# نمایش برداری ارتعاشات اجباری

همانطور که دیده شد معادله دیفرانسیل حرکت در ارتعاشات اجباری با تحریک هارمونیک عبارت است از:

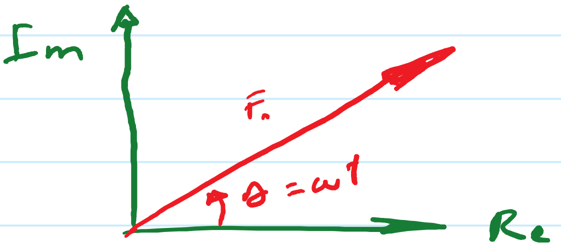
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F \qquad (1)$$

که $F=F_0\sin\omega t$ و پاسخ سیستم:

$$x=x_0\sin(\omega t+\alpha)$$

حرکت هارمونیک $F$ و $x$ در صفحه برداری را می‌توان به صورت چرخش برداری نشان داد. در صورتیکه $F$ برداری با اندازه $F_0$ باشد که در هر لحظه دارای زاویه $\theta=\omega t$ است:

$$F=\mathrm{Im}\,F_0e^{j\omega t}$$




که $\theta$ زمان زاویه طی شده، یعنی بردار $F$ در صفحه مختلط می‌چرخد. تصویر $F$ همان $F_0\sin\omega t$ است.

همچنین از مشتق جابجایی را هم نیروی بنویسیم:

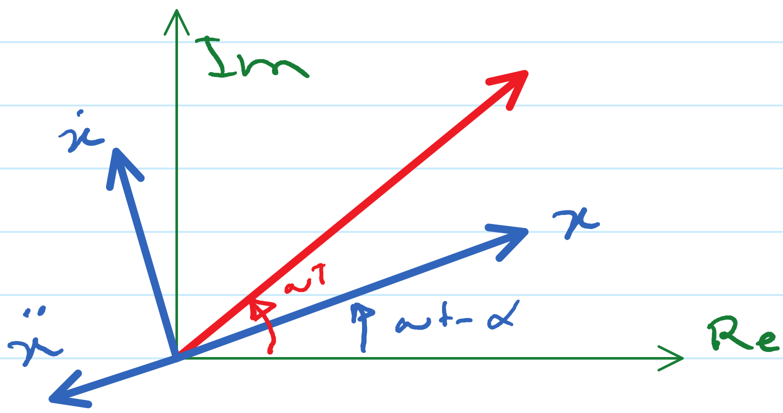
$$x=\mathrm{Im}\,x_0e^{j(\omega t-\alpha)}$$

این بردار نیز به اندازه $x_0$ و زاویه $\omega t-\alpha$ چرخش دارد. در این صورت سرعت و شتاب:

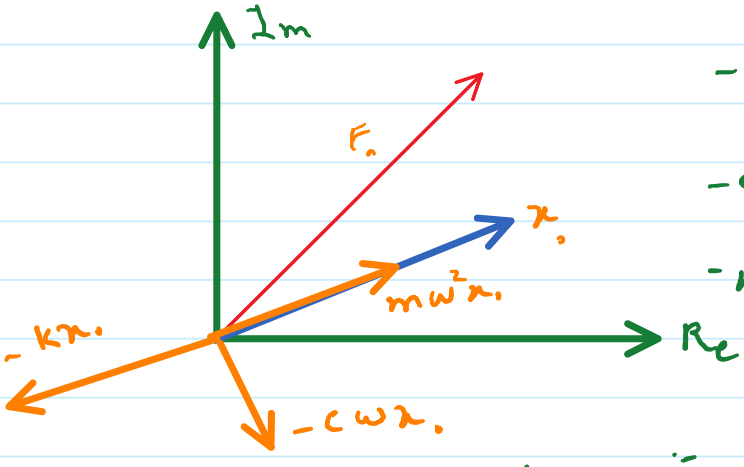
$$\dot{x}=j\omega x_0e^{j(\omega t-\alpha)}=\omega x_0e^{j(\omega t-\alpha+\pi/2)} \qquad j=\cos\tfrac{\pi}{2}+j\sin\tfrac{\pi}{2}=e^{j\pi/2}$$

$$\ddot{x}=(j\omega)^2x_0e^{j(\omega t-\alpha)}=-\omega^2x_0e^{j(\omega t-\alpha)}=\omega^2x_0e^{j(\omega t-\alpha+\pi)}$$

$$-1=\cos\pi+j\sin\pi=e^{j\pi}$$



حال مقادیر تک‌تک موجود در معادله (۱) را نشان داد



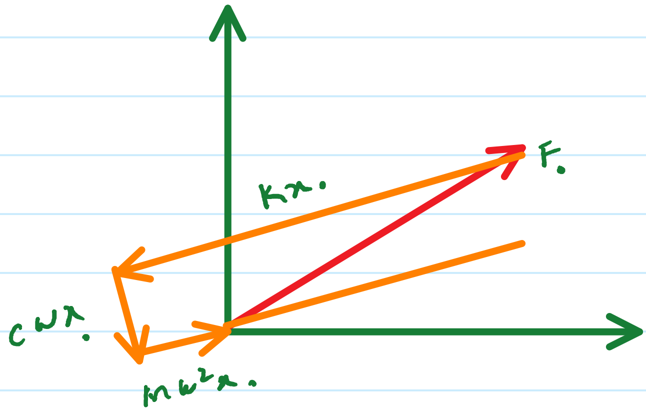

$$-kx = -kx_0 e^{j(\omega t-\alpha)} = kx_0 e^{j(\omega t-\alpha+\pi)}$$

$$-c\dot{x} = -c\omega x_0 e^{j(\omega t-\alpha+\frac{\pi}{2})} = c\omega x_0 e^{j(\omega t-\alpha+\frac{3\pi}{2})}$$

$$-m\ddot{x} = -m\omega^2 x_0 e^{j(\omega t-\alpha+\pi)} = m\omega^2 x_0 e^{j(\omega t-\alpha)}$$

حال می‌توان درکی از رفتار کلی سیستم را با استفاده از چنین بردارهایی به دست آورد. حالات زیر را بررسی می‌کنیم:

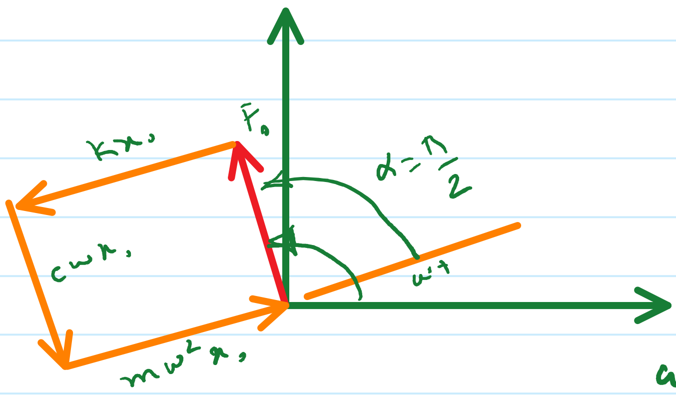
۱- سختی کوچک باشد $\omega<\omega_n$




در این حالت نیروی دمپر و نیروی اینرسی کوچک بوده ($\omega$ کم) و نیروی الاستیک فنر نیروی غالب است که نیروی خارجی F را بالانس می‌کند. بنابراین نیروی الاستیک تقریباً با نیروی F برابر و نیروی وارده تقریباً با جابجایی هم‌فاز است.

۲. $\omega=\omega_n$

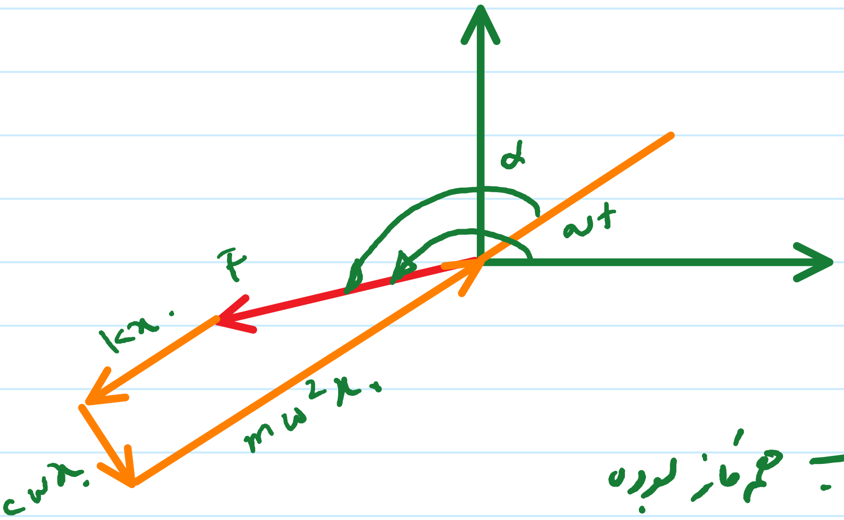
در این حالت نیروی الاستیک و نیروی اینرسی برابر هستند زیرا:




$$\omega^2=\omega_n^2=\frac{k}{m} \Rightarrow m\omega^2 x_0 = m\omega_n^2 x_0 = kx_0$$

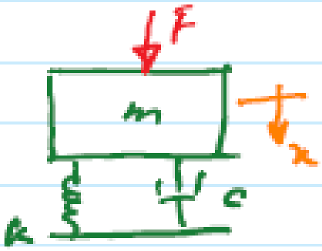
در این حالت زاویه فاز $\alpha=\frac{\pi}{2}$ و نیروی وارده با نیروی دمپر بالانس می‌شود.

۳- $\omega$ بزرگ باشد $\omega > \omega_n$




در این حالت به دلیل جمله $\omega^2$ مقدار نیروی اینرسی زیاد بوده و تقریباً نیروی خارجی را بالانس می‌کند.
همچنین نیروی خارجی تقریباً با شتاب هم فاز بوده و $\phi$ به سمت $\pi$ می‌رود.

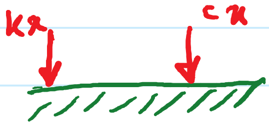
## نیروی منتقل شده به کف — Transmitted Force




سیستم یک درجه آزادی که از یک جرم m، دمپر c و فنر k تشکیل شده و تحت نیروی هارمونیک F قرار دارند در نظر بگیرید:

به دنبال تعیین نیروهای وارد بر کف هستیم تا در طراحی آن این نیروها را لحاظ کنیم.
در صورت عدم تحلیل این نیروها، نیروهای نامتعادل ناخواسته ممکن است باعث خرابی سیستم و کف شوند.

در حالت استاتیکی نیروی وزن توسط فنر به کف منتقل می‌شود. این نیرو معلوم است و در محاسبات دینامیکی آن را وارد نمی‌کنیم. اما در طراحی وارد می‌شود.




در حالت دینامیکی دیاگرام جسم آزاد فنر را رسم کرده و نیروی وارده بر آن را نشان میدهیم.

این نیروها از طرف دمپر و فنر اعمال می‌گردند.

با جابجایی $x$ و سرعت $\dot{x}$ در حرکت نیروهای $kx$ و $c\dot{x}$ به کف وارد میشود.

بنابراین نیروی منتقل شده عبارت است از:

$$F_t = kx + c\dot{x}$$

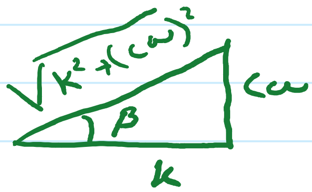
$$x = x_0 \sin(\omega t - \alpha)$$

بنابراین:

$$F_t = k x_0 \sin(\omega t - \alpha) + c\omega x_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

$$= \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}\, x_0 \left[ \underbrace{\frac{k}{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}}_{\cos\beta} \sin(\omega t - \alpha) + \underbrace{\frac{c\omega}{\sqrt{k^2+(c\omega)^2}}}_{\sin\beta} \cos(\omega t - \alpha) \right]$$

اگر دو مقدار $k$ و $c\omega$ دو ضلع عمود بر هم یک مثلث باشند:

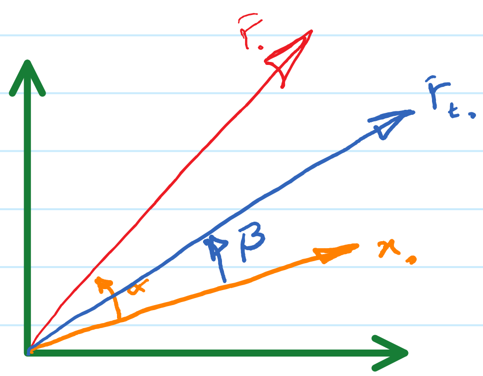



$$F_t = \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}\, x_0 \sin(\omega t - \alpha + \beta)$$

$$= \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}\, \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \alpha + \beta)$$

$$F_t = F_{t_0} \sin(\omega t - \alpha + \beta) \quad , \quad F_{t_0} = \left[ \frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2}$$

$\beta$ بنام زاویه پیش انداز فاز (Phase Lead Angle) نامیده میشود.



این رابطه را می‌توان از روش اپراتوری نیز بدست آورد :

$$F_t = kx + c\dot{x} = kx + cDx = (k + cD)x \qquad D = d/dt$$

همچنین $x$ برابر است با :

$$x = \frac{1}{mD^2 + cD + k}\left(\operatorname{Im} F_0 e^{j\omega t}\right)$$

در نتیجه

$$F_t = (k + cD)\frac{1}{mD^2 + cD + k}\left(\operatorname{Im} F_0 e^{j\omega t}\right)$$

$$= \frac{k + cD}{mD^2 + cD + k}\left(\operatorname{Im} F_0 e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Im} \frac{k + c(j\omega)}{m(j\omega)^2 + c(j\omega) + k} F_0 e^{j\omega t}$$

$$= \operatorname{Im} \frac{k + jc\omega}{(k - m\omega^2) + jc\omega} F_0 e^{j\omega t}$$

$$= \operatorname{Im} \frac{\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}\, e^{j\beta} F_0 e^{j\omega t}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\, e^{j\alpha}}$$

$$= \left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right]^{1/2} F_0 \operatorname{Im} e^{j(\omega t - \alpha + \beta)}$$

$$F_t = F_{t_0} \sin(\omega t - \alpha + \beta) \quad , \quad F_{t_0} = \left[\frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}\right]^{1/2}$$

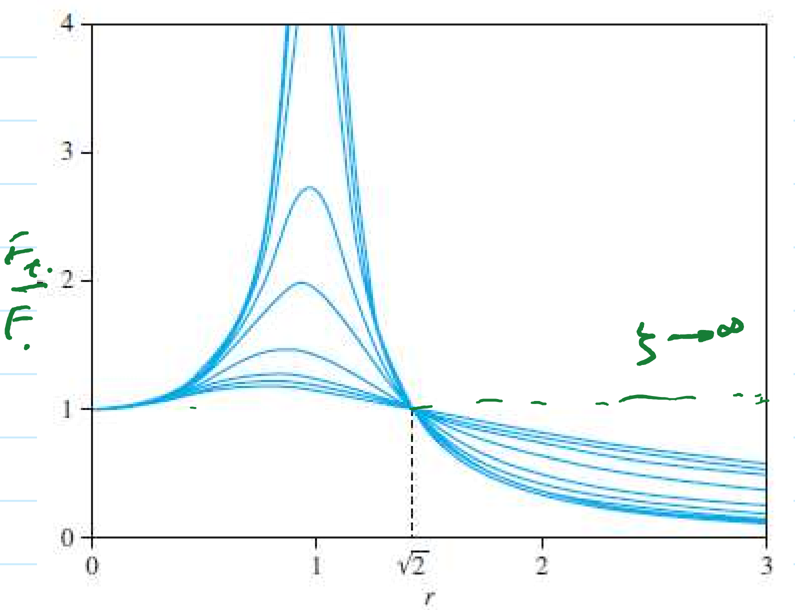
این رابطه را می‌توان مانند قبل ساده‌تر نمود. با تقسیم دو طرف بر $F$ و فاکتورگیری $k$ صورت و مخرج خواهیم داشت :

$$\frac{F_{t_0}}{F_0} = \left[\frac{1 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}\right]^{1/2} = \left[\frac{1 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta \omega/\omega_n\right)^2}\right]^{1/2}$$

و با $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ :

$$\frac{F_t}{F_0} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{1/2}$$

منحنی دامنه نیروی منتقل شده برحسب نسبت فرکانس r بصورت زیر می‌باشد:




نقطه تقاطع همه منحنی‌ها $r=\sqrt{2}$ است

تعیین محل برخورد:

$$\frac{F_{t0}}{F_0}=1 \qquad \zeta\to\infty$$

$$\frac{F_{t0}}{F_0}=\frac{-1}{1-r^2} \qquad \zeta=0$$

$$\frac{-1}{1-r^2}=1 \Rightarrow r=\sqrt{2}$$

اگر در سایر منحنی‌ها $r=\sqrt{2}$ قرار گیرد دیده می‌شود:

$$\frac{F_{t0}}{F_0}=\left(\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right)^{1/2}=\left(\frac{1+(2\zeta\sqrt{2})^2}{(1-2)^2+(2\zeta\sqrt{2})^2}\right)^{1/2}=1$$

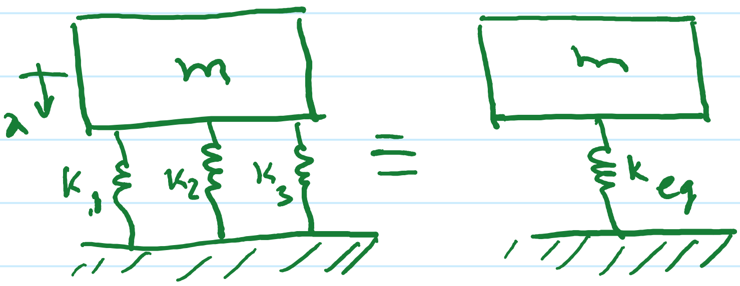
یعنی همه منحنی‌ها از این نقطه عبور می‌کنند.

از این منحنی دیده می‌شود که در $r<\sqrt{2}$ با افزایش استهلاک نیروی منتقل شده به کف کم می‌شود ولی در $r>\sqrt{2}$ با افزایش استهلاک این نیرو زیاد می‌گردد. این امر از آنجاکه در فرکانس‌های بالا مسئله خستگی اهمیت می‌یابد مهم است.

# Equivalent Springs فنر معادل

فنرها را می‌توان با یک فنر معادل جایگزین کرد. در زیر این حالت‌ها را بررسی کرده و برای هر کدام فنر معادل را پیدا می‌کنیم.

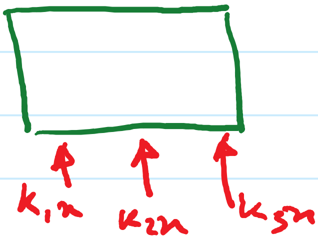
الف - فنرهای موازی



فرض کنید سیستم جرم و فنری به صورت موازی داریم. به دنبال معادل این سیستم هستیم (شکل سمت راست).

در فنرهای موازی یک انتهای فنر به جسم و انتهای دیگر به زمین متصل است.

با رسم F.B.D جرم:



$$\sum F_x = m\ddot{x}$$

$$-k_1x - k_2x - k_3x = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + (k_1+k_2+k_3)x = 0$$

$$m\ddot{x} + k_{eq}x = 0$$

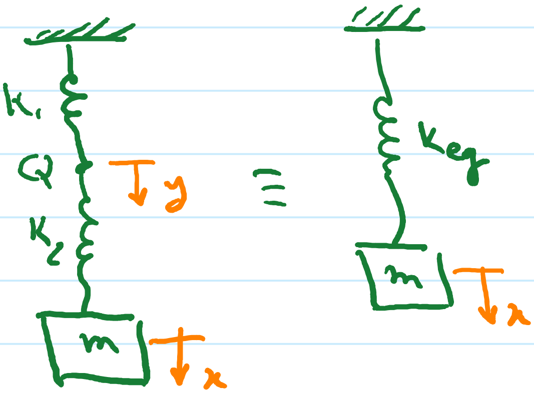
بنابراین فنر معادل عبارت است از:

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

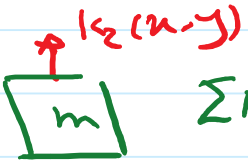
در فنرهای موازی کلیه فنرها دارای جابجایی یکسان ولی نیروهای متفاوت هستند.

## ب- فنرهای سری

در فنرهای سری، آنها پشت سرهم بسته می‌شوند.

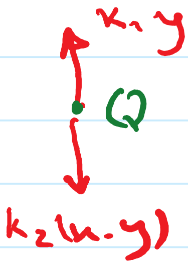



با در نظر گرفتن F.B.D برای جرم:




$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -k_2(x-y) = m\ddot{x} \quad (1)$$

همچنین با نوشتن F.B.D برای نقطه Q:




$$k_2(x-y) - k_1 y = \cancel{m_Q}\,\ddot{y}$$

$$k_2 x = (k_1+k_2)y \Rightarrow y = \frac{k_2}{k_1+k_2}y \quad (2)$$

از (1) و (2)

$$-k_2\left(x - \frac{k_2}{k_1+k_2}x\right) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + k_2\left(\frac{k_1+\cancel{k_2}-\cancel{k_2}}{k_1+k_2}\right)x = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}x = 0$$

از این رابطه:

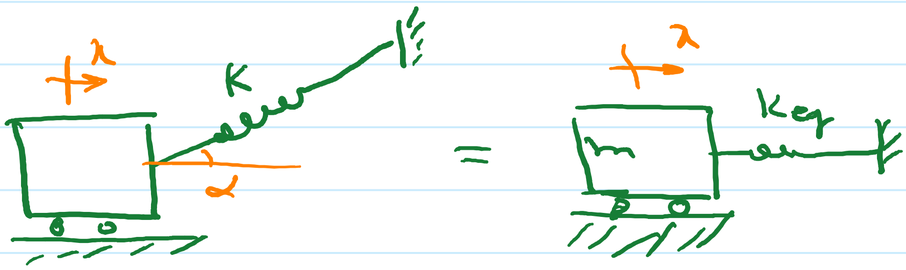
$$k_{eq} = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{k_1+k_2}{k_1k_2} = \frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$$

و در حالت کلی

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$$

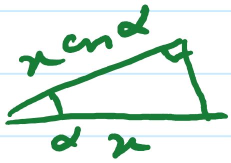
در فنرهای سری، نیروی فنرها مساوی و جابجایی آنها متفاوت است.

## ۲. فنر کج

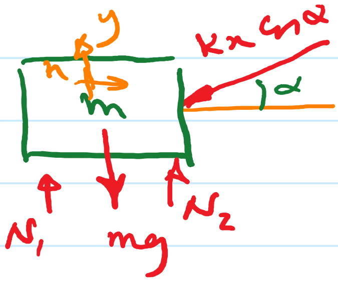



فنر $k$ با زاویه $\alpha$ نسبت به امتداد درجه آزادی قرار گرفته است.

در اینجا فرض می‌کنیم که جابجایی $x$ کوچک بوده و فنر فقط در امتداد خود کشیده یا فشرده شود.




در این صورت اگر جرم به اندازه $x$ در جهت درجه آزادی جابجا شود فنر به میزان $x\cos\alpha$ تغییر طول می‌دهد.




F.B.D :

نیروی فنر از رابطه

$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -(kx\cos\alpha)\cos\alpha = m\ddot{x}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 - mg - kx\cos\alpha\sin\alpha = 0$$

نیروی فنر در جهت حرکت:

$$m\ddot{x} + (k\cos^2\alpha)x = 0 \Rightarrow k_{eq} = k\cos^2\alpha$$

برای n فنر کج.

$$k_{eq} = \sum_{i=1}^{n} k_i\cos^2\alpha_i$$

برای مستهلک کننده‌ها روابط دقیقاً مانند فنرهاست یعنی:

مستهلک کننده موازی:

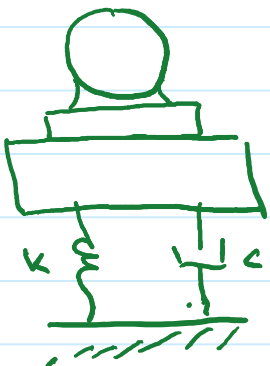
$$c_{eq} = \sum_{i=1}^{n} c_i$$

مستهلک کننده سری:

$$\frac{1}{c_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i}$$

مستهلک کننده کج:

$$c_{eq} = \sum_{i=1}^{n} c_i\cos^2\alpha_i$$



مثال: موتوری به جرم 68kg مانند شکل روی ایزولاتوری به جرم 1200kg قرار گرفته است. فرکانس طبیعی مجموعه 160 r/min است. نمونه ارتعاش آزاد این سیستم حاکی از آن است که دو دامنه متوالی آن در یک طرف حالت تعادل برابر 4mm و 2.13mm است. اگر این سیستم تحت اثر یک نیروی هارمونیک منظم $F = 100\sin 31.4t$ قرار گیرد مطلوبست تعیین دامنه ارتعاشات، نیروی منتقل شده و زاویه فاز

$$m = 1200 + 68 = 1268\ kg$$ جرم کل

$$K = m\omega_n^2 = 1268\left(160\ \frac{r}{min} \times \frac{2\pi\ rad}{1r} \times \frac{1\ min}{60\ s}\right)^2 = 355966.7\ N/m$$

برای محاسبه نسبت استهلاک از کاهش لگاریتمی استفاده می‌کنیم:

$$\delta = \frac{1}{n}\ln\frac{x_1}{x_{n+1}} = \frac{1}{1}\ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{4}{2.13} = 0.63017$$

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.0998\ ,$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{31.4}{17.755} = 1.874$$

$$x_0 = \frac{F_0/K}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = 0.11\ mm$$

$$F_{T0} = \left[\frac{1+(2\zeta r)^2}{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}\right]^{1/2} F_0 = 42.04\ N$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2} = 8.47^\circ \Rightarrow \alpha = 171.53^\circ$$

$\beta = \tan^{-1} 2\xi r = 6.08$