوک باشد، x را بیابید:

$x = x_0 \sin(\omega t - \lambda)$, $\lambda = \alpha - \beta$

$y = y_0 \sin \omega t = 25 \sin 40t$ mm

$z(t) = z_0 \sin(\omega t - \phi - \lambda)$

ϕ اختلاف فاز بین سنسور و بلوک است.

فرکانس طبیعی مکرر و نسبت امپدانس:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 70.7 \ rad/s$$

$$\xi_1 = \frac{c_1}{2m\omega_n} = 0.212$$

$$r_1 = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{40 \ rad/s}{70.7 \ rad/s} = 0.566$$

$$\Rightarrow X_0 = \left[\frac{1+(2\xi_1 r_1)^2}{(1-r_1^2)^2+(2\xi_1 r_1)^2}\right]^{1/2} y_0 = 35.7 \ mm$$

$$\lambda = \alpha - \beta \ , \ \alpha = \tan^{-1}\frac{2\xi_1 r_1}{1-r_1^2} \ , \ \beta_1 = \tan^{-1} 2\xi_1 r_1$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 19.45^\circ = 0.3394 \ rad \\ \beta &= 13.49^\circ = 0.2355 \ rad \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = 0.104 \ rad$$

$$\Rightarrow x(t) = 35.7 \sin(40t - 0.104) \ mm$$

مثال ـ مقدار پاسخ ماندگار جرم را می‌یابیم:

$$r_2 = \frac{\omega}{\omega_{na}} = \frac{40 \ rad/s}{25 \ c/s \ (2\pi \ rad/c)} = 0.255 \ , \ \xi_a = 0.2$$

$$\Rightarrow Z_0 = \frac{r_2^2}{\sqrt{(1-r_2^2)^2+(2\xi_a r_2)^2}} y_0 = 2.47 \ mm$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\xi_a r_2}{1-r_2^2} = 0.109 \ rad$$

$$\Rightarrow Z(t) = 2.47 \sin(40t - 0.213) \ mm$$

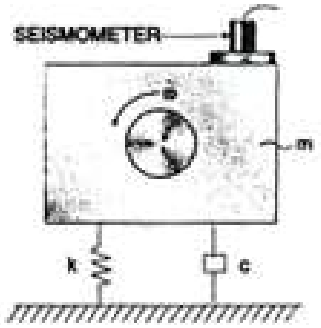
خروجی شتاب نیز که برابر $\ddot{x} = \omega^2 x$ است می‌باشد.

$$\omega_{na}^2 Z(t) = (25 \times 2\pi)^2 (2.47) \sin(40t - 0.213)$$

$$= 60944.8 \sin(40t - 0.213) \ mm/s^2$$

خروجی شتاب جرم

ماشین خیاطی صنعتی به جرم 550^{Kg} دارای نامیزانی دورانی به مقدار $0.24^{Kg.m}$ می باشد. ماشین در سرعت دورانی 2000^{rpm} تا 3000^{rpm} کار می کند. این ماشین بر روی ایزولاتوری به سختی $k=5\times10^{6}\ N/m$ و نسبت استهلاک $\zeta=0.12$ قرار گرفته است. مطلوب است تعیین:



الف- ماکزیمم فرکانس طبیعی لرزه نگاری (Seismometer) را که میتوان جهت اندازه گیری ارتعاشات پایدار در همه سرعتهای کاری به گونه ای بکار برد که خطای آن کمتر از 4% باشد. لرزه نگار را بدون میرایی در نظربگیرید.

ب- خروجی لرزه نگار در صورتی که ماشین دردور 2500^{rpm} کار کند.

Y_0 دامنه‌ی ماشین و Z_0 دامنه‌ی نسبی لرزه‌نگار است. در این صورت:

$$\frac{Z_0}{Y_0}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}},\quad \zeta=0 \Rightarrow \frac{Z_0}{Y_0}=\frac{r^2}{1-r^2}$$

برای لرزه‌نگار $r\gg1$ است. در این صورت $\frac{Z_0}{Y_0}\simeq1$ است. آیا این تقریب خطا دارد که در اینجا گفته شده از 0.04 کمتر باشد

$$\Rightarrow \frac{r^2}{r^2-1}\le 1.04 \Rightarrow r^2\le 1.04r^2-1.04$$

$$\Rightarrow r\ge 5.99,\quad r=\frac{\omega}{\omega_{n_s}} \Rightarrow \omega_{n_s}\le\frac{\omega}{5.99}$$

اگر برای ω از 3000^{rpm} استفاده کنیم تقریب دورتر و کمتر بالاتر از $\frac{Z_0}{Y_0}=1.04$ قرار می‌گیرد و این غیر قابل قبول است. بنابراین

$$\omega_{n_s}\le\frac{2000(2\pi/60)}{5.99} \Rightarrow \omega_{n_s}\le 41.07$$

حداکثر فرکانس طبیعی لرزه‌نگار

ب - اندازه‌ی دامنه‌ی Y_0 مربوط به چرخ خیاطی را در اثر جرم نامتعادل به دست می‌آوریم:

$$Y_0=\frac{\frac{me}{M}r_1^2}{\sqrt{(1-r_1^2)^2+(2\zeta r_1)^2}},\quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{M}}=\sqrt{\frac{5\times10^6}{550}}=95.346\ rad/s$$

$$\Rightarrow r_1=\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{2500(2\pi/60)}{95.346}=2.746,\quad \zeta=0.12$$

$$\Rightarrow Y_0=5\times10^{-4}\ m$$

حال می‌توان خروجی لرزه‌نگار را اندازه گرفت:

$$\frac{z_0}{y_0} = \frac{r_2^2}{r_2^2 - 1} \quad , \; r_2 = \frac{\omega}{\omega_{ns}} = \frac{2500(2\pi/60)}{41.07} = 6.374$$

$$\Rightarrow z_0 = \frac{6.374^2}{6.374^2 - 1}(5\times10^{-4}) = 5.132\times10^{-4}\ m$$