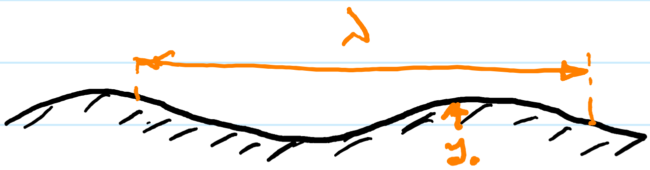
Base Excitation — ارتعاشات ناشی از تحریک پایه

حرکت یک خودرو را بر روی سطح جاده در نظر بگیرید.

بدلیل پستی و بلندی جاده و انتقال آن به سیستم خودرو، خودرو شروع به ارتعاش می‌کند.

فرم جاده را می‌توان به صورتهای مختلف فرض نمود. در ساده‌ترین فرم آن را سینوسی در نظر بگیریم:



$$y = y_0 \sin\omega t$$

y_0 دامنه موج جاده، ω فرکانس تحریک جاده و λ طول موج جاده است.

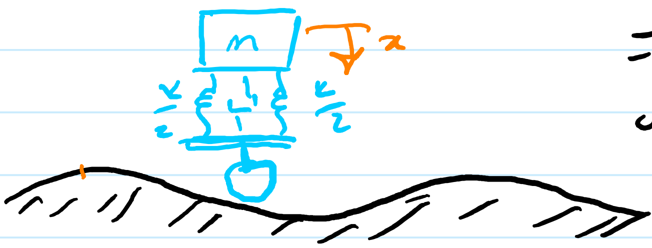
$$\lambda = V.\tau$$

که V سرعت خودرو و τ پریود یا زمان لازم برای پیمودن λ است.

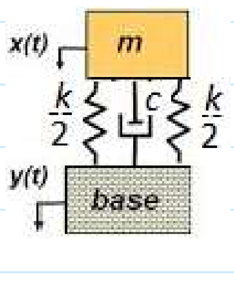
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2\pi V}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi V}{\lambda}$$

دیده می‌شود که فرکانس تحریک جاده علاوه بر شکل جاده (λ) به سرعت حرکت خودرو نیز بستگی دارد. بنابراین حرکت خودرو را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:



در این مدل جرم کل خودرو m است. تمامی فنرهای خودرو به صورت مساوی در دو طرف مدل شده و اسکاک خودرو با c مدل شده است.

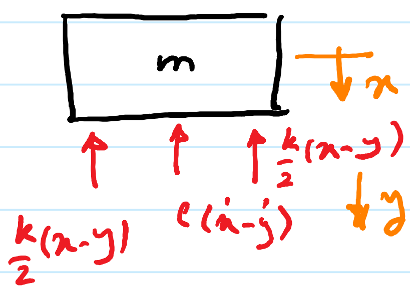


$$y = y_0 \sin\omega t$$

بنابراین می‌توان مدل زیر را برای خودرو در نظر گرفت.

با رسم F.B.D و نوشتن معادلات قانون دوم نیوتن

(با فرض $x>y$)



$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$-\frac{k}{2}(x-y) - c(\dot{x}-\dot{y}) - \frac{k}{2}(x-y) = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

سمت راست معادله تحریک ورودی به سیستم است که از طریق فنر و دمپر انجام می‌شود. سمت چپ خصوصیات رفتاری سیستم است:

$$D = d/dt$$

$$\rightarrow \quad (mD^2 + cD + k)x = (cD + k)y$$

$$x = \left(\frac{cD+k}{mD^2+cD+k}\right)y \longrightarrow \text{Transfer function}$$

$$y = y_0 \sin\omega t = \mathrm{Im}\, y_0 e^{j\omega t}$$

از عمل کردن تابع تبدیل بر روی y داریم:

$$x = \mathrm{Im}\left(\frac{cD+k}{mD^2+cD+k}\right) y_0 e^{j\omega t}$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{j\omega c+k}{m(j\omega)^2+j\omega c+k}\right) y_0 e^{j\omega t}$$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{k+j\omega c}{(k-m\omega^2)+j\omega c}\right) y_0 e^{j\omega t}$$

$$= y_0\left[\frac{k^2+(\omega c)^2}{(k-m\omega^2)^2+(\omega c)^2}\right]^{1/2} \mathrm{Im}\, e^{j\omega t} \cdot e^{-j\alpha} \cdot e^{j\beta}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\omega c}{k-m\omega^2}, \quad \beta = \tan^{-1}\frac{\omega c}{k}$$

$$x = \left[\frac{k^2 + (\omega c)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right]^{1/2} y_0 \sin(\omega t - \alpha + \beta)$$ نیز داریم

و داریم :

$$x = x_0 \sin(\omega t - (\alpha - \beta))$$

$$x_0 = \left[\frac{k^2 + (\omega c)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right]^{1/2} y_0$$

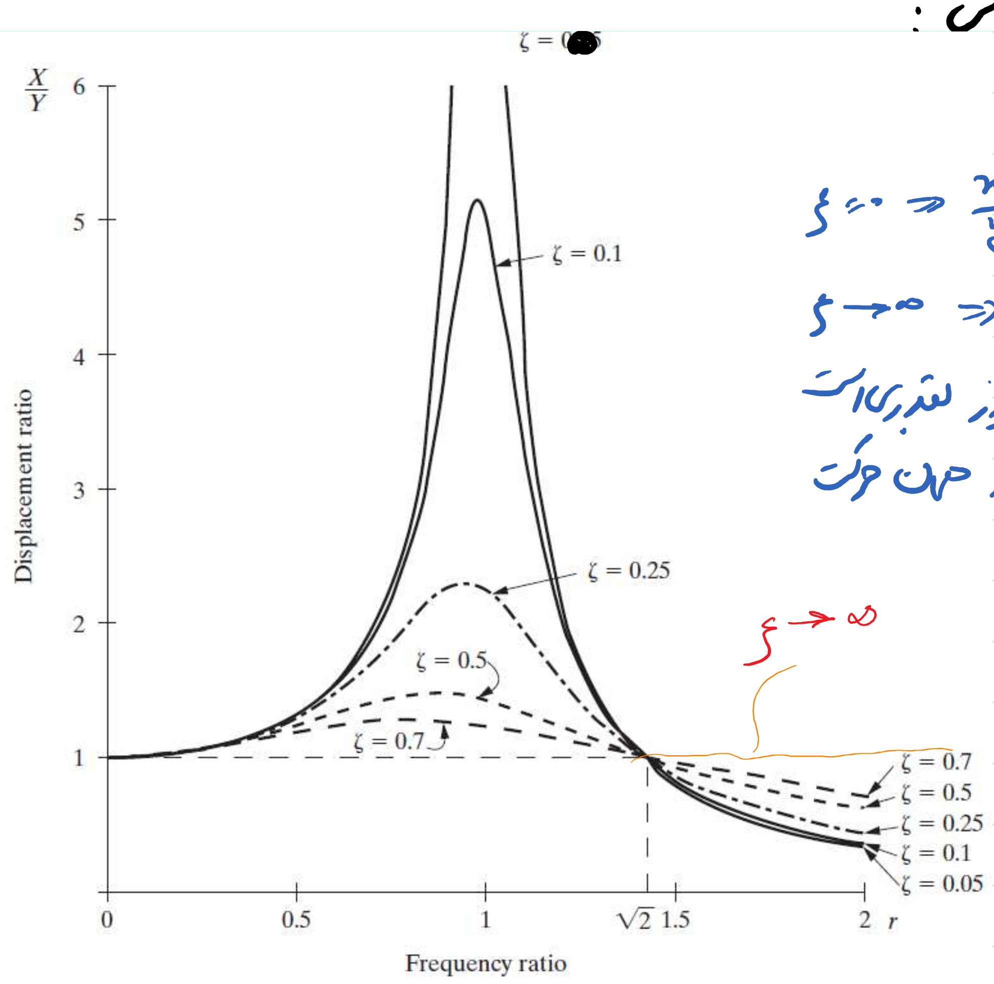
با تقسیم دو طرف بر y_0 و فاکتورگیری k از صورت و مخرج کسر :

$$\frac{x_0}{y_0} = \left[\frac{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{m\omega^2}{k}\right)\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{1 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right]^{1/2}$$

و داریم :

$$\frac{x_0}{y_0} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2}$$

بررسی منحنی پاسخ فرکانسی :



$$\zeta = 0 \Rightarrow \frac{x_0}{y_0} = \frac{1}{1 - r^2}$$

$$\zeta \to \infty \Rightarrow \frac{x_0}{y_0} \to 1$$

در این حالت غلظت مایع ویسکوز به قدری است که اجازه ارتعاش نداده و حرکت y به x منتقل می‌شود.

در صورتیکه نیروی منتقل شده به جرم خودرو را بخواهیم از F.B.D دیده می‌شود که عبارت است از:

$$F_t = k(x-y) + c(\dot{x}-\dot{y})$$

$$= -m\ddot{x} \quad , \quad x = x_0 \sin(\omega t-\varphi) \quad , \quad \varphi = \alpha - \beta$$

$$\Rightarrow F_t = -m(-\omega^2 x_0 \sin(\omega t-\varphi))$$

$$= \left(\frac{k}{\omega_n^2}\right)\omega^2 x_0 \sin(\omega t-\varphi)$$

$$= k r^2 x_0 \sin(\omega t-\varphi)$$

$$\rightarrow F_t = k y_0 r^2 \left[\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right]^{1/2} \sin(\omega t-\varphi)$$

مثال: اتومبیلی روی جاده موجدار در حرکت است. جرم خودرو 1000^{kg} و ضریب سختی سیستم تعلیق آن $200^{kgf/cm}$ است. نسبت استهلاک کمک فنرها 50% است. اگر دامنه موجهای جاده 2^{cm} و طول موج آن 10^{m} باشد، مطلوبست:

الف- سرعت بحرانی ماشین

ب- دامنه جابجایی خودرو هنگامی که با سرعت $60^{km/hr}$ در حرکت است.

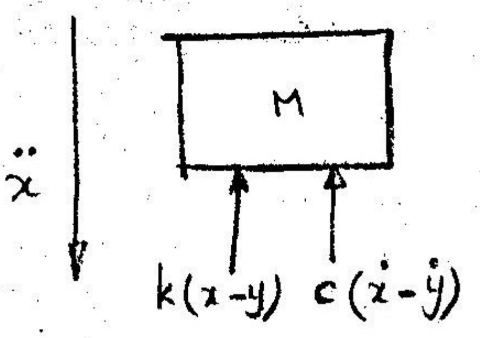
داده های مسئله چنین هستند:

$M = 1000 \ kg$

$k = 200 \ \frac{kgf}{cm}$ $\quad \zeta = 0.5$ $\quad y_0 = 2 cm$ $\quad \lambda = 10 m$

$V_{cr} = ?$ سرعت بحرانی

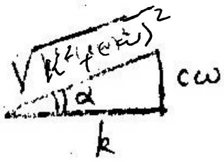
ابتدا باید معادله حرکت جرم M بدست آید: $(x>y)$



$$M\ddot{x} = -c(\dot{x}-\dot{y}) - k(x-y)$$

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

$$\Rightarrow x(MD^2 + cD + k) = y_0 c\omega \cos\omega t + k y_0 \sin\omega t$$

$\Rightarrow$ 

$$\sin\alpha = \frac{c\omega}{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}} \qquad \cos\alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{y_0\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}{\sqrt{(k-M\omega^2)^2+(c\omega)^2}}\sin(\omega t+\alpha-\beta) \qquad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k-M\omega^2}\right)$$

معادله حرکت انتقال

$$\Rightarrow x_0 = y_0\sqrt{\frac{k^2+(c\omega)^2}{(k-M\omega^2)^2+(c\omega)^2}} = y_0\sqrt{\frac{1+(2\zeta\cdot\omega/\omega_n)^2}{\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

در سرعت بحرانی، دامنه ماکزیمم است، پس اگر $\frac{\omega}{\omega_n} = r$ باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{dx_0}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(y_0\sqrt{\frac{1+(2\zeta r)^2}{[1-r^2]^2+(2\zeta r)^2}}\right) = 0$$

$$2(2\zeta)(2\zeta r)\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right] - \left[2(-2r)(1-r^2)+2(2\zeta)(2\zeta r)\right]\left[1+(2\zeta r)^2\right]$$

$$\Rightarrow 8\zeta^2 r\left[(1-r^2)^2+4\zeta^2 r^2\right] - \left[1+4\zeta^2 r^2\right]\left[-4r+4r^3+8\zeta^2 r\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad 8\eta^2\left[(1-r^2)^2+4\eta^2r^2\right]-\left[1+4\eta^2r^2\right]\left[-4+4r^2+8\eta^2\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad 8\eta^2(1-r^2)^2+32\eta^4r^2+4-4r^2-8\eta^2+16\eta^2r^2-16\eta^2r^4-32\eta^4r^2=0$$

$$\cancel{8\eta^2}+8\eta^2r^4-\cancel{16\eta^2r^2}+32\eta^4r^2+4-4r^2-8\eta^2+16\eta^2r^2-16\eta^2r^4-32\eta^4r^2=0$$

$$\Rightarrow \quad -8\eta^2r^4-4r^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad 2\eta^2r^4+r^2-1=0$$

$$\Rightarrow \quad r^2=\frac{-1\pm\sqrt{1+8\eta^4}}{4\eta^2} \quad \Rightarrow \quad r^2=\frac{-1+\sqrt{1+8\eta^2}}{4\eta^2}$$

$$\Rightarrow \quad \eta=0.5 \quad \Rightarrow \quad r^2=\frac{-1+\sqrt{1+8(0.5)^2}}{4(0.5)^2}=0.732 \quad \Rightarrow \quad r=0.856$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\omega}{\omega_n}=0.856 \quad \Rightarrow \quad \omega_{cr}=0.856\,\omega_n=0.856\sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{\frac{200\times 9.81}{10^{-2}}}{1000}}=14 \ \mathrm{rad/s} \qquad =0.856\times 14=11.984 \ \mathrm{rad/s}$$

حالا رابطهٔ بین سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی را برای ماشین می‌نویسیم :

$$\lambda=V\tau=V\frac{2\pi}{\omega} \quad \Rightarrow \quad V=\frac{\lambda\omega}{2\pi}=\frac{10\times 11.984}{2\pi}=19.073 \ \mathrm{m/s}$$

$$\boxed{V_{cr}=68.663 \ \mathrm{km/hr}}$$ سرعت بحرانی ماشین

قسمت ب : دیدیم که جابجایی ماشین چنین بدست آمد :

$$x_0=y_0\sqrt{\frac{1+(2\eta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\eta r)^2}}$$

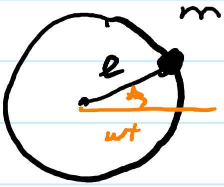
$$V=\frac{\lambda\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \omega=\frac{2\pi\times 60\times\frac{1000}{3600}}{10}=10.472 \ \mathrm{rad/s}$$

$$\Rightarrow r=\frac{\omega}{\omega_n}=\frac{10.472}{14}=0.748 \quad \Rightarrow \quad x_0=2\times 10^{-2}\sqrt{\frac{1+(2\times 0.5\times 0.748)^2}{(1-0.748^2)^2+(2\times 0.5\times 0.748)}}$$

$$x_0=0.0287\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0=28.77\,\mathrm{mm}}$$

ارتعاشات ناشی از جرم خارج مرکز

جرمی را که حول محوری دوران می‌کند در نظر بگیرید. در صورتیکه حرکت جرم بصورت هارمونیک باشد، مولفه قائم حرکت جرم عبارت است از



$$x = e \sin \omega t$$

در صورت ثابت بودن فرکانس ω، شتاب حرکت برابر است با:

$$\ddot{x} = -e\omega^2 \sin \omega t$$

و نیروی جانب مرکز عبارت است از:

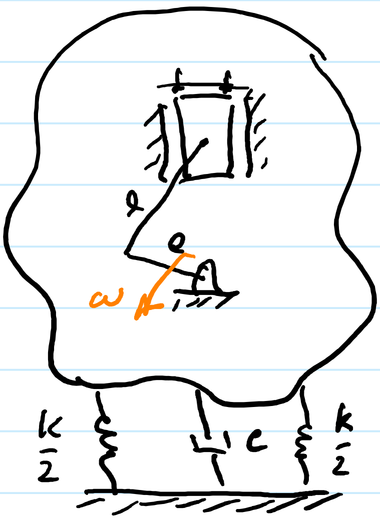
$$F = me\omega^2 \sin \omega t$$

این نیرو در ماشینهایی که:

- عدم بالانس بودن قطعات دوار
- ناهمراستایی یاتاقان و کوپلینگ
- محور خمیده
- چرخ دنده خراب
- لقی

⋮

دارند رخ میدهد.



همچنین در موتور خودرو اثر حرکت پیستون را در نظر بگیریم:

شتاب حرکت پیستون:

$$a = e\omega^2 \left(\sin \omega t + \frac{e}{l} \sin 2\omega t\right)$$

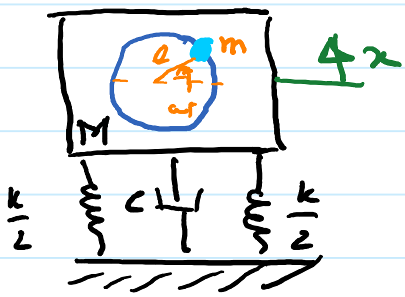
و نیروی ناشی از رفت و برگشت پیستون - جرم m

$$F = me\omega^2 \left(\sin \omega t + \frac{e}{l} \sin 2\omega t\right)$$

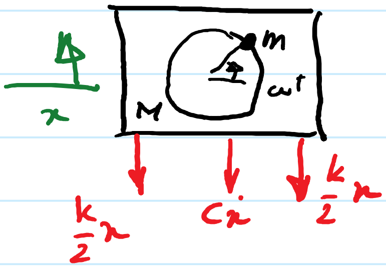
در طراحی معمولاً e کوچک و l بزرگ است و بنابراین:

$$F = me\omega^2 \sin \omega t$$

دیده میشود که میتوان تحریک را به فرم نیروی هارمونیک با فرکانس ω و دامنه $me\omega^2$ گرفت.



سیستم یک درجه آزادی را به جرم M در نظر بگیرید. مقداری
از این جرم به اندازه m دارای خروج از مرکز e است و
در حال دوران با سرعت دورانی ω است.



از رسم دیاگرام جسم آزاد داریم:

همانطور که دیده می‌شود حرکت جرم (M-m) متفاوت از
حرکت m است. از بکار بردن قانون دوم برای سیستم داریم:

$$\sum F_x = \sum m_i \ddot{x}_i$$

$$-\frac{k}{2}x - c\dot{x} - \frac{k}{2}x = (M-m)\ddot{x} + m\ddot{d} \qquad (1)$$

اگر تغییر مکان مطلق جرم m را بنویسیم:

$$d = x + e\sin\omega t$$

جایگزین کردن در رابطه (1) بصورت زیر در می‌آید:

$$-kx - c\dot{x} = (M-m)\ddot{x} + m\frac{d^2}{dt^2}(x + e\sin\omega t)$$

$$= M\ddot{x} - \cancel{m\ddot{x}} + (\cancel{m\ddot{x}} - me\omega^2\sin\omega t)$$

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me\omega^2\sin\omega t$$

همانطور که دیده می‌شود این معادله شبیه معادلات ارتعاشات اجباری سیستم یک درجه آزادی
است که تحت اثر نیروی هارمونیکی با دامنه $F_0 = me\omega^2$ قرار گرفته است بنابراین از همان
روابط می‌توان کمک گرفت:

$$x = x_0\sin(\omega t - \alpha)$$

$$x_0 = \frac{\frac{me\omega^2}{k}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \quad , \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

اما

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow k=M\omega_n^2$$

از جایگذاری k در x_0 خواهیم داشت:

$$x_0=\frac{\frac{me\omega^2}{M\omega_n^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \Rightarrow \hat{x}=\frac{x_0}{e}\frac{M}{m}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

که $r=\omega/\omega_n$ و رابطه بالا کمیتی بی بعد بدست آمده است.

زاویه فاز نیز عبارت است از:

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2}$$

که تغییری نمی کند.

برای بررسی تغییرات $\hat{x}$ نسبت به r ملاحظه می شود که:

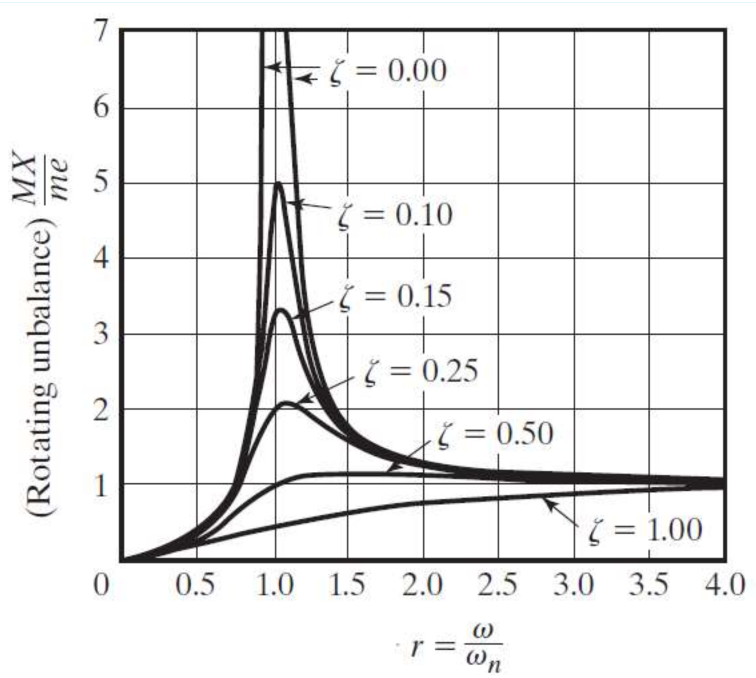
$$\omega=0 \Rightarrow \hat{x}=0$$

$$r\to\infty \Rightarrow \hat{x}\to 1$$

در حالت $r\to\infty$ همچنین α عبارت است از:

$$r\to\infty \Rightarrow \alpha\to\pi$$

یعنی x نسبت به e به اندازه 180° خارج فاز است.



به ازای $\zeta=0$ دامنه در فرکانس طبیعی به سمت بی نهایت میل می کند. در صورتی که ζ مقدار داشته باشد، ماکزیمم دامنه محدود می گردد.

برای بدست آوردن این ماکزیمم از $\hat{x}$ نسبت به r مشتق گرفته و برابر صفر قرار می دهیم:

$$\frac{d\hat{x}}{dr}=0 \Rightarrow \cancel{2}r\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}-r^2\frac{\cancel{2}(1-r^2)(-\cancel{2}r)+\overset{2}{\cancel{8}}\zeta^2 r}{\cancel{2}\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}=0$$

$$r\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]-r^2\left[(1-r^2)(-r)+2\zeta^2 r\right]=0$$

$$r(1-r^2)\left[(1-\cancel{r^2})+\cancel{r^2}\right]+r^3(4\zeta^2-2\zeta^2)=0$$

$$r(1-r^2+2\zeta^2 r^2)=0 \Rightarrow r=0 \quad \text{یا} \quad r^2(1-2\zeta^2)=1$$

$$r^2=\frac{1}{1-2\zeta^2} \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

$r=0$ نشان دهنده نقطه مینیمم است.

$r=\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$ نشان می‌دهد که با افزایش ζ ماکزیمم منحنی به سمت راست میل می‌کند.

برای داشتن ماکزیمم باید:

$$1-2\zeta^2>0 \Rightarrow \zeta<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

با قرار دادن r در $\hat{x}$ می‌توان $\hat{x}_{max}$ را به دست آورد:

$$\hat{x}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \quad , \quad r^2=\frac{1}{1-2\zeta^2}$$

$$\Rightarrow \hat{x}_{max}=\frac{\frac{1}{1-2\zeta^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{1-2\zeta^2}\right)^2+\left(4\zeta^2\frac{1}{1-2\zeta^2}\right)}}$$

$$\hat{x}_{max}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

از منحنی پاسخ فرکانس دیده می‌شود که در مقادیر زیاد r مقدار به عبارت است از:

$$\hat{x} \longrightarrow 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{m}{M}e$$

اما این مقدار در حالت استاتیکی مرکز ثقل سیستم را نشان می‌دهد:

$$\bar{x} = \frac{(M-m)(0)+me}{M} = \frac{m}{M}e$$

اگر مرکز ثقل سیستم را در حالت دینامیکی هم محاسبه کنیم:

$$M\bar{x} = (M-m)x + md$$

$$= (M-\cancel{m})x + m(\cancel{x}+e\sin\omega t) = Mx + me\sin\omega t$$

$$= Mx_0\sin(\omega t-\alpha) + me\sin\omega t$$

$$\Rightarrow \quad \bar{x} = x_0\sin(\omega t-\alpha) + \frac{me}{M}\sin\omega t$$

اما:

$$\omega \to \infty \Rightarrow x_0 \to \frac{m}{M}e \quad , \quad \alpha \to \pi$$

بنابراین:

$$\bar{x} \longrightarrow \frac{m}{M}e\sin(\omega t-\alpha) + \frac{m}{M}e\sin\omega t$$

$$= \frac{m}{M}e\left(\sin(\omega t-\pi)+\sin\omega t\right) = 0$$

در فرکانس‌های کم مرکز جرم سیستم در فاصله بین صفر تا $\frac{m}{M}e$ قرار دارد.

در فرکانس‌های خیلی بالاتر از تشدید، مرکز ثقل تقریباً ثابت باقی می‌ماند.

دقت کنید که در این حالت مرکز ثقل جرم $(M-m)$ دارای حرکت بوده ولی در خلاف جهت جرم m (به اندازه π عقب است) حرکت می‌کند، بنحوی که مرکز ثقل کل سیستم ثابت می‌ماند.

بنابراین اگر در سیستم‌های دینامیکی دور کاری سیستم در چند برابر فرکانس طبیعی باشد (مثلاً ۳ برابر)، اثر جرم نامتعادل حذف شده و ارتعاشات کاهش می‌یابد.

مثال: توربینی به جرم 1000 kg با مقداری جرم نامتعادل بر روی فنر و دمپر قرار گرفته است.
هنگامی که توربین در دور 20 Hz کار می‌کند، دامنه پایدار آن 0.08 mm اندازه‌گیری شده است.
با افزایش دور به 40 Hz دامنه پایدار ارتعاشات 0.25 mm و در دورهای خیلی بالا به مقدار
0.5 mm می‌رسد. مطلوبست تعیین سختی و استهلاک معادل سیستم.

مجهولات مسئله در اینجا k، c، m و e هستند، بنابراین ۴ رابطه برای تعیین آنها نیاز است. اما m و e همیشه با هم بوده و بصورت حاصل‌ضرب me هستند بنابراین مجهولات به سه مقدار k، c و me کاهش می‌یابند. با توجه به:

$$r \to \infty \Rightarrow \hat{x} = \frac{Mx_0}{me} \to 1 \Rightarrow me = Mx_0$$

$$me = (1000\ \text{kg})(0.5\ \text{mm}) = 500\ \text{kg.mm}$$

برای تعیین k و c از دو آزمایش دیگر استفاده می‌کنیم.
اگر r را بدست آوریم، با توجه به داشتن M مقدار k محاسبه می‌گردد.
اگر ζ را نیز بدست آوریم مقدار c تعیین می‌شود.

$$\hat{x} = \frac{Mx_0}{me} = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \quad (1)$$

$$r_1 = \frac{20\ \text{Hz}}{\omega_n}, \quad r_2 = \frac{40\ \text{Hz}}{\omega_n} = 2r_1$$

از قرار دادن نتایج دو آزمایش در رابطه (1)

برای r_1:
$$\frac{(1000)(0.08)}{500} = 0.16 = \frac{r_1^2}{\sqrt{(1-r_1^2)^2+(2\zeta r_1)^2}} \quad (2)$$

برای r_2:
$$\frac{(1000)(0.25)}{500} = 0.5 = \frac{r_2^2}{\sqrt{(1-r_2^2)^2+(2\zeta r_2)^2}} \quad (3)$$

به جای r_2 از $2r_1$ استفاده می‌کنیم:

$$(3) \Rightarrow \qquad 0.5 = \frac{4r_1^2}{\sqrt{(1-4r_1^2)^2+(4\zeta r_1)^2}} \qquad (4)$$

با حل (4)، ζ^2 را برحسب r_1 به دست می‌آوریم:

$$\zeta^2 = \frac{1}{16r_1^2}(48r_1^4+8r_1^2-1) \qquad (5)$$

از جایگذاری (5) در (2) خواهیم داشت:

$$26.06\,r_1^4 = 0.75 \Rightarrow r_1 = 0.4118$$

با به دست آمدن r_1 مقدار ω_n را محاسبه کرده و سپس K را به دست می‌آوریم:

$$\omega_n = \frac{20^{Hz}}{r_1} = \frac{20^{c/s}\left(\frac{2\pi\,rad}{1c}\right)}{0.4118} = 305\ rad/s$$

$$\Rightarrow K = M\omega_n^2 = (1000\ kg)(305\ rad/s)^2 = 9.31\times10^7\ N/m$$

از رابطه 5 نیز با داشتن r_1 می‌توان ζ را محاسبه و سپس c را به دست آورد:

$$(5) \Rightarrow \zeta = 0.8$$

$$c = 2M\omega_n\zeta = 2(1000^{kg})(305^{rad/s})(0.8) = 4.88\times10^5\ N/m/s$$

مثال

یک فن به جرم 50 kg که دارای جرم نامیزان دواری به مقدار $me=0.1$ kg.m می باشد به انتهای تیر یک سر گیرداری به طول یک متر متصل شده است. موقعی که سرعت فن تغییر می کند، حداکثر دامنه پایدار ارتعاشات فن برابر 25mm مشاهده می گردد. تیر از جنس فولاد و دارای مدول یانگ $210\times10^{9}\ N/m^2$ بوده و ممان اینرسی آن $1\times10^{-6}\ m^4$ می باشد. مطلوبست تعیین دامنه پایدار فن هنگامی که در دور 1200 rpm کار می کند.

$$M=50\ kg \quad , me=0.1\ kg.m$$
$$x_{o\,max}=25\ mm \qquad E=210\times10^{9}\ pa$$
$$\omega=1200\ rpm$$

همچنین:

$$\bar{x}=\frac{x_o M}{me}=\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}$$

حداکثر $\bar{x}$ در فرکانس زیر اتفاق می افتد:

$$\frac{d\bar{x}}{dr}=0 \Rightarrow 2r\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}-\frac{2(1-r^2)(-2r)+2(2\zeta r)(2\zeta)}{2\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}r^2=0$$

$$r\left[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2\right]-\left[(-r)(1-r^2)+2\zeta^2 r\right]r^2=0$$

$$r(1-r^2+2\zeta^2r^2)=0 \qquad r=0 \quad \text{یا} \quad 1-r^2+2\zeta^2r^2=0 \Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}$$

که ماکزیمم دامنه آن عبارت است از:

$$\bar{x}_{max}=\frac{\left(\frac{1}{1-2\zeta^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{1-2\zeta^2}\right)^2+\left(2\zeta\frac{1}{\sqrt{1-2\zeta^2}}\right)^2}}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

با استفاده از اطلاعات مسئله ζ را محاسبه کرد.

$$\frac{x_{o\,max}M}{me}=\frac{(25\times10^{-3})(50)}{0.1}=12.5=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow (12.5)^2=156.25=\frac{1}{4\zeta^2(1-\zeta^2)}$$

در نتیجه معادله از درجه ۲ برحسب ξ^2 بدست می‌آید:

$$625\xi^2(1-\xi^2)=1 \Rightarrow 625\xi^4-625\xi^2+1=0 \Rightarrow \xi^2=\frac{625\mp\sqrt{625^2-4(625)}}{2(625)}=\begin{cases}0.9984\\0.0016\end{cases}$$

$$\Rightarrow \xi=0.04$$

با بدست آوردن k مقدار ω_n را بدست می‌آوریم:

$$K=\frac{3EI}{l^3}=\frac{3(210\times10^9)(1\times10^{-6})}{1^3}=630\times10^3\ N/m$$

$$\omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}}=\sqrt{\frac{630\times10^3}{50}}=112.25\ rad/s$$

سپس r را در دور $1200\ rpm$ بدست آورده و x_0 محاسبه می‌شود:

$$\omega=1200\ rpm=125.663\ rad/s \Rightarrow r=\frac{\omega}{\omega_n}=1.1195$$

$$\bar{x}=\frac{x_0M}{me}=\left.\frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}\right|_{\substack{r=1.1195\\ \xi=0.04}}=4.665$$

$$x_0=\frac{\bar{x}(m.e)}{M}=\frac{4.665(0.1)}{50}=9.33\times10^{-3}\ m=9.33\ mm$$