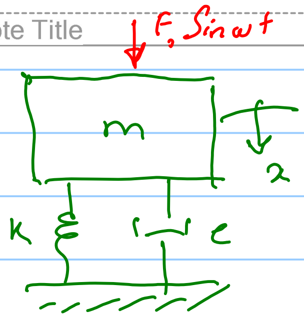
Note Title ۲۰۲۰/۰۳/۱۷

ارتعاشات اجباری با تحریک هارمونیک



سیستم یک درجه آزادی شکل روبرو تحت تحریک هارمونیک بررسی شده و پاسخ تعویض زیر بدست آمد:

$$x = x_0 \sin(\omega t - \alpha) \qquad (1)$$

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \quad , \quad \alpha = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k-m\omega^2} \qquad (2)$$

حال به دنبال بررسی اثرات پارامترهای نیرو یعنی F_0 و ω بر روی پاسخ هستیم.

همانطور که دیده می‌شود F_0 اثر مستقیم و خطی بر روی x_0 داشته و با زیاد و یا کم شدن آن x_0 زیاد و یا کم می‌شود. همچنین F_0 اثری بر روی زاویه فاز ندارد.

ولی اثر ω پیچیده‌تر بوده و بر هر دو x_0 و α و لذا فهم تعویض پیچیده‌تر اثر دارد.

بررسی اثر ω بر روی x_0 منجر به پیدایش منحنی‌های پاسخ فرکانسی سیستم می‌شود.

در این بررسی ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که استهلاک در سیستم نداریم.

برای این حالت معادله دیفرانسیل حاکم عبارت است از:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \Rightarrow \ddot{x} + \omega_n^2 = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \qquad (3)$$

در این صورت پاسخ از جواب بالا عبارت است از:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

اگر شرایط اولیه تعویض $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ باشند، جواب کلی:

$$x(t)= A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\omega t \qquad (4)$$

$$x(0)= x_0 = A\underbrace{\cancel{\cos 0}}_{1} + B\underbrace{\cancel{\sin 0}}_{0} + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\underbrace{\cancel{\sin 0}}_{0} \Rightarrow A = x_0$$

$$\dot{x}(t)= -\omega_n A\sin\omega_n t + \omega_n B\cos\omega_n t + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\omega\cos\omega t$$

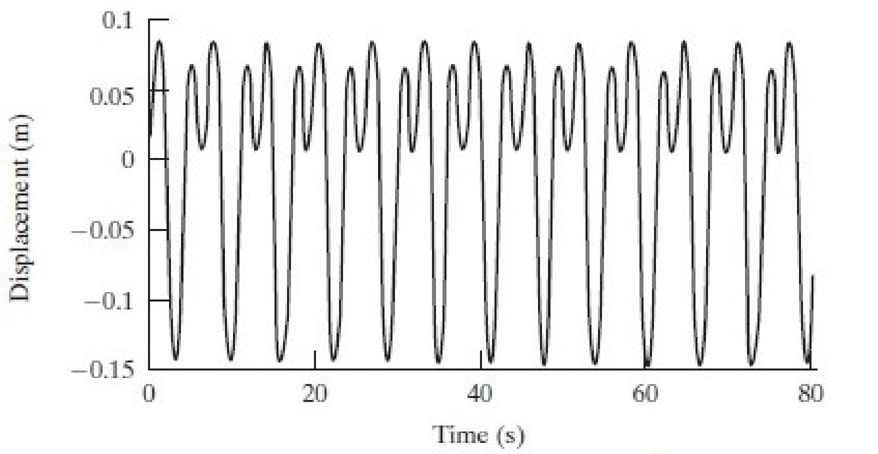
$$\dot{x}(0)=\dot{x}_0 = -\omega_n A\underbrace{\cancel{\sin 0}}_{0} + \omega_n B\underbrace{\cancel{\cos 0}}_{1} + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\omega\underbrace{\cancel{\cos 0}}_{1}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{\omega_n}\frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\omega + \frac{1}{\omega_n}\dot{x}_0$$

بنابراین پاسخ کلی عبارت است از :

$$x(t)= x_0\cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\left(\dot{x}_0 - \frac{F_0\,\omega}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\right)\sin\omega_n t + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\omega t \qquad (5)$$

همانطور که دیده می‌گردد پاسخ سیستم مجموع دو پاسخ با دو فرکانس ω و ω_n است.



شکل مقابل سیستم را که دارای فرکانس طبیعی $1\ rad/s$، فرکانس تحریک $2\ rad/s$ و با شرایط اولیه ذکر شده است.

The response of an undamped system with $\omega_n = 1$ rad/s to harmonic excitation at $\omega = 2$ rad/s and nonzero initial conditions of $x_0 = 0.01$ m and $\dot{x}_0 = 0.01$ m/s and magnitude $f_0 = 0.1$ N/kg. The motion is the sum of two sine curves of different frequencies.

این رفتار تا هنگامی که ω نزدیک به ω_n نباشد به همین فرم خواهد بود.

در صورتیکه ω به ω_n خیلی نزدیک شود در رابطه (5) را می‌توان ساده‌تر نمود. در این رابطه
اگر عبارت با ضریب $\frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}$ را در نظر بگیریم:

$$= \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\left[-\cancel{\frac{\omega}{\omega_n}}^{\,1}\sin\omega_n t + \sin\omega t\right]$$

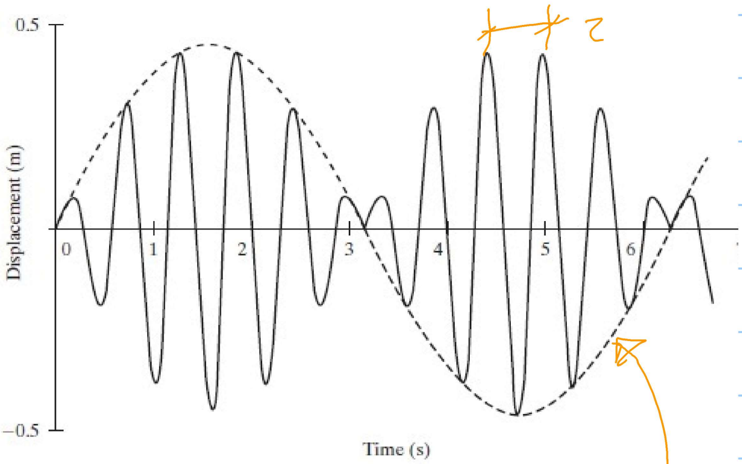
$$= \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\left[2\sin\left(\frac{\omega-\omega_n}{2}\right)t \cdot \cos\left(\frac{\omega+\omega_n}{2}\right)t\right]$$

$$= \left[\frac{2F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{\omega-\omega_n}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\omega+\omega_n}{2}\right)t \qquad (6)$$

همانطور که دیده می‌شود پاسخ فوق یک موج کسینوسی است که فرکانس آن

$$\frac{\omega+\omega_n}{2} \simeq \omega_n \qquad (7)$$

و دامنه آن نیز تغییر می‌یابد. این دامنه با فرکانس اندک $\frac{\omega-\omega_n}{2}$ نوسان می‌کند. به این پدیده ضربان (Beating) گویند.



The response of an undamped system of equation (2.13) for small $\omega_n - \omega$ illustrating the phenomenon of beats. Here $f_0 = 10$ N, $\omega_n = 10$ rad/s, and $\omega = 1.1\,\omega_n$ rad/s. The dashed line is a plot of $\frac{2f_0}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\omega_n-\omega}{2}t\right)$.

شکل زیر این پدیده را نشان می‌دهد.

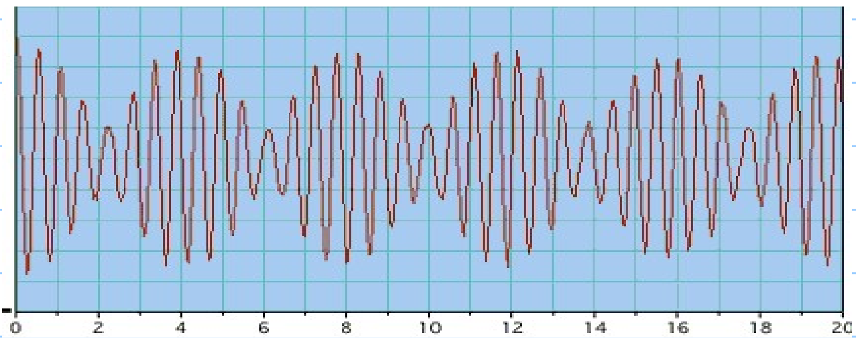
پریود موج عبارت است از:

$$\tau = \frac{2\pi}{\frac{\omega+\omega_n}{2}} = \frac{4\pi}{\omega+\omega_n} \qquad (8)$$

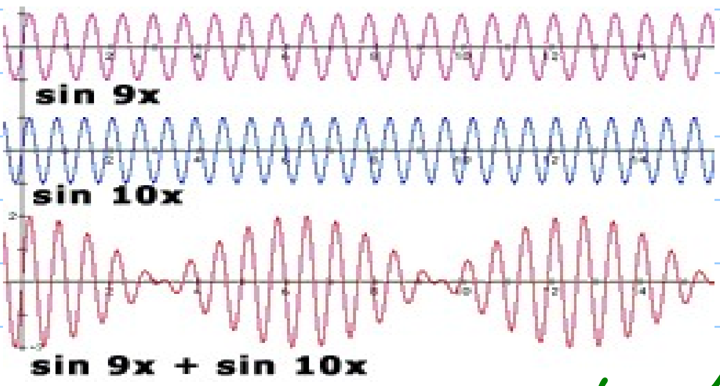
پاسخ نهایی از مجموع پاسخ فوق و پاسخ همگن رابطه (5) بدست می‌آید:

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \dot{x}_0\sin\omega_n t + \left(\frac{2F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\frac{\omega-\omega_n}{2}t\right)\cos\frac{\omega+\omega_n}{2}t \qquad (9)$$

شکل روبرو نمایش از رفتار معادله فوق را نشان می‌دهد.



در حقیقت پدیده ضربان تداخل دو موج با فرکانس‌های نزدیک به هم چنانچه در شکل روبرو نشان داده شده است می‌باشد.



اگر در ادامه نزدیک‌تر شدن فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی، این دو یکی شوند لذا الف (۴-۱) دیده می‌شود که پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی هر دو دارای یک فرکانس (جواب) البته و این مانند حالتی است که ریشه مضاعف داشته باشیم و در این حالت لذا پاسخ خصوصی بدست آمده نمی‌توان استفاده کرد.

برای این حالت از معادله دیفرانسیل حرکت $m\ddot{x}+kx=F_0\sin\omega t$ می‌توان دید که

اگر پاسخ خصوصی هارمونیک باشد:

$$\ddot{x}=-\omega^2 x=-\omega_n^2 x$$

و از جایگذاری در این معادله

$$m(-\omega_n^2 x)+kx=F_0\sin\omega_n t$$

$$-kx+kx=F_0\sin\omega_n t \Rightarrow 0=F_0\sin\omega_n t$$

که غلط است.

پس در حالتی که $\omega=\omega_n$ باشد، پاسخ خصوصی هارمونیک نبوده و جواب (۴-۱) برقرار نمی‌باشد.

از معادله دیفرانسیل می دانیم که در هنگام نوشتن رشد فضای پاسخ دوم را به صورت حاصل ضرب t در پاسخ قبلی در نظر می گیریم:

$$x_p = t(A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t)$$
$$= tX$$

از جایگذاری این رابطه در معادله دیفرانسیل (3):

$$\dot{x}_p = X + t\dot{X} \quad , \quad \ddot{x}_p = \dot{X} + \dot{X} + t\ddot{X} = 2\dot{X} + t\ddot{X}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega_n t$$

$$(2\dot{X} + t\ddot{X}) + \omega_n^2 t X = \frac{F_0}{m}\sin\omega_n t$$

$$2\dot{X} + \cancel{t(-\omega_n^2 X)} + \cancel{\omega_n^2 t X} = \frac{F_0}{m}\sin\omega_n t$$

$$2\dot{X} = 2\omega_n(-A_1 \sin\omega_n t + A_2 \cos\omega_n t) = \frac{F_0}{m}\sin\omega_n t$$

$$\Rightarrow A_2 = 0 \quad , \quad A_1 = -\frac{F_0}{2m\omega_n} \qquad (10)$$

بنابراین پاسخ خصوصی عبارت است از:

$$x_p(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_n} t\cos\omega_n t$$

از جایگذاری این رابطه به جای پاسخ خصوصی در (4) و اعمال شرایط اولیه، ثوابت A و B بدست می آیند. در نهایت پاسخ عبارت است از:

$$x(t) = x_0 \cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} + \frac{F_0}{2m\omega_n^2}\right)\sin\omega_n t - \frac{F_0}{2m\omega_n} t\cos\omega_n t \qquad (11)$$

این شکل پاسخ نشان می دهد که مرتب با گذشت زمان دامنه حرکت زیاد می شود.

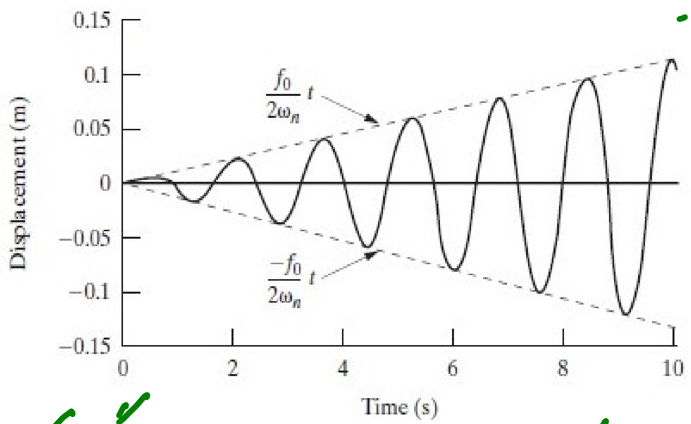
این پدیده به نام تشدید (Resonance) معروف بوده و مشکلات زیادی را در صنعت ایجاد می کند.

هنگامی که ارتعاش به سیستم وارد شود شروع می‌شود در حرکت پایدار سیستم در فرکانس طبیعی رخ می‌دهد و این امر ناشی از این است که انرژی اضافی و وارداتی از خارج سیستم ندارد.

بنابراین در صورت وجود نیروی هارمونیک خارجی، این نیرو باعث می‌گردد که سیستم حرکت ترکیبی از دو فرکانس ارتعاش نماید.

اما اگر فرکانس نیروی خارجی برابر با فرکانس طبیعی سیستم باشد، کار انجام شده توسط نیروی خارجی به جای داشتن حرکت پایدار نداشته و بنابراین باعث می‌گردد که انرژی کل سیستم نیز افزایش گردد. این امر سبب افزایش دامنه سیستم شده و ممکن است منجر به شکست شود.

این امر در شکل روبرو قابل مشاهده است.



پدیده تشدید، پدیده خطرناکی است که در طراحی با شناسایی می‌توان از وقوع آن جلوگیری کرد.

در ادامه به ترسیم منحنی دامنه ارتعاشات اجباری پایدار بر حسب فرکانس می‌پردازیم.

نکته: پیک نیز در اثر از بین رفتن میرایی کم نمی‌شود.

درصورتی که تحریک نداشته باشیم ($\omega = 0$)، یعنی تحریک با دامنه ثابت F_0 باشد

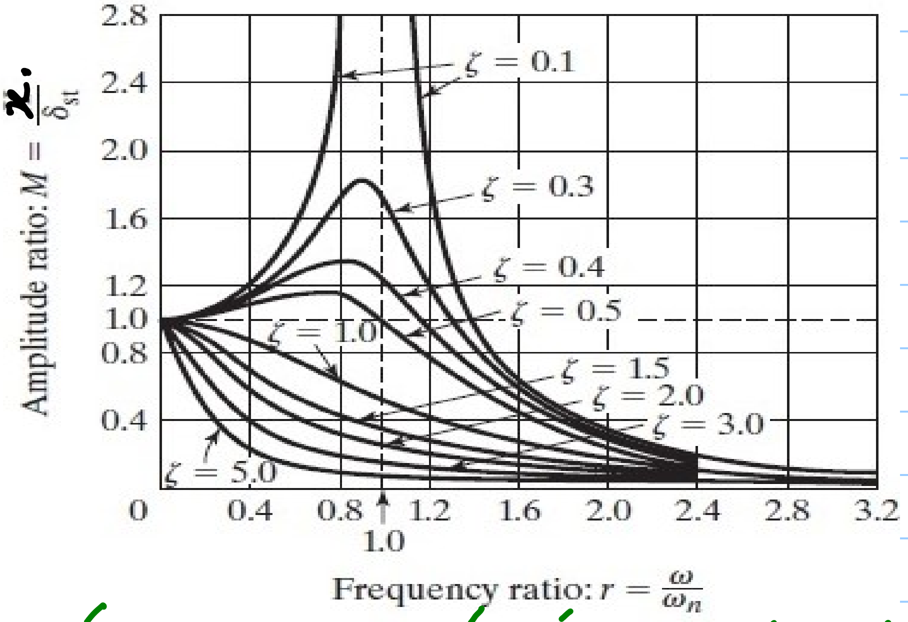
$\omega = 0 \Rightarrow x_0 = F_0/k$ $\qquad$ $\omega \to \infty \Rightarrow x_0 \to 0$

$c = 0 \Rightarrow$ $\qquad$ $\omega = \omega_n \Rightarrow x_0 \to \infty$

درصورت رسم منحنی خواهیم داشت:

قسمت منفی منحنی را با تصویر کردن در بالا نشان داده‌ایم، زیرا در اینجا به دنبال دامنه هستیم.

ما رسم این منحنی مربوط به حالاتی که c صفر نباشد $(c>0)$:



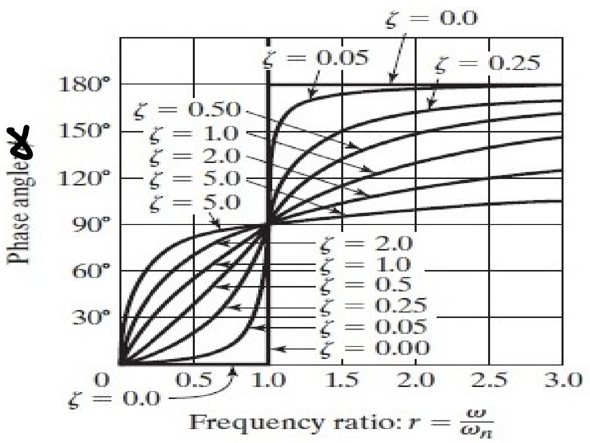
این منحنی برحسب دامنه می‌باشد

$$\frac{x_0}{\delta_{st}} = \frac{x_0}{F_0/k}$$

و فرکانس می‌باشد $r = \frac{\omega}{\omega_n}$ رسم شده است.

دیده می‌شود که با افزایش ζ ماکزیمم دامنه به سمت چپ حرکت می‌کند. همچنین با ازدیاد ζ ماکزیمم دامنه در $r=0$ رخ می‌دهد.

- مشابه این منحنی را می‌توان برای زاویه تأخیر فاز نیز رسم نمود.



و دیده می‌شود که همه منحنی‌ها از $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ عبور می‌کنند.

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$\omega = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$\omega \to \omega_n \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

$\omega \to \infty \Rightarrow \alpha \to 180^\circ$

حال رابطه مربوط به دامنه و زاویه تاخیر فاز را کمی ساده می‌کنیم:

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\frac{m}{k}\omega^2\right)^2+\left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

با در نظر گرفتن $r=\frac{\omega}{\omega_n}$ در نتیجه

$$x_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} \qquad (12)$$

درصدد هستیم دامنه را هم بی بعد کنیم:

$$\frac{x_0}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}} = M$$

این رابطه به نام ضریب بزرگنمایی (Magnification Factor) گویند.

برای زاویه تاخیر فاز نیز:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\frac{c\omega}{k}}{1-\frac{m\omega^2}{k}} = \tan^{-1}\frac{2\zeta r}{1-r^2} \qquad (13)$$

در صورتی که ماکزیمم دامنه یعنی پاسخ فرکانسی را بخواهیم از این تابع نسبت به ω یا r مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{x_0}{F_0/k}\right)=0 \Rightarrow \cdots \quad \frac{\cancel{2}(1-r^2)(-\cancel{2}r)+2(\cancel{4}\zeta^2 r)}{2\sqrt{(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2}}=0$$

$$\Rightarrow -(1-r^2)r+2\zeta^2 r=0 \Rightarrow r\left[2\zeta^2-(1-r^2)\right]=0$$

(14)

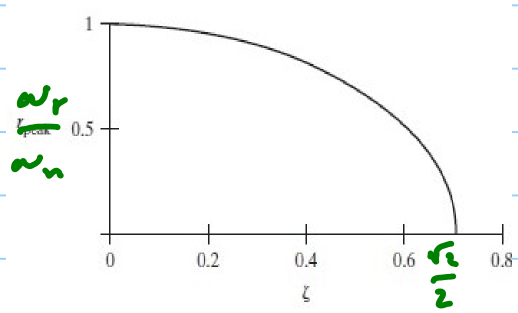
$r=0$ نقطه ابتدای منحنی

$$2\zeta^2-1+r^2=0 \Rightarrow r^2=1-2\zeta^2 \Rightarrow r=\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{1-2\zeta^2}$$

این فرکانس که آن را بیشترین فرکانس تشدید ارتعاشات اجباری نامیده را با علامت ω_r نشان می‌دهیم و نشان می‌دهد با افزایش ζ ماکزیمم دامنه به سمت چپ میل می‌کند.

رابطه (۱۴) را می‌توان بفرم زیر نوشت :

$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2 = 1-2\zeta^2 \Rightarrow \frac{\zeta^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2}{1} = 1 \qquad (15)$$

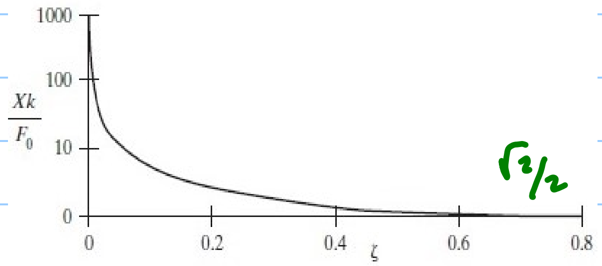


که نشان دهنده یک بیضی است.

همچنین اگر رابطه (۱۴) را در رابطه دامنه قرار دهیم، دامنه ماکزیمم بدست می‌آید.

$$\frac{X_{0max}}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-(1-2\zeta^2))^2+(2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2})^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (16)$$

که نمودار آن بفرم زیر است :



مقدار زاویه تأخیر فاز در ω_r عبارت است از:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} \qquad (17)$$