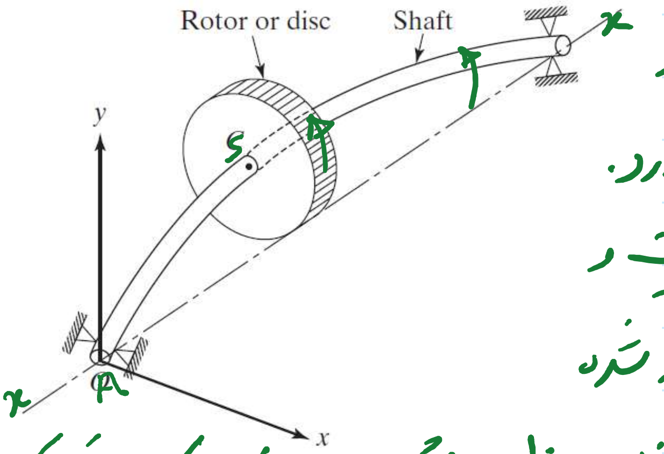
سرعت بحرانی محورهای دوار — Critical Speed of Rotating Shafts

اغلب محورهای دوار در سرعتهای معینی شروع به ارتعاش (لنگ زدن) می‌کنند که در آن دامنه ارتعاش مقدار زیادی بوده و اگر ادامه یابد ممکن است باعث شکستگی محور و یاطاقانها یاتاقانها و در نتیجه خسارت زیادی به دستگاه گردد. سرعت دورانی که محورهای دوار با دامنه بزرگ نوسان می‌کنند، سرعت و یا دور بحرانی می‌نامند.



در حالت راستی محور یاتاقانها در امتداد محور تقارن صفحه بوده و از مرکز هندسی آن می‌گذرد. اما مرکز ثقل مواد صفحه یکنواخت نیست و در ساخت محور احتمالاً اعوجاج با دقتهای خواسته شده رعایت نمی‌شود. لذا مرکز ثقل بر مرکز هندسی منطبق نمی‌شود. این فاصله که بسیار کوچک است، چنانچه در محور دیسک و یا پروانه‌هایی مانند پره‌های توربین، کمپرسور و ... وجود داشته باشد، مسئله دور بحرانی اهمیت زیادی پیدا می‌کند.

محور شکل بالا را در نظر بگیرید:

- هنگامی که محور حول محور x-x با سرعت ω دوران می‌کند، مرکز ثقل G که خارج از مرکز است محور را به سمت دور شدن از x-x می‌کشد و باعث می‌گردد که در حین دوران محور به صورت قوس در آید. این پروسه بنام لنگ زدن (Whirling) نامیده می‌شود. اگر محوری را در نظر بگیریم که دیسک در وسط آن قرار دارد سختی خمشی محور برابر است با:

$$k = \frac{48EI}{l^3}$$

ـ حالت دوران استاتیک

اگر صفحه‌ی مقطع دیسک، محور و امتداد x-x را در نظر بگیریم:

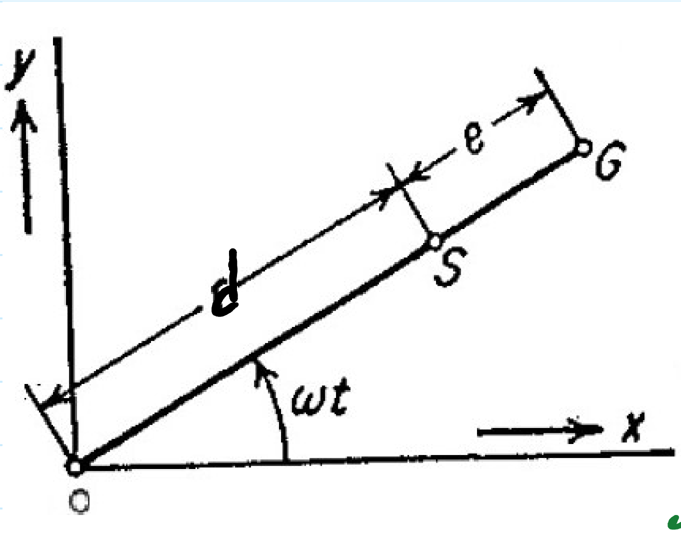
s = مرکز هندسی دیسک

G = مرکز ثقل دیسک

e = SG = خروج از مرکز

x-x = امتداد محور یاتاقان‌ها

O = نقطه‌ی برخورد امتداد یاتاقان‌ها با صفحه‌ی دیسک



در صفحه‌ی حرکت مرکز جرم بدور نقطه‌ی O را در نظر بگیریم:

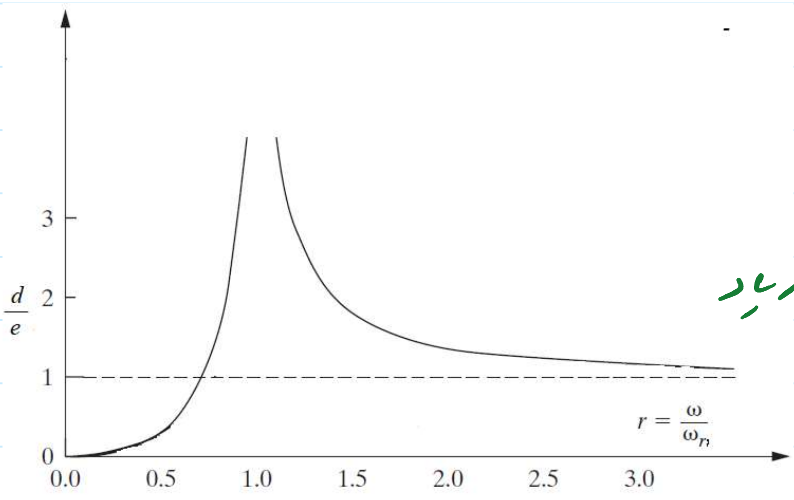
$$\sum F_n = m\bar{a}_n$$

$$Kd = m\,\overline{OG}\,\omega^2 = m(d+e)\omega^2$$

$$\Rightarrow d(K - m\omega^2) = me\omega^2 \Rightarrow d = \frac{me\omega^2}{K - m\omega^2} = \frac{\frac{m\omega^2 e}{K}}{1 - \frac{m\omega^2}{K}}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} e \Rightarrow d = \frac{r^2}{1 - r^2} e$$

که $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس طبیعی (بحرانی) سیستم است.

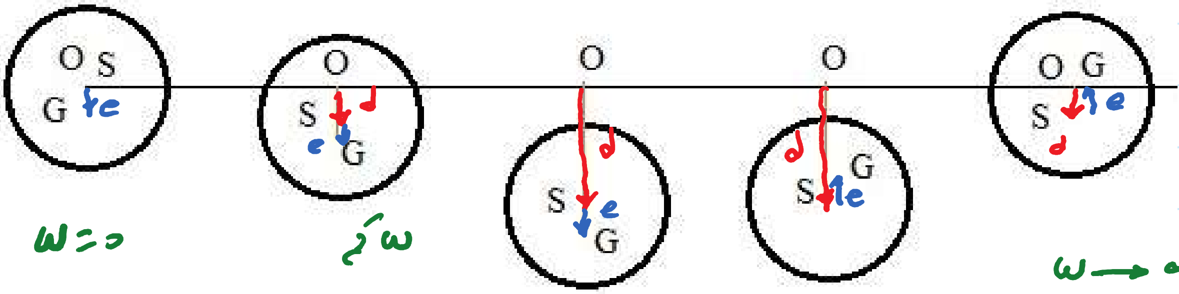


در $r=1$ دامنه به مقادیر خیلی زیاد میل می‌کند.

$$r \to \infty \Rightarrow d \to e$$

در حالتی که ω زیاد می‌گردد مقدار d به سمت e میل کرده و اختلاف فاز π است یعنی d در خلاف جهت e است.

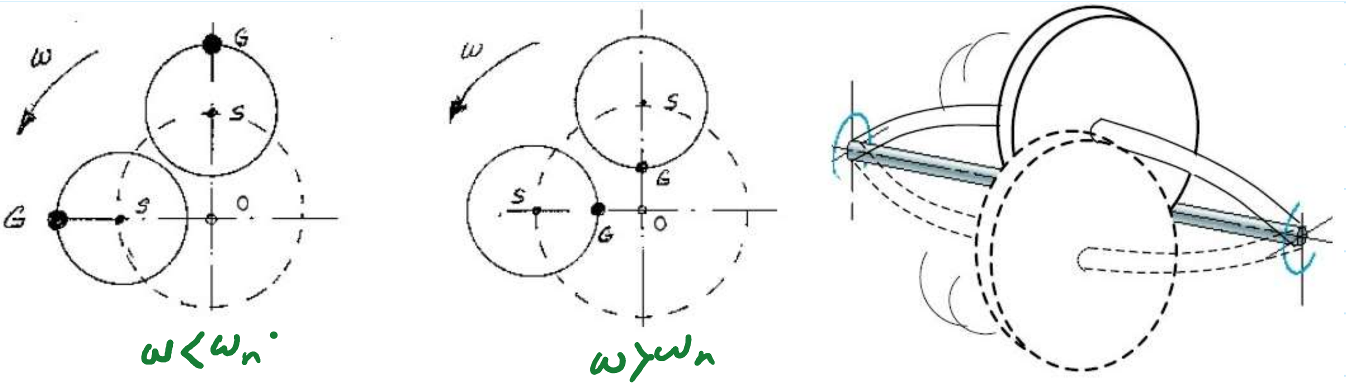
حالات زیر را در نظر بگیرید:



$\omega=0$ ω کم $\omega<\omega_n$ زیاد $\omega>\omega_n$ $\omega\to\infty$

- در حالت استاتیکی O و S و G بر هم منطبق هستند.
- در ωهای کم d مقدار کمی پیدا کرده و هم جهت با e است و G در بیرون فاصله OS قرار داشته، سنگینی روتور را به سمت بیرون می‌کشد.
- با افزایش ω، مقدار d نیز زیاد می‌شود.
- در صورتیکه $\omega=\omega_n$ شود، مقدار d ∞ شده ولی جهت SG خلاف OS است و در نتیجه سنگینی روتور را به سمت محور یاتاقانها (O) می‌کشد.
- در دورهای بالا مقدار d به سمت e رفته ولی در خلاف جهت آن، بنابراین O و S منطبق شده که همان چیزی است که از ابتدا می‌خواستیم ولی به علت نامتعادل بودن آن را نمی‌توانستیم به دست آوریم.
- بنابراین مهندسان نتیجه گرفتند که برای رفع مشکل نامتعادل بودن سیستم، بهترین کار افزایش ω نسبت به ω_n است. پیدا است بهینه این است که r حداقل بزرگتر از 3 باشد.
- دیده می‌شود که این مسئله بسیار شبیه جرم نامتعادل است، با این تفاوت که در اینجا تمام جرم نامتعادل است.

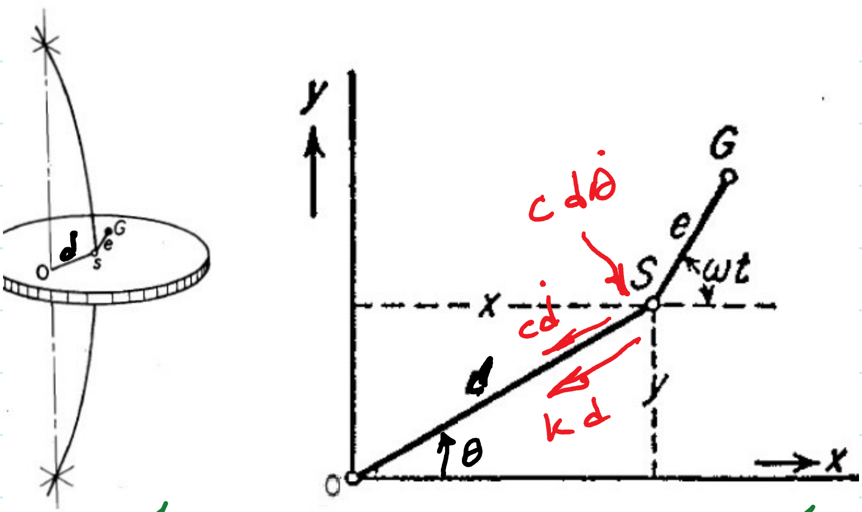
در حالت سرعت دوران کمتر و بیشتر از ω_n در شکل زیر نمایش داده شده است:



سرعت بحرانی محورهای دوار با استهلاک:

اصولاً در داخل محورها به علت استهلاک سازه‌ای محور الاستیسیته ایده آل نخواهیم داشت. مقدار قابل توجهی اصطکاک خشک نیز در یاتاقان‌ها وجود دارد که آن نیز عامل بازدارنده‌ای است. برای سیستم‌های دوار مانند فن‌ها و کمپرسورها نیز مسئله مقاومت هوا حائز اهمیت است. مجموعه این نیروهای مقاومتی را می‌توان به صورت استهلاک ویسکوز معادل در یک سیستم متمرکز کرد.

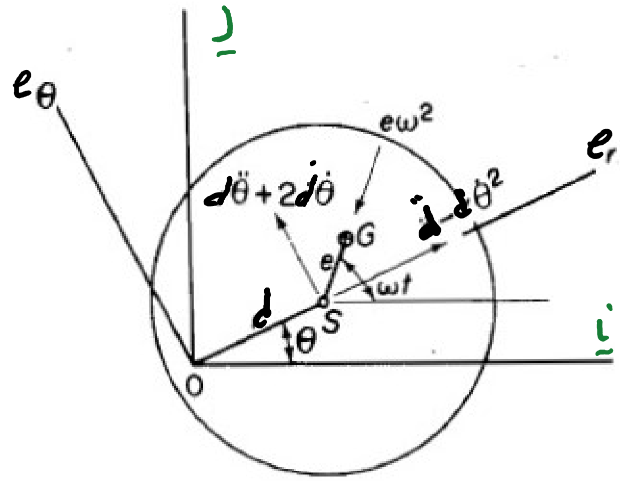
اگر مدل قبلی را به همراه نیروی استهلاک در نظر بگیریم.



در این حالت دیگر OS و SG در یک امتداد نبوده OS به علت استهلاک از دوران دیسک عقب می‌ماند.

در صورتیکه از سیستم مختصات قبلی مطابق شکل صفحه بعد استفاده کنیم.

برای نوشتن قانون دوم نیوتن به شتاب مرکز ثقل نیاز داریم که آنرا با استفاده از تحقیقات قبلی می‌توان نوشت :



$$\underline{a}_G = \underline{a}_s + \underline{a}_{G/S}$$

$$\underline{a}_s = a_r\underline{e}_r + a_\theta\underline{e}_\theta$$
$$= (\ddot d - d\dot\theta^2)\underline{e}_r + (d\ddot\theta + 2\dot d\dot\theta)\underline{e}_\theta$$

مرکز ثقل حول مرکز هندسی دوران می‌کند و بنابراین شتاب جانب مرکز دارد.

$$\underline{a}_{G/S} = -e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\,\underline{e}_r - e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\,\underline{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \underline{a}_G = \left[(\ddot d - d\dot\theta^2) - e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\right]\underline{e}_r + \left[(d\ddot\theta+2\dot d\dot\theta) - e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\right]\underline{e}_\theta$$

از نوشتن قانون دوم نیوتن :

$$\sum \underline{F} = m\underline{a}_G$$

نیروهای وارده همانطور که در صفحه قبل نشان داده شده ناشی از :

- نیروی برگشت دهنده سفتی محور Kd
- نیروی مقاوم استهلاکی $c\underline{V}_s$ که :

$$\underline{V}_s = \dot d\,\underline{e}_r + d\dot\theta\,\underline{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_c = c\underline{V}_s = c\dot d\,\underline{e}_r + cd\dot\theta\,\underline{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -Kd - c\dot d = m\left[(\ddot d - d\dot\theta^2) - e\omega^2\cos(\omega t-\theta)\right] \\ -cd\dot\theta = m\left[(d\ddot\theta+2\dot d\dot\theta) - e\omega^2\sin(\omega t-\theta)\right] \end{cases}$$

از مرتب کردن این رابطه :

$$\ddot d + \frac{c}{m}\dot d + \left(\frac{k}{m} - \dot\theta^2\right)d = e\omega^2\cos(\omega t-\theta)$$

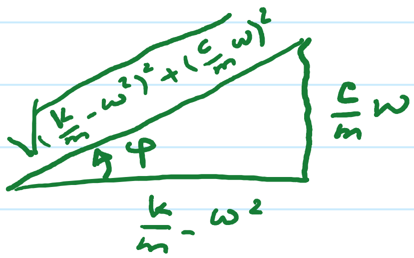
$$d\ddot\theta + \left(2\dot d + \frac{c}{m}d\right)\dot\theta = e\omega^2\sin(\omega t-\theta)$$

اینها دو معادله دیفرانسیل غیرخطی و ناهمگن مرتبه دو هستند که حل آنها در حالت عمومی به این درس نمی‌گنجد. برای حل حالت پایدار مستقیم را که در آن $\dot{\theta}=\omega$ و $\dot{\omega}=\ddot{\theta}=\dot{d}=\ddot{d}=0$ است را در نظر می‌گیریم. در این صورت معادلات قبلی به فرم زیر ساده می‌شوند.

$$\begin{cases} \left(\frac{k}{m}-\omega^2\right) d = e\omega^2 \cos\varphi \\ \frac{c}{m} d\,\omega = e\omega^2 \sin\varphi \end{cases} \quad , \quad \varphi = \omega t - \theta$$

در این صورت:

$$d\sqrt{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{c}{m}\omega\right)^2} = e\omega^2$$

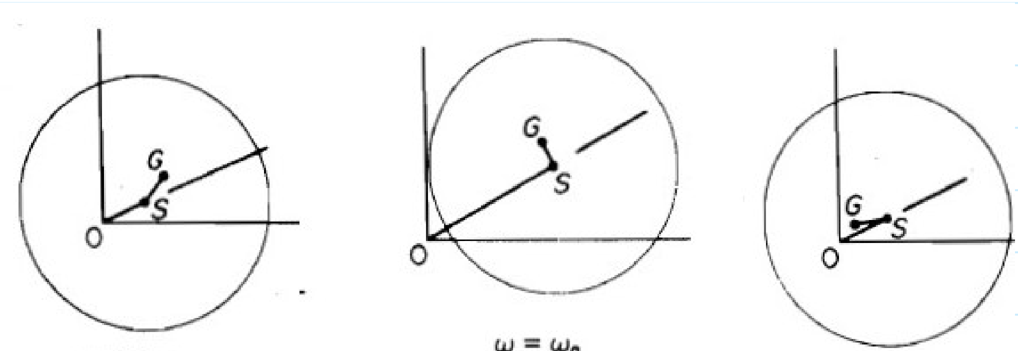


$$d = \frac{e\omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_n\omega)^2}} \quad , \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$d = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}\, e$$

$$d = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\, e \quad , \quad r = \frac{\omega}{\omega_n} \quad , \quad \varphi = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

چند حالت این رابطه در زیر نمایش داده شده است:



$\omega << \omega_n$ $\omega = \omega_n$ $\omega >> \omega_n$

در اینجا هم در دورهای پایین G در خارج از فاصله OS بوده و φ مقدار کمی دارد. در $\omega=\omega_n$ مقدار $\varphi=\frac{\pi}{2}$ است و $d=OS$ زیاد می‌شود. در دورهای بالا مقدار d به سمت e میل کرده و $\varphi\to\pi$، بنابراین G به سمت O می‌رود.

مثال: دیسکی به جرم 4^{kg} در وسط محوری به طول 48^{cm} محکم شده است. در دو انتهای محور یاتاقان‌ها ساده قرار دارند. محور از جنس فولاد با $E = 1.96\times10^{11}\ N/m^2$ بوده و 9^{mm} قطر دارد. مرکز ثقل دیسک با مرکز هندسی آن 3^{mm} فاصله دارد. استهلاک ویسکوز معادل مرکز دیسک $49\ N/m/s$ فرض شده است. اگر محور در دور 760^{rpm} بگردد، مطلوب است تعیین ماکزیمم تنش در محور و مقایسه با هنگامی که محور فقط وزن را تحمل می‌کند.

$79.54\ rad/s$

ابتدا سختی تیر محور، فرکانس طبیعی و ضریب استهلاک را حساب می‌کنیم:

$$K = \frac{48EI}{\ell^3} = \frac{48(1.96\times10^{11})(\frac{\pi}{64}(9\times10^{-3})^4)}{(0.48)^3} = 27397.66\ N/m$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} = 82.8\ rad/s$$

و $r = \frac{\omega}{\omega_n} = 0.9612$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} = 0.074$$

با این مقادیر d محاسبه می‌گردد:

$$d = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}\, e = 17.04\ mm$$

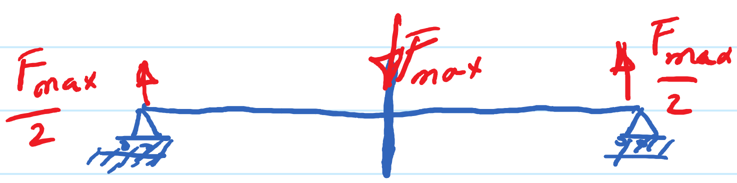
برای محاسبه تنش خمشی در محور، نیروی فنریت و استهلاک وارد بر محور را حساب کرده، وسپس ممان خمشی را به دست آورده و در معادله تنش خمشی قرار می‌دهیم:

$$R_D = \sqrt{k^2+(c\omega)^2}\, d = 471.56\ N$$

نیروی استاتیکی ناشی از وزن

$$R_s = mg = 39.2\ N$$

$$F_{max} = R_D + R_s = 510.8\ N$$



نیز برابر :

$$M_{max} = \frac{F_{max}}{2} \times \frac{l}{2}$$

تنش خمشی عبارت است از :

دینامیکی

$$\sigma_{xD} = \frac{M_{max} \frac{d}{2}}{I} = \frac{\left(\frac{F_{max}}{2} \frac{l}{2}\right) \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = 8.54 \times 10^{8} \ N/m$$

استاتیکی

$$\sigma_{xs} = \frac{M_{st} \cdot \frac{d}{2}}{I} = \frac{\left(\frac{R_s}{2} \frac{l}{2}\right) \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = 6.59 \times 10^{7} \ N/m$$

همچنین نیروی استهلاکی سیستم عبارت است از :

$$F_d = c \omega d = 66.45 \ N$$

گشتاور استهلاکی ناشی از این نیرو :

$$T = F_d \cdot d = 1.132 \ N.m$$

و توان مصرفی :

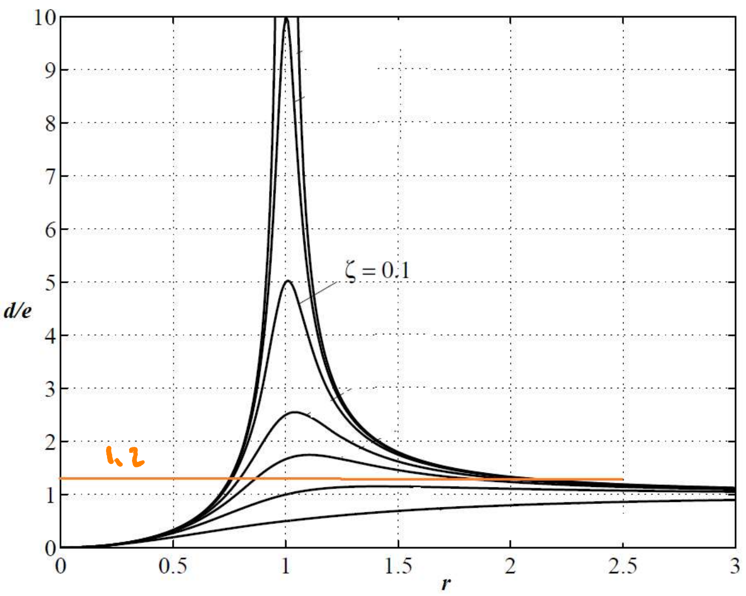
$$P = T . \omega = 90.1 \ W$$

مثال :

دیسکی به جرم 30 kg دارای خروج از مرکز 0.5 mm بوده و در وسط محوری به طول یک متر از جنس فولاد و دارای مدول یانگ $200\times10^9\ N/m^2$ قرار دارد. در صورتیکه نسبت استهلاک سیستم 0.1 باشد، مطلوبست تعیین قطر محور به نحوی که میزان دامنه لنگ زدن از 0.6 mm تجاوز نکند. سرعت دوران محور بین 1000 rpm تا 2000 rpm می باشد.

209.44 rad/s   104.72 rad/s

از منحنی پاسخ فرکانس



$$\frac{d}{e} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$ ۹

$$\frac{d}{e} = \frac{0.6}{0.5} = 1.2$$

برای بدست آوردن قطر محور از منحنی پاسخ فرکانس، r_1 و r_2 را بدست می‌آوریم که در زیر نقطه تقاطع خط افقی با منحنی $\zeta=0.1$ می‌باشند. با بدست آوردن r_1، ω_n بدست آمده و از روی آن K و سپس قطر D بدست می‌آید.

$$1.2 = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \Rightarrow 1.44 = \frac{r^4}{(1+r^4-2r^2)+0.04r^2}$$

$$\Rightarrow r^4 = 1.44 + 1.44r^4 - 2.88r^2 + 0.0576r^2$$

$$\Rightarrow 0.44r^4 - 2.822r^2 + 1.44 = 0 \Rightarrow r = \begin{cases} r_1 = 0.7476 \\ r_2 = 2.4198 \end{cases}$$

$$r_1 = 0.7476 \geq \frac{\omega}{\omega_n} \Rightarrow \omega_n \geq \frac{\omega}{r} = \frac{209.44}{0.7476} = 280.15\ rad/s$$

چرا؟

$$K = m\omega_n^2 = 2.35445\times10^6\ N/m$$

$$K = \frac{48EI}{l^3} \Rightarrow I = \frac{Kl^3}{48EI} = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{64 K l^3}{48 \pi E}} = 0.04728^{m} = 47.28 \ mm$$

حداقل قطر

درصورتیکه r_2 انتخاب شود:

$$r_2 = 2.4198 \leq \frac{\omega}{\omega_n}$$

چرا؟

$$\Rightarrow \omega_n \leq \frac{\omega}{r_2} = \frac{104.72}{2.4198} = 43.28 \ rad/s$$

$$K = m \omega_n^2 = 5.6184 \times 10^4 \ N/m$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[4]{\frac{4}{3} \frac{K l^3}{\pi E}} = 0.01858^{m} = 18.58^{mm}$$

حداکثر قطر