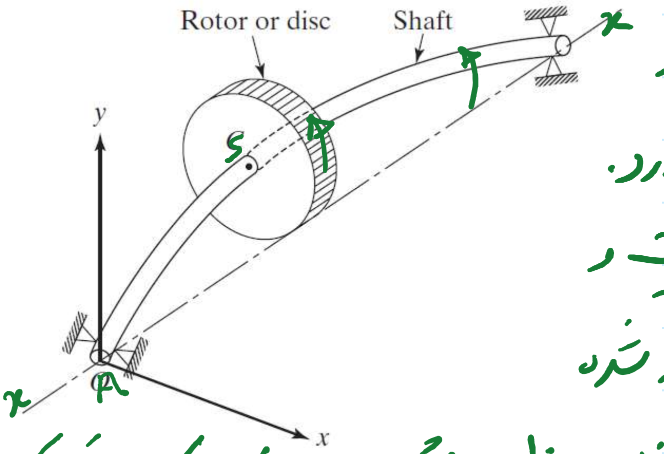
Critical Speed of Rotating Shafts سرعت بحرانی محورهای دوار

اغلب محورهای دوار در سرعتهای معینی شروع به ارتعاش (لنگ زدن) می‌کنند که در آن دامنه ارتعاش مقدار زیادی بوده و اگر ادامه یابد ممکن است باعث شکستگی محور و یا خرابی یاتاقانها و در نتیجه خسارت زیادی به دستگاه گردد. سرعت دورانی که محورهای دوار با دامنه بزرگ نوسان می‌کنند، سرعت و یا دور بحرانی می‌نامند.



در حالت راستی محور، یاتاقانها در امتداد محور قرار می‌گیرد و از مرکز هندسی آن می‌گذرد. اما مرکز ثقل دیسکهای مواد همیشه یکنواخت نیست و در ساخت محور احتمالاً اعوجاج یا دقتهای خواسته شده رعایت نمی‌شود. لذا مرکز ثقل بر مرکز هندسی منطبق نمی‌شود. این فاصله که بسیار کوچک است اعم از اینکه در محور دیسک و یا پروانه‌هایی مانند پره‌های توربین، کمپرسور و ... وجود داشته باشد، مسئله دور بحرانی اهمیت زیادی پیدا می‌کند.

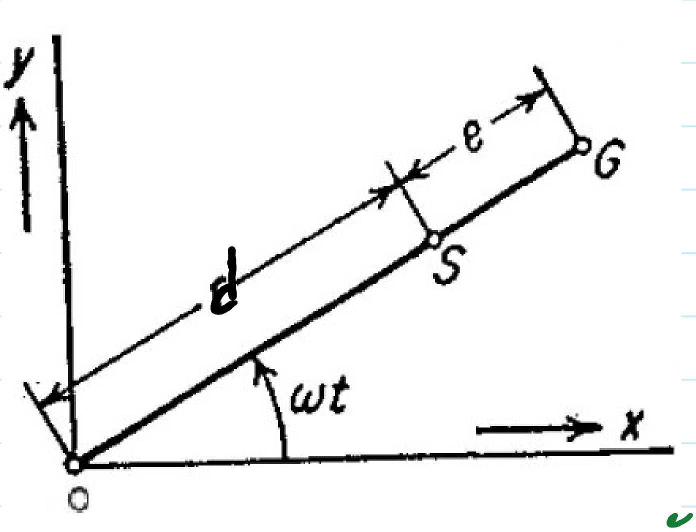
محور شکل بالا را در نظر بگیرید:

- هنگامی که محور حول محور x-x با سرعت ω دوران می‌کند، مرکز ثقل G که خارج از مرکز است محور را به سمت دور شدن از x-x می‌کشد و باعث می‌گردد که در حین دوران محور به صورت قوسی در آید. این پروسه بنام لنگ زدن (Whirling) نامیده می‌شود. اگر محوری را در نظر بگیریم که دیسک در وسط آن قرار دارد سختی خمشی محور برابر است با:

$$K=\frac{48EI}{l^3}$$

ـ حالت دوران استاتیک

اگر صفحه تقاطع دیسک، محور و امتداد x-x را درنظر بگیریم:



S = مرکز هندسی دیسک

G = مرکز ثقل دیسک

e = SG = خروج از مرکز

x-x = امتداد محور یاتاقانها

O = نقطه برخورد امتداد یاتاقانها با صفحه دیسک

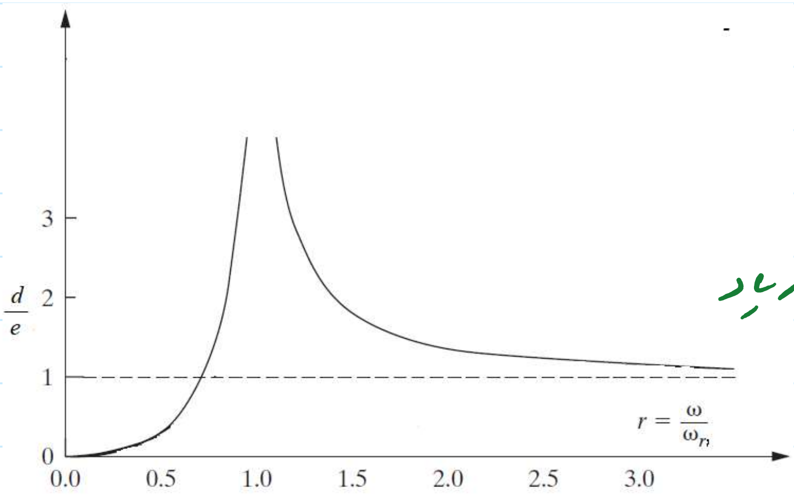
در صفحه، حرکت مرکز جرم بدور نقطه O را درنظر بگیریم:

$$\sum F_n = m\bar{a}_n$$

$$Kd = m\,\overline{OG}\,\omega^2 = m(d+e)\omega^2$$

$$\Rightarrow d(K - m\omega^2) = me\omega^2 \Rightarrow d = \frac{me\omega^2}{K - m\omega^2} = \frac{\frac{m\omega^2 e}{K}}{1 - \frac{m\omega^2}{K}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} e \Rightarrow d = \frac{r^2}{1 - r^2} e$$



که $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی

(طبیعی) سیستم است.

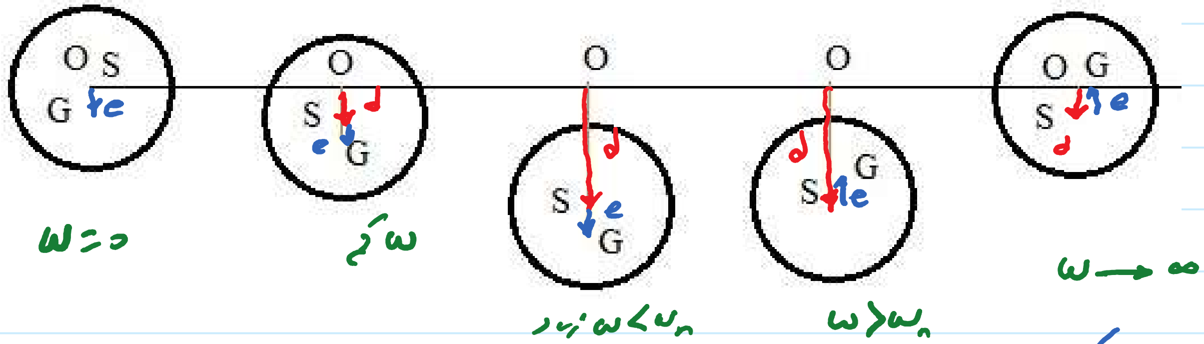
در $r = 1$ دامنه به مقادیر خیلی زیاد

میل میکند.

$r \to \infty \Rightarrow d \to e$

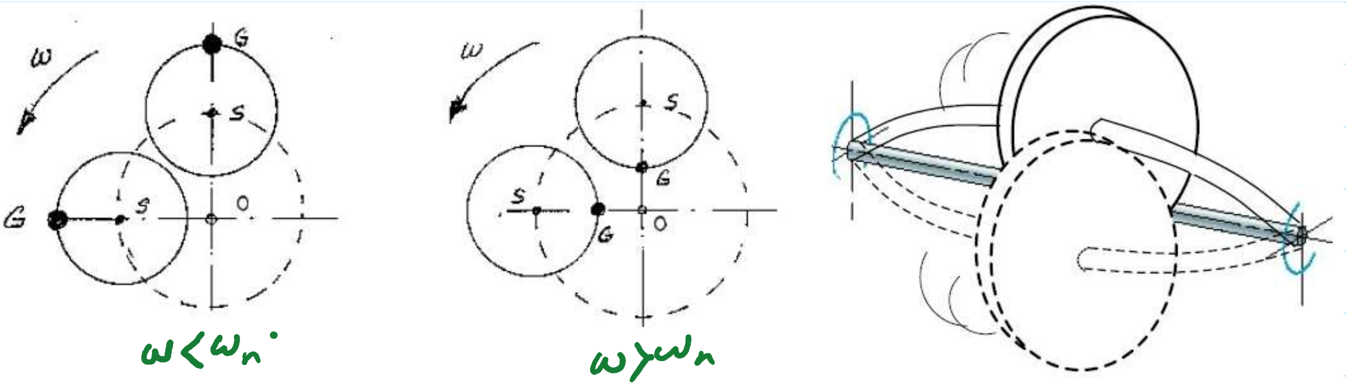
در حالتی که ω از صفر زیاد می‌گردد مقدار d به سمت e میل کرده و اختلاف فاز ۱۸۰ است یعنی d در خلاف جهت e است.

حالات زیر را در نظر بگیرید:



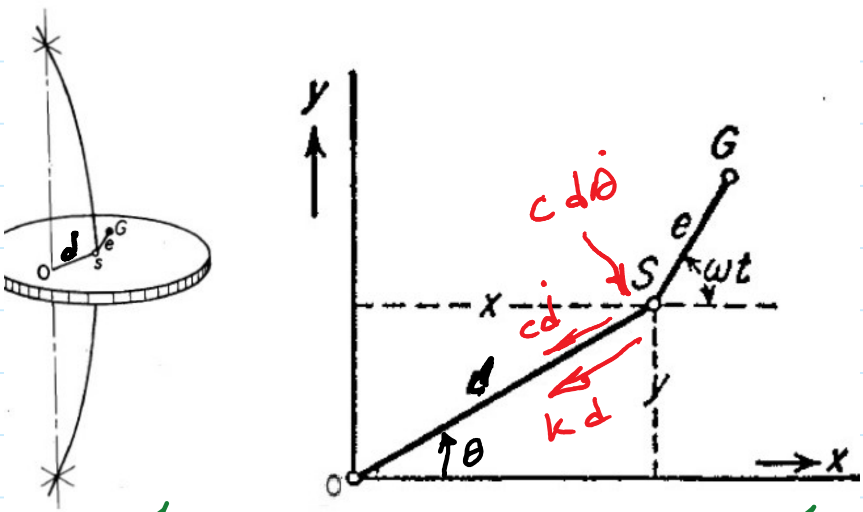
- در حالت استاتیکی O و S بر هم منطبق هستند.
- در ω های کم d مقدار کمی پیدا کرده و هم جهت با e است و G در بیرون فاصله OS قرار داشته، سنگینی روتور را به سمت بیرون محور می‌کشد.
- با افزایش ω، مقدار d نیز زیاد می‌شود.
- در صورتی که $\omega > \omega_n$ شود، مقدار d ثابت بوده ولی جهت SG خلاف OS است و در نتیجه سنگینی روتور را به سمت محور یاتاقانها (O) می‌کشد.
- در دورهای بالا مقدار d به سمت e رفته ولی در خلاف جهت آن، بنابراین O و G منطبق شده که همان چیزی است که از ابتدا می‌خواستیم ولی به علت نامتعادل بودن آن را نمی‌توانستیم به دست آوریم.
- بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برای رفع مشکل نامتعادل بودن سیستم، بهترین کار افزایش ω نسبت است. پیدا است گفته‌ایم که r مثلاً بزرگتر از 3 باشد.
- دیده می‌شود که این مسئله بسیار شبیه جرم نامتعادل است، با این تفاوت که در اینجا تمام جرم نامتعادل است.

دو حالت سرعت دوران کمتر و بیشتر از . در شکل زیر نمایش داده شده است:



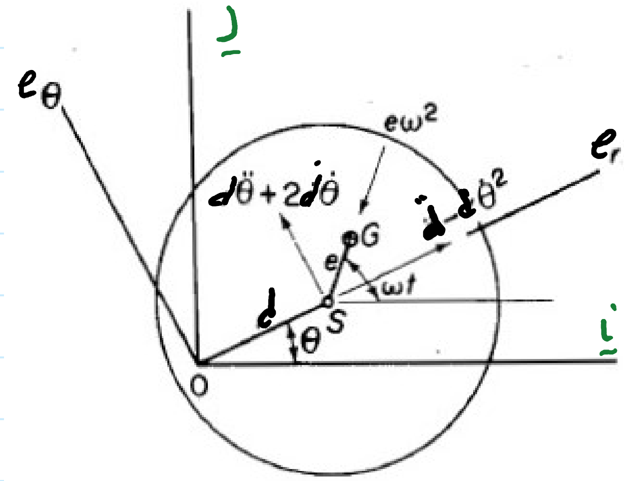
سرعت بحرانی محورهای دوار با اصطکاک:

اصولاً در داخل محورها به علت اصطکاک ساختاری محور الاستیک ایده‌آل نخواهیم داشت. مقدار قابل توجهی اصطکاک خشک نیز در یاتاقان‌ها وجود دارد که آن نیز عامل بازدارنده‌ای است. برای سیستم‌های دوار مانند فن‌ها و کمپرسورها نیز مسئله مقاومت هوا حائز اهمیت است. مجموعه این نیروهای مقاومتی را می‌توان به صورت اصطکاک ویسکوز معادل در یک سیستم متمرکز نمود. اگر مدل قبلی را به همراه نیروی اصطکاک در نظر بگیریم.



در این حالت دیگر OS و SG در یک راستا نبوده و OS به علت اصطکاک از دوران دیسک عقب می‌ماند.

در ادامه بقیه از سیستم مختصات قبلی مطابق شکل صفحه بعد استفاده کنیم.



برای نوشتن قانون دوم نیوتن به شتاب مرکز ثقل نیاز داریم که آنرا با استفاده از تحقیقات قبلی می‌توان نوشت:

$$\underset{\sim}{a}_G = \underset{\sim}{a}_S + \underset{\sim}{a}_{G/S}$$

$$\underset{\sim}{a}_S = a_r \underset{\sim}{e}_r + a_\theta \underset{\sim}{e}_\theta = (\ddot d - d\dot\theta^2)\underset{\sim}{e}_r + (d\ddot\theta + 2\dot d\dot\theta)\underset{\sim}{e}_\theta$$

$$\underset{\sim}{a}_{G/S} = -e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\,\underset{\sim}{e}_r - e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\,\underset{\sim}{e}_\theta$$

مرکز ثقل حول مرکز هندسی دوران می‌کند و بنابراین شتاب ثابت به مرکز دارد.

$$\Rightarrow \underset{\sim}{a}_G = \left[(\ddot d - d\dot\theta^2) - e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\right]\underset{\sim}{e}_r + \left[(d\ddot\theta + 2\dot d\dot\theta) - e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\right]\underset{\sim}{e}_\theta$$

از نوشتن قانون دوم نیوتن:

$$\sum \underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}_G$$

نیروهای وارده همانطور که در صفحه قبل نشان داده شده ناشی از:

- نیروی برگشت دهنده تیر محور Kd
- نیروی مقاوم استهلاکی $c\underset{\sim}{V}_S$ که:

$$\underset{\sim}{V}_S = \dot d\,\underset{\sim}{e}_r + d\dot\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta \Rightarrow \underset{\sim}{F}_c = c\underset{\sim}{V}_S = c\dot d\,\underset{\sim}{e}_r + cd\dot\theta\,\underset{\sim}{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -Kd - c\dot d = m\left[(\ddot d - d\dot\theta^2) - e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\right] \\ -cd\dot\theta = m\left[(d\ddot\theta + 2\dot d\dot\theta) - e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\right] \end{cases}$$

از مرتب کردن این روابط:

$$\ddot d + \frac{c}{m}\dot d + \left(\frac{k}{m} - \dot\theta^2\right)d = e\omega^2\cos(\omega t-\theta)$$

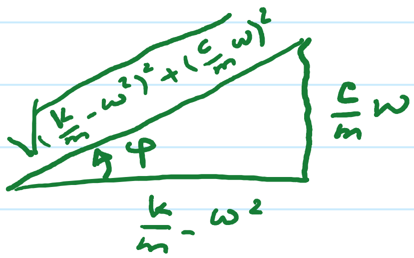
$$d\ddot\theta + \left(2\dot d + \frac{c}{m}d\right)\dot\theta = e\omega^2\sin(\omega t-\theta)$$

اینها دو معادله دیفرانسیل غیرخطی و ناهمگن مرتبه دو هستند که حل آنها در چارچوب این درس نمی‌گنجد. برای حل حالت پایدار سیستم را که در آن $\dot{\theta}=\omega$ و $\ddot{\theta}=\dot{d}=\ddot{d}=0$ است، در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلات قبلی بصورت زیر ساده می‌شوند.

$$\begin{cases}\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)d = e\omega^2\cos\varphi \\ \frac{c}{m}d\,\omega = e\omega^2\sin\varphi\end{cases} \quad , \quad \varphi=\omega t-\theta$$

در این صورت:

$$d\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{c}{m}\omega\right)^2}=e\omega^2$$

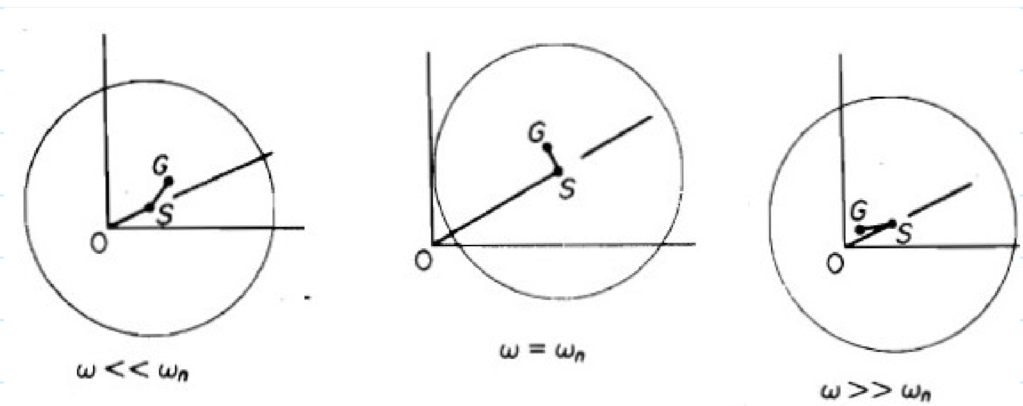


$$d=\frac{e\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad , \quad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$d=\frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}\,e$$

$$d=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\,e \quad , \quad r=\frac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \varphi=\tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

چند حالت این رابطه در زیر نمایش داده شده است:



در این شکل در دورهای پایین G در خارج از فاصله OS بوده و φ مقدار کمی دارد. در $\omega=\omega_n$ مقدار $\varphi=\frac{\pi}{2}$ است و $d=OS$ زیاد می‌شود. در دورهای بالا مقدار d به سمت e میل کرده و $\varphi\to\pi$، بنابراین G به سمت O می‌رود.

مثال: دیسکی بجرم 4^{kg} در وسط محوری بطول 48^{cm} محکم شده است. در دو انتهای محور یاتاقان‌ها ساده قرار دارند. محور از جنس فولاد با $E=1.96\times10^{11}\ N/m^2$ بوده و 9^{mm} قطر دارد. مرکز ثقل دیسک با مرکز هندسی آن 3^{mm} فاصله دارد. استهلاک ویسکوز معادل مرکز دیسک $49\ N/m/s$ فرض شده است. اگر محور در دور 760^{rpm} بگردد، مطلوبست تعیین ماکزیمم تنش در محور و مقایسه با هنگامی که محور فقط وزن را تحمل می‌کند.

$79.54\ rad/s$

ابتدا سختی ترکیبی محور، فرکانس طبیعی و ضریب استهلاک را حساب می‌کنیم:

$$K=\frac{48EI}{\ell^3}=\frac{48(1.96\times10^{11})(\frac{\pi}{64}(9\times10^{-3})^4)}{(0.48)^3}=27397.66\ N/m$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{m}}=82.8\ rad/s \qquad r=\frac{\omega}{\omega_n}=0.9612$$

$$\zeta=\frac{c}{2\sqrt{km}}=0.074$$

با این مقادیر d محاسبه می‌گردد:

$$d=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\,e=17.04\ mm$$

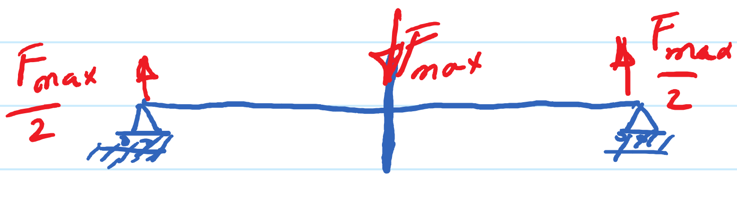
برای محاسبه تنش خمشی در محور، نیروی فنریت و استهلاک وارد بر محور را حساب کرده و سپس ممان خمشی را بدست آورده و در معادله تنش خمشی قرار می‌دهیم:

$$R_D=\sqrt{k^2+(c\omega)^2}\,d=471.56\ N$$

$$R_s=mg=39.2\ N$$

نیروی استاتیکی ناشی از وزن

$$F_{max}=R_D+R_s=510.8\ N$$



نیز برایش :

$$M_{max} = \frac{F_{max}}{2} \times \frac{l}{2}$$

تنش خمشی عبارت است از :

دینامیکی

$$\sigma_{xD} = \frac{M_{max} \frac{d}{2}}{I} = \frac{\left(\frac{F_{max}}{2} \frac{l}{2}\right) \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = 8.54 \times 10^{8} \ N/m$$

استاتیکی

$$\sigma_{xS} = \frac{M_{st} \cdot \frac{d}{2}}{I} = \frac{\left(\frac{R_S}{2} \frac{l}{2}\right) \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = 6.59 \times 10^{7} \ N/m$$

همچنین نیروی استهلاکی سیستم عبارت است از :

$$F_d = c \omega d = 66.45 \ N$$

گشتاور استهلاکی ناشی از این نیرو :

$$T = F_d \cdot d = 1.132 \ N.m$$

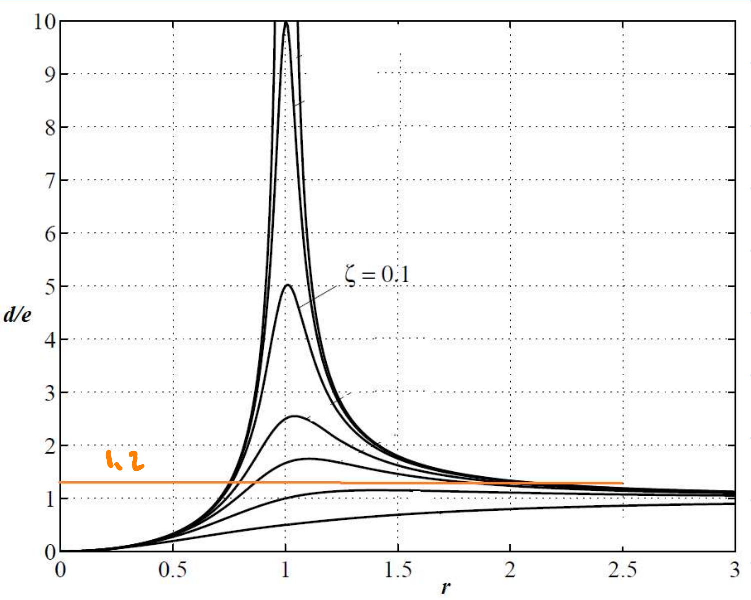
و توان مصرفی :

$$P = T . \omega = 90.1 \ W$$

مثال :

دیسکی به جرم 30 kg دارای خروج از مرکز 0.5 mm بوده و در وسط محوری به طول یک متر از جنس فولاد و دارای مدول یانگ $200\times10^{9}\ N/m^2$ قرار دارد. در صورتیکه نسبت استهلاک سیستم 0.1 باشد، مطلوبست تعیین قطر محور به نحوی که میزان دامنه لنگ زدن از 0.6 mm تجاوز نکند. سرعت دوران محور بین 1000 rpm تا 2000 rpm می باشد.

$209.44\ rad/s$ $104.72\ rad/s$



از منحنی پاسخ فرکانس

$$\frac{d}{e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

$$\frac{d}{e} = \frac{0.6}{0.5} = 1.2$$

برای بدست آوردن قطر محور از منحنی پاسخ فرکانس، r دو تا را بدست می آوریم که در زیر تقاطع خط افقی با منحنی $\zeta=0.1$ می باشند. با بدست آوردن r ها، ω_n ها بدست آمده و از روی آن K و سپس قطر D بدست می آید.

$$1.2 = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \Rightarrow 1.44 = \frac{r^4}{(1+r^4-2r^2)+0.04r^2}$$

$$\Rightarrow r^4 = 1.44 + 1.44r^4 - 2.88r^2 + 0.0576r^2$$

$$\Rightarrow 0.44r^4 - 2.822r^2 + 1.44 = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} r_1 = 0.7476 \\ r_2 = 2.4198 \end{cases}$$

$$r_1 = 0.7476 \geq \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n \geq \frac{\omega}{r} = \frac{209.44}{0.7476} = 280.15\ rad/s$$

چرا؟

$$K = m\omega_n^2 = 2.3545\times10^6\ N/m$$

$$K = \frac{48EI}{l^3} \Rightarrow I = \frac{Kl^3}{48EI} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{64 K \ell^3}{48 \pi E}} = 0.04728 \ m = 47.28 \ mm$$

حداقل قطر

درصورتیکه r_2 انتخاب شود:

$$r_2 = 2.4198 \leq \frac{\omega}{\omega_n}$$

چرا؟

$$\Rightarrow \omega_n \leq \frac{\omega}{r_2} = \frac{104.72}{2.4198} = 43.28 \ rad/s$$

$$K = m \omega_n^2 = 5.6184 \times 10^4 \ N/m$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{4}{3} \frac{K \ell^3}{\pi E}} = 0.01858 \ m = 18.58 \ mm$$

حداکثر قطر