نمایش برداری ارتعاشات اجباری

همانطور که دیده شد معادله دیفرانسیل حرکت در ارتعاشات اجباری با تحریک هارمونیک عبارت است از:

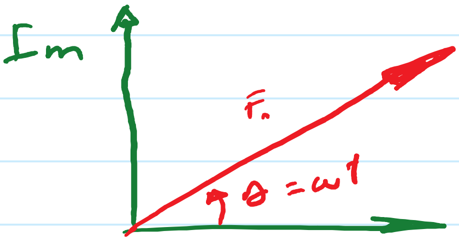
$$(1) \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F$$

که $F = F_0 \sin\omega t$ و پاسخ سیستم:

$$x = x_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

حرکت هارمونیک F و x در صفحه مختلط را می‌توان بصورت چرخش بردارهایی نشان داد. در صورتیکه F بردار با اندازه F_0 باشد که در هر لحظه دارای زاویه $\theta = \omega t$ است:

$$F = \operatorname{Im} F_0 e^{j\omega t}$$



که θ با زمان زیاد شده، یعنی بردار F مرتب در صفحه مختلط می‌چرخد. تصویر عمودی F همان $F_0 \sin\omega t$ است.

همچنین از طرف دیگر پاسخ را هم می‌توانیم بصورت زیر بنویسیم:

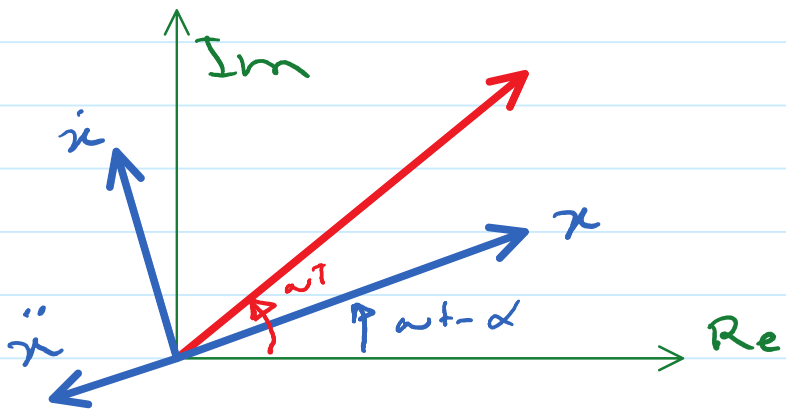
$$x = \operatorname{Im} x_0 e^{j(\omega t - \alpha)}$$

این بردار نیز به اندازه x_0 و زاویه $\omega t - \alpha$ نمایش داده می‌شود. در این صورت سرعت و شتاب:

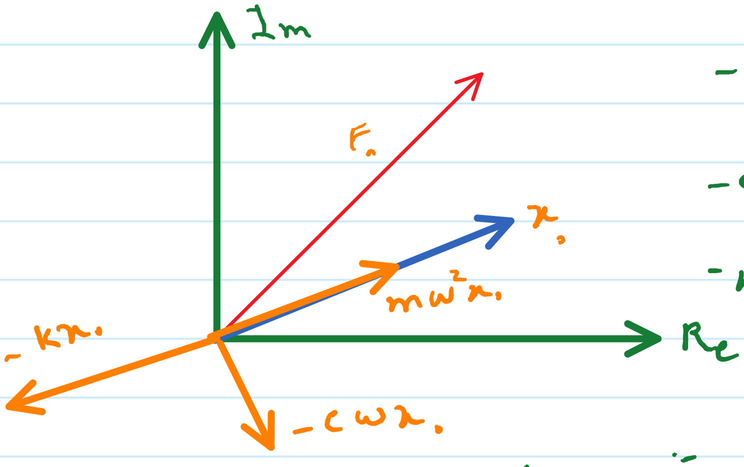
$$\dot{x} = j\omega x_0 e^{j(\omega t - \alpha)} = \omega x_0 e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} \qquad j = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2} = e^{j\pi/2}$$

$$\ddot{x} = (j\omega)^2 x_0 e^{j(\omega t - \alpha)} = -\omega^2 x_0 e^{j(\omega t - \alpha)} = \omega^2 x_0 e^{j(\omega t - \alpha + \pi)}$$

$$-1 = \cos\pi + j\sin\pi = e^{j\pi}$$



حال مقادیر را در نمودار در معادله (۱) نشان داد



$$-kx = -kx_0 e^{j(\omega t-\alpha)} = kx_0 e^{j(\omega t-\alpha+\pi)}$$

$$-c\dot{x} = -c\omega x_0 e^{j(\omega t-\alpha+\frac{\pi}{2})} = c\omega x_0 e^{j(\omega t-\alpha+\frac{3\pi}{2})}$$

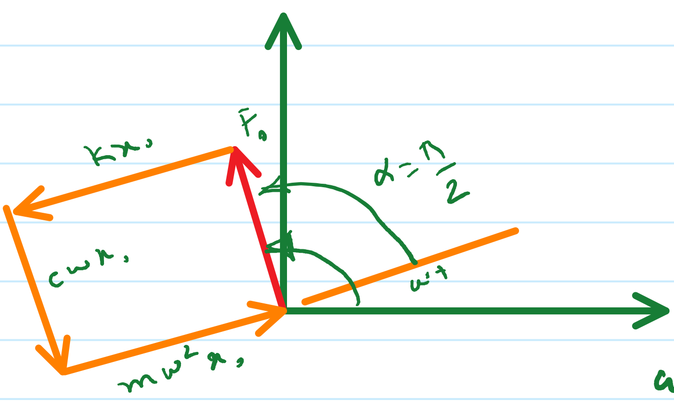
$$-m\ddot{x} = -m\omega^2 x_0 e^{j(\omega t-\alpha+\pi)} = m\omega^2 x_0 e^{j(\omega t-\alpha)}$$

حال می‌توان درک رفتار سیستم را با استفاده از چنین نمودارهایی به دست آورد. حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

۱- ω کوچک باشد $\omega<\omega_n$

در این حالت نیروی دمپر و نیروی اینرسی کوچک بوده (ω کم است) و نیروی الاستیک فنر نیروی غالب است که نیروی خارجی F را بالانس می‌کند. بنابراین نیروی الاستیک تقریباً با نیروی F برابر و نیروی وارده تقریباً با جابجایی هم فاز است.

۲- $\omega=\omega_n$

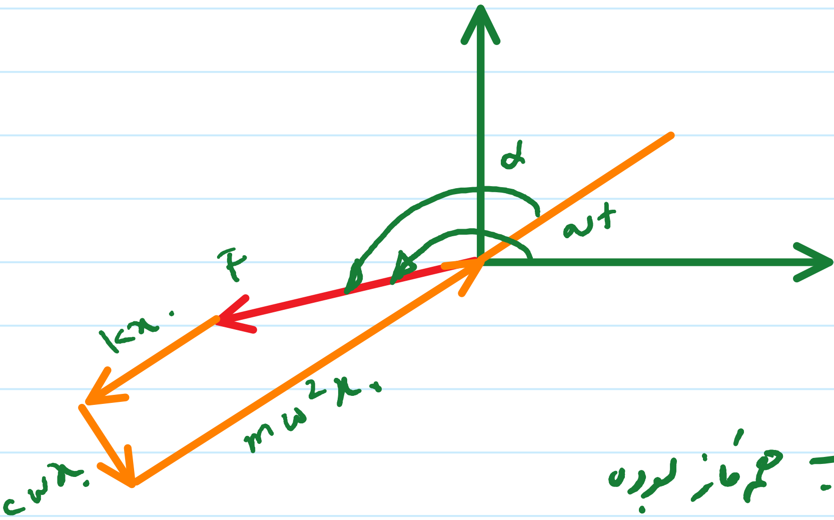


در این حالت نیروی الاستیک و نیروی اینرسی برابر هستند زیرا:

$$\omega^2=\omega_n^2=\frac{k}{m} \Rightarrow m\omega^2 x_0 = m\omega_n^2 x_0 = kx_0$$

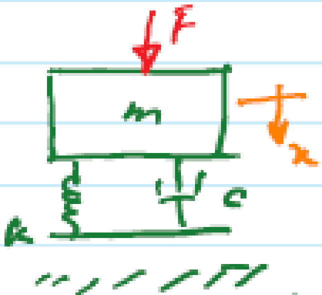
در این حالت زاویه فاز $\alpha=\frac{\pi}{2}$ و نیروی وارده با نیروی دمپر بالانس می‌شود.

۳- ω بزرگ باشد $\omega > \omega_n$



در این حالت به دلیل جمله ω^2 مقدار نیروی اینرسی زیاد بوده و تقریباً نیروی خارجی را بالانس می‌کند.
همچنین نیروی خارجی تقریباً با شتاب هم‌فاز بوده و ϕ به سمت π می‌رود.

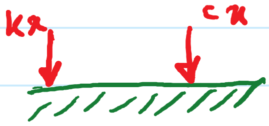
نیروی منتقل شده به کف — Transmitted Force



سیستم یک درجه آزادی که اجزای آن جرم m، دمپر c و فنر k تحت نیروی هارمونیک F قرار دارند در نظر بگیرید:

به دنبال تعیین نیروهای وارد بر کف هستیم تا اثرات آن این نیروها را کنترل کنیم.
در صورت تخلیه این نیروها به دیگر تجهیزات ناخواسته ممکن است باعث خرابی سیستم و کف شوند.


در حالت استاتیکی نیروی وزن توسط فنر به کف منتقل می‌شود. این نیرو معلوم است و
در محاسبات دینامیکی آن را وارد نمی‌کنیم. اما به همراه [illegible] وارد می‌شود.



در حالت دینامیکی دیاگرام جسم آزاد کف را رسم کرده و نیروهای وارده بر آن را نشان میدهیم.

این نیروها از طرف دیگر به فوق اعمال می‌گردند.
با جابجایی x و سرعت $\dot{x}$ در حرکت نیروهای kx و $c\dot{x}$ به کف وارد می‌گردد.
بنابراین نیروی منتقل شده عبارت از:

$$F_t = kx + c\dot{x}$$

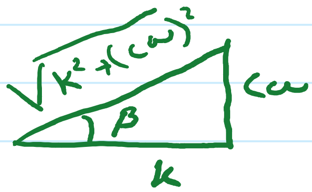
$$x = x_0 \operatorname{Sin}(\omega t - \alpha)$$

بنابراین:

$$F_t = k x_0 \operatorname{Sin}(\omega t-\alpha) + c\omega x_0 \operatorname{Cos}(\omega t-\alpha)$$

$$= \sqrt{k^2+(c\omega)^2}\, x_0 \left[\underbrace{\frac{k}{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}}_{\operatorname{Cos}\beta} \operatorname{Sin}(\omega t-\alpha) + \underbrace{\frac{c\omega}{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}}_{\operatorname{Sin}\beta} \operatorname{Cos}(\omega t-\alpha)\right]$$

اگر دو مقدار k و $c\omega$ دو ضلع عمود بر هم یک مثلث باشند:

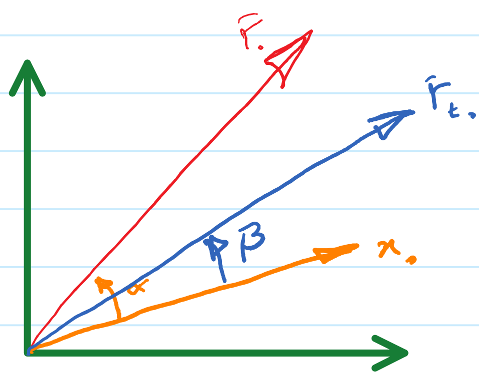


$$F_t = \sqrt{k^2+(c\omega)^2}\; x_0 \operatorname{Sin}(\omega t-\alpha+\beta)$$

$$= \sqrt{k^2+(c\omega)^2}\; \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} \operatorname{Sin}(\omega t-\alpha+\beta)$$

$$F_t = F_{t_0} \operatorname{Sin}(\omega t-\alpha+\beta) \quad , \quad F_{t_0} = \left[\frac{k^2+(c\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}\right]^{1/2}$$

β نیز زاویه پیش انداز فاز (Phase Lead Angle) نامیده می‌شود.



این رابطه را می‌توان از روش نیرویی نیز بدست آورد:

$$F_t = kx + c\dot{x} = kx + cDx = (k+cD)x \qquad D = d/dt$$

همچنین x برابر است با:

$$x = \frac{1}{mD^2+cD+k}\left(\operatorname{Im} F_0 e^{j\omega t}\right)$$

در نتیجه

$$F_t = (k+cD)\frac{1}{mD^2+cD+k}\left(\operatorname{Im} F_0 e^{j\omega t}\right)$$

$$= \frac{k+cD}{mD^2+cD+k}\left(\operatorname{Im} F_0 e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Im} \frac{k+c(j\omega)}{m(j\omega)^2+c(j\omega)+k} F_0 e^{j\omega t}$$

$$= \operatorname{Im} \frac{k+jc\omega}{(k-m\omega^2)+jc\omega} F_0 e^{j\omega t}$$

$$= \operatorname{Im} \frac{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}\, e^{j\beta} F_0 e^{j\omega t}}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}\, e^{j\alpha}}$$

$$= \left[\frac{k^2+(c\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}\right]^{1/2} F_0 \operatorname{Im} e^{j(\omega t-\alpha+\beta)}$$

$$F_t = F_{t_0}\sin(\omega t-\alpha+\beta) \quad , \quad F_{t_0} = \left[\frac{k^2+(c\omega)^2}{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}\right]^{1/2}$$

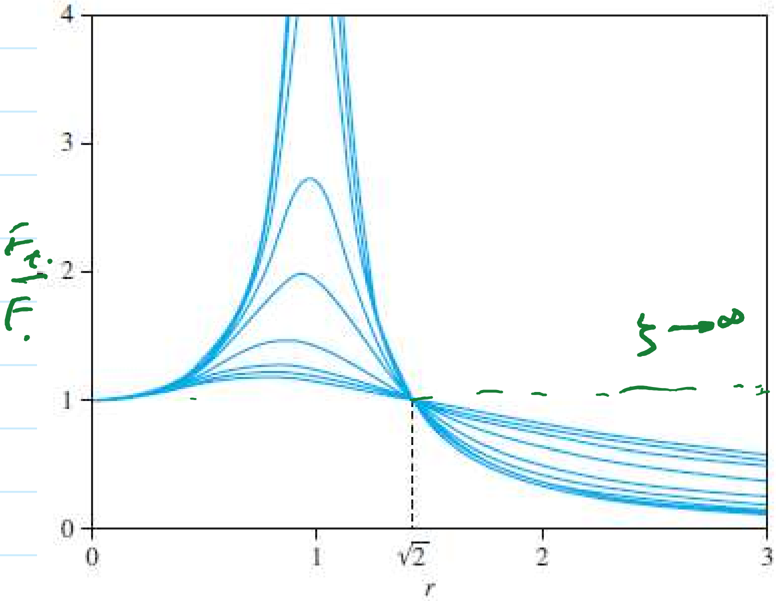
این رابطه را می‌توان مانند قبل ساده‌تر نمود. با تقسیم دو طرف بر F و فاکتورگیری صورت و مخرج از k خواهیم داشت:

$$\frac{F_{t_0}}{F_0} = \left[\frac{1+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}{\left(1-\frac{m\omega^2}{k}\right)^2+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{1+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\,\omega/\omega_n\right)^2}\right]^{1/2}$$

و با $r = \frac{\omega}{\omega_n}$:

$$\frac{F_t}{F_0} = \left[\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right]^{1/2}$$

منحنی دامنه نیروی منتقل شده برحسب نسبت فرکانس r بصورت زیر می باشد:



نقطه تقاطع همه منحنی ها $r=\sqrt{2}$ است

طبق شکل روبرو:

$$\frac{F_{t0}}{F_0}=1 \qquad \zeta \to \infty$$

$$\frac{F_{t0}}{F_0}=\frac{-1}{1-r^2} \qquad \zeta=0$$

$$\frac{-1}{1-r^2}=1 \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

اگر در سایر منحنی ها $r=\sqrt{2}$ قرار گیرد دیده میشود:

$$\frac{F_{t0}}{F_0}=\left(\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{1+(2\zeta\sqrt{2})^2}{(1-2)^2+(2\zeta\sqrt{2})^2}\right)^{1/2}=1$$

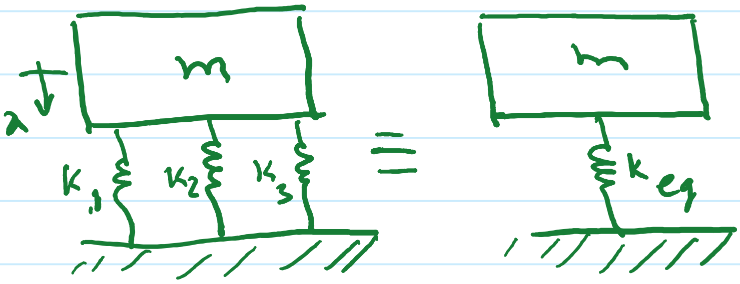
یعنی همه منحنی ها از این نقطه عبور می کنند.

از این منحنی دیده میشود که در $r<\sqrt{2}$ با افزایش استهلاک نیروی منتقل شده به کف کم می شود ولی در $r>\sqrt{2}$ با افزایش استهلاک این نیرو زیاد می گردد. این امر از آنجا که در فرکانس های بالا مسئله خستگی اهمیت بیشتری دارد مهم است.

Equivalent Springs   فنر معادل

فنرها را می‌توان به طرق گوناگون با جسم ترکیب کرد. در زیر این حالت‌ها را بررسی کرده و برای هرکدام فنر معادل را پیدا می‌کنیم.

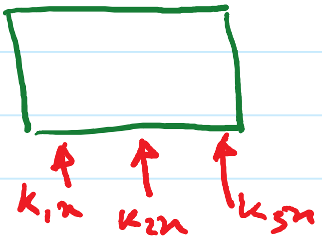
الف - فنرهای موازی



فرض کنید سیستم جرم و فنری به فرم موازی داریم. به دنبال معادل این سیستم هستیم (شکل سمت راست).

در فنرهای موازی یک انتهای فنر به جسم و انتهای دیگر به زمین متصل است.

با رسم F.B.D جرم:



$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$-k_1x - k_2x - k_3x = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + (k_1+k_2+k_3)x = 0$$

$$m\ddot{x} + k_{eq}x = 0$$

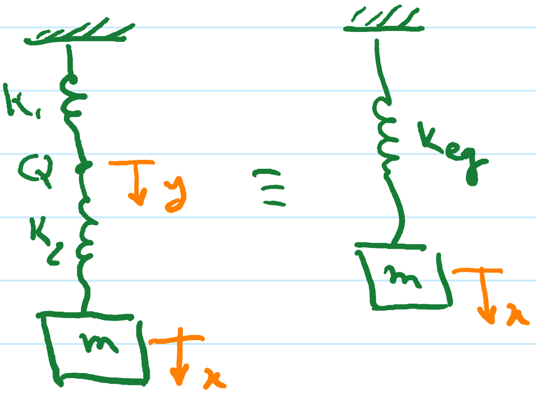
پس برای این فنر معادل عبارت است از:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

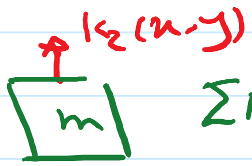
در فنرهای موازی کلیه فنرها دارای جابجایی یکسان ولی نیروهای متفاوت هستند.

ب- فنرهای سری

در فنرهای سری، آنها پشت سر هم بسته می‌شوند.

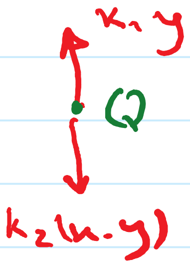


با در نظر گرفتن F.B.D برای جرم:



$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -k_2(x-y) = m\ddot{x} \qquad (1)$$

همچنین با نوشتن F.B.D برای نقطه Q:



$$k_2(x-y) - k_1 y = \cancel{m_Q}^{\,0}\, \ddot{y}$$

$$k_2 x = (k_1+k_2)y \Rightarrow y = \frac{k_2}{k_1+k_2} y \qquad (2)$$

از (۱) و (۲)

$$-k_2\left(x - \frac{k_2}{k_1+k_2}x\right) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + k_2\left(\frac{k_1+\cancel{k_2}-\cancel{k_2}}{k_1+k_2}\right)x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x = 0$$

از این رابطه:

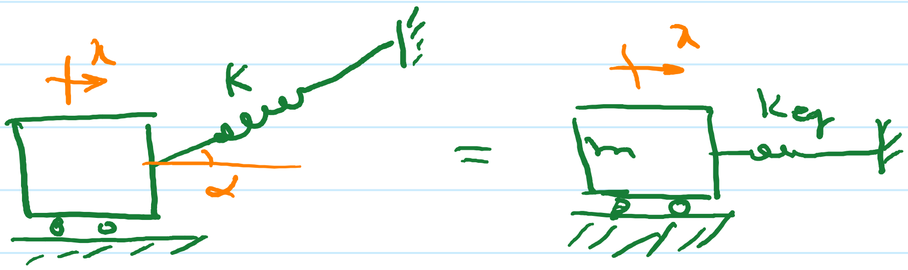
$$k_{eq} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{k_1+k_2}{k_1k_2} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

و در حالت کلی

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$$

در فنرهای سری، نیروی فنرها مساوی و جابجایی آنها متفاوت است.

۲. فنر کج

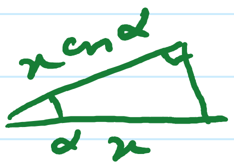


فنر K با زاویه α نسبت به امتداد درجه آزادی قرار گرفته است.

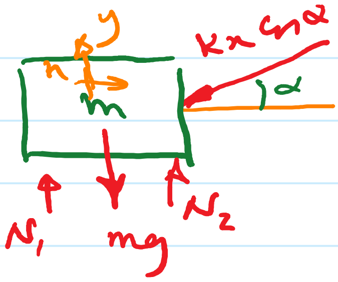
در اینجا فرض می‌کنیم که جابجایی x کوچک بوده و فنر فقط در امتداد خود کشیده یا فشرده می‌شود.

در این صورت اگر جرم به اندازه x در جهت درجه آزادی جابجا شود

فنر به میزان $x\cos\alpha$ تغییر طول می‌دهد.



F.B.D :



نیروی فنر از رابطه

$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -(Kx\cos\alpha)\cos\alpha = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - mg - Kx\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

معادله حرکت:

$$m\ddot{x} + (K\cos^2\alpha)x = 0 \Rightarrow K_{eq} = K\cos^2\alpha$$

برای n فنر کج:

$$K_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i \cos^2\alpha_i$$

برای میراکننده‌ها روابط دقیقاً مانند فنرهاست یعنی:

میراکننده موازی:

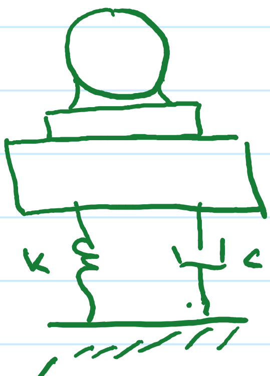
$$c_{eq} = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

میراکننده سری:

$$\frac{1}{c_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}$$

میراکننده کج:

$$c_{eq} = \sum_{i=1}^{n} c_i \cos^2\alpha_i$$



مثال: موتوری به جرم 68kg مانند شکل روی ایزولاتوری به جرم 1200kg قرار گرفته است. فرکانس طبیعی مجموعه 160 c/min است. نمونه ارتعاش آزاد این سیستم حاکی از آن است که دو دامنه متوالی آن در یک طرف حالت تعادل برابر 4mm و 2.13mm است. اگر این سیستم تحت اثر یک نیروی هارمونیک منظم $F = 100\sin 31.4t$ قرار گیرد مطلوبست تعیین دامنه ارتعاشات، نیروی منتقل شده و زاویه فاز

$$m = 1200 + 68 = 1268 \text{ kg}$$ جرم کل

$$K = m\omega_n^2 = 1268\left(160\,\frac{c}{min} \times \frac{2\pi\ rad}{1\ c} \times \frac{1\ min}{60\ s}\right)^2 = 355966.7\ N/m$$

برای محاسبه نسبت استهلاک از کاهش لگاریتمی استفاده می‌کنیم:

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{1}{1}\ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{4}{2.13} = 0.63017$$

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.0998 \ ,$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{31.4}{17.755} = 1.874$$

$$x_0 = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = 0.11\ mm$$

$$F_{T0} = \left[\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right]^{1/2} F_0 = 42.04\ N$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2} = 8.47^\circ \Rightarrow \alpha = 171.53^\circ$$

$\beta = \tan^{-1} 2\xi r = 6.08$