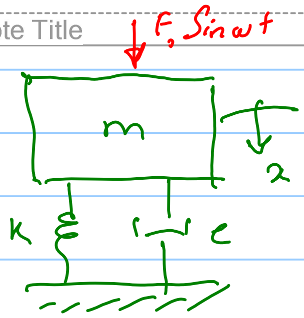
ارتعاشات اجباری با تحریک هارمونیک



سیستم یک درجه آزادی شکل روبرو تحت تحریک هارمونیک بررسی شده و پاسخ بصورت زیر بدست آمد:

$$x = x_0 \sin(\omega t - \alpha) \qquad (1)$$

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \;,\; \alpha = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad (2)$$

حال به دنبال بررسی اثرات پارامترهای نیرو یعنی F_0 و ω بر روی پاسخ هستیم.

همانطور که دیده می‌شود F_0 اثر مستقیم و خطی بر روی x_0 داشته و با زیاد و یا کم شدن آن x_0 زیاد و یا کم می‌شود. همچنین F_0 اثری بر روی زاویه فاز ندارد.

ولی اثر ω پیچیده‌تر بوده و بر هر دو x_0 و α به صورت پیچیده‌تر اثر دارد.

بررسی اثر ω بر روی x_0 منجر به پدیده تشدید در پاسخ فرکانسی سیستم می‌شود.

در این بررسی ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که استهلاک در سیستم نداریم.

معادله برای این حالت معادله دیفرانسیل عبارت است از:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \omega_n^2 = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \qquad (3)$$

در این صورت پاسخ خاص جواب بالا عبارت است از:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t = \frac{F_0}{m(\omega_n^2 - \omega^2)} \sin \omega t$$

اگر شرایط اولیه بصورت $x(0) = x_0 \,,\, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ باشند، جواب کلی:

$$x(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\omega t \qquad (4)$$

$$x(0) = x_0 = A\cancel{\cos 0}^{\,1} + B\cancel{\sin 0}^{\,0} + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\cancel{\sin 0}^{\,0} \Rightarrow A = x_0$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_n A\sin\omega_n t + \omega_n B\cos\omega_n t + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\omega\cos\omega t$$

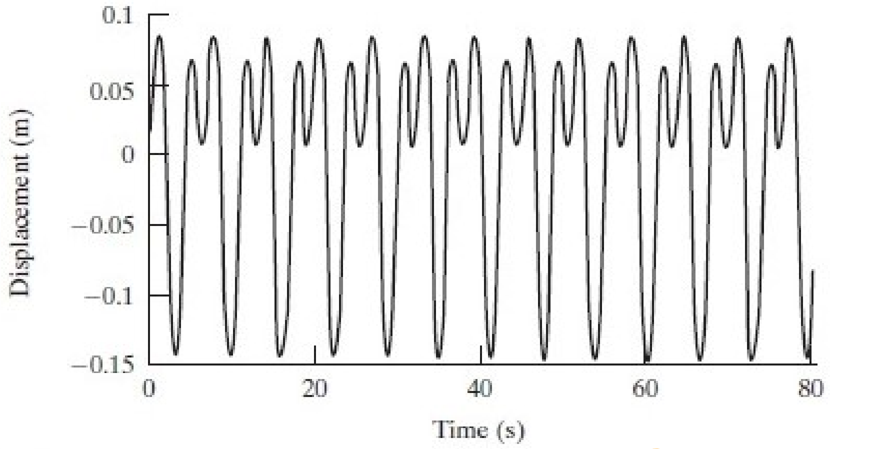
$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = -\omega_n A\cancel{\sin 0}^{\,0} + \omega_n B\cancel{\cos 0}^{\,1} + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\omega\cancel{\cos 0}^{\,1}$$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{\omega_n}\frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\omega + \frac{1}{\omega_n}\dot{x}_0$$

بنابراین پاسخ کل عبارت است از:

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\left(\dot{x}_0 - \frac{F_0\,\omega}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\right)\sin\omega_n t + \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\omega t \qquad (5)$$

همانطور که دیده می‌گردد پاسخ سیستم مجموع دو پاسخ با دو فرکانس ω و ω_n است.



شکل مقابل سیستم را که دارای فرکانس طبیعی $1\,rad/s$ و فرکانس تحریک $2\,rad/s$ و با شرایط اولیه ذکر شده است.

The response of an undamped system with $\omega_n = 1$ rad/s to harmonic excitation at $\omega = 2$ rad/s and nonzero initial conditions of $x_0 = 0.01$ m and $\dot{x}_0 = 0.01$ m/s and magnitude $f_0 = 0.1$ N/kg. The motion is the sum of two sine curves of different frequencies.

این رفتار تا هنگامی که ω نزدیک به ω_n نباشد به همین فرم خواهد بود.

و چنانچه ω به ω_n خیلی نزدیک شود در رابطه (5) را می‌توان ساده‌تر نمود. در این رابطه اگر عبارت با ضریب $\frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}$ را در نظر بگیریم:

$$= \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\left[-\cancel{\frac{\omega}{\omega_n}}^{\,1}\sin\omega_n t + \sin\omega t\right]$$

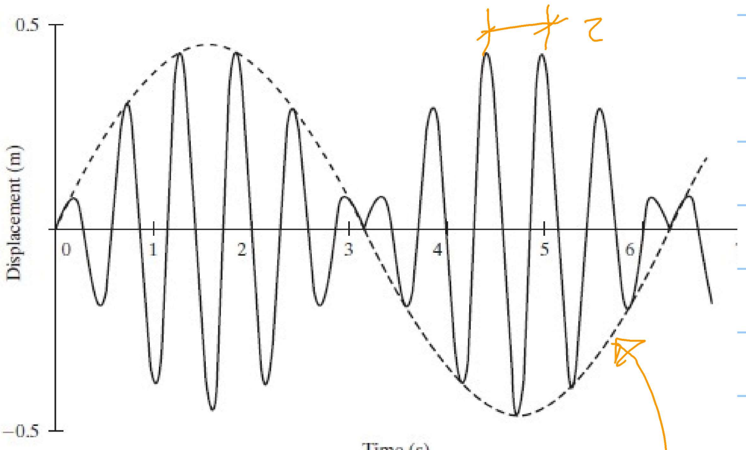
$$= \frac{F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\left[2\sin\left(\frac{\omega-\omega_n}{2}\right)t \cdot \cos\left(\frac{\omega+\omega_n}{2}\right)t\right]$$

$$= \left[\frac{2F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\left(\frac{\omega-\omega_n}{2}\right)t\right]\cos\left(\frac{\omega+\omega_n}{2}\right)t \qquad (6)$$

همانطور که دیده می‌شود پاسخ فوق یک موج کسینوسی است که فرکانس آن

$$\frac{\omega+\omega_n}{2} \simeq \omega_n \qquad (7)$$

و دامنه آن نیز متغیر می‌باشد. این دامنه با فرکانس اندک $\frac{\omega-\omega_n}{2}$ نوسان می‌کند. به این پدیده ضربان (Beating) گویند.



The response of an undamped system of equation (2.13) for small $\omega_n - \omega$ illustrating the phenomenon of beats. Here $f_0 = 10$ N, $\omega_n = 10$ rad/s, and $\omega = 1.1\,\omega_n$ rad/s. The dashed line is a plot of $\frac{2f_0}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\left(\frac{\omega_n-\omega}{2}t\right)$.

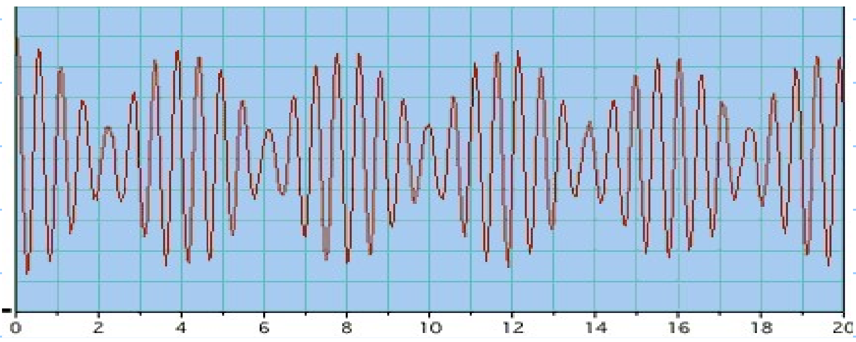
شکل مقابل این پدیده را نشان می‌دهد.

پریود موج عبارت است از:

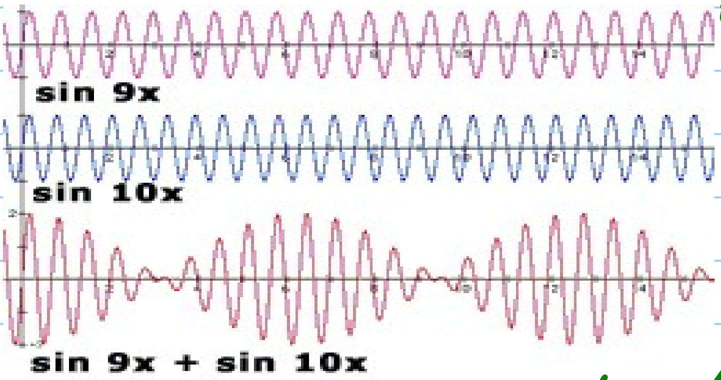
$$\tau = \frac{2\pi}{\frac{\omega+\omega_n}{2}} = \frac{4\pi}{\omega+\omega_n} \qquad (8)$$

پاسخ نهایی از مجموع پاسخ فوق و سایر جملات رابطه (5) بدست می‌آید:

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \dot{x}_0\sin\omega_n t + \left(\frac{2F_0}{m(\omega_n^2-\omega^2)}\sin\frac{\omega-\omega_n}{2}t\right)\cos\frac{\omega+\omega_n}{2}t \qquad (9)$$



شکل روبرو نمایش از رفتار معادله فوق را نشان می‌دهد.



درحقیقت پدیده ضربان تداخل دو موج با فرکانس‌های نزدیک به هم چنانچه در شکل روبرو نشان داده شده است می‌باشد.

اگر در ادامه نزدیک شدن فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی، این دو یکی شوند از رابطه (۴۱) دیده می‌شود که پاسخ عمومی و پاسخ خصوصی هر دو دارای یک فرکانس (جواب) ابرده دارای مانند حالتی است که ریشه مضاعف داشته باشیم و در این حالت از پاسخ خصوصی به دست آمده نمی‌توان استفاده کرد.

در این حالت از معادله دیفرانسیل حرکت $m\ddot{x}+kx=F_0\sin\omega t$ می‌توان دید که اگر پاسخ خصوصی هارمونیک باشد:

$$\ddot{x}=-\omega^2x=-\omega_n^2x$$

و از جایگذاری در این معادله

$$m(-\omega_n^2x)+kx=F_0\sin\omega_n t$$

$$-kx+kx=F_0\sin\omega_n t \Rightarrow 0=F_0\sin\omega_n t$$

که غلط است.

پس در حالتی که $\omega=\omega_n$ باشد، پاسخ خصوصی هارمونیک نبوده و جواب (۴۱) برقرار نمی‌باشد.

از معادله دیفرانسیل می‌دانیم که در هنگام نوشتن رشد فضای پاسخ دوم را به صورت حاصل‌ضرب t در پاسخ قبلی در نظر می‌گیریم:

$$x_p = t(A_1\cos\omega_n t + A_2\sin\omega_n t) = tX$$

از جایگذاری این رابطه در معادله دیفرانسیل (3):

$$\dot{x}_p = X + t\dot{X} \quad , \quad \ddot{x}_p = \dot{X} + \dot{X} + t\ddot{X} = 2\dot{X} + t\ddot{X}$$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0}{m}\sin\omega_n t$$

$$(2\dot{X} + t\ddot{X}) + \omega_n^2 t X = \frac{F_0}{m}\sin\omega_n t$$

$$2\dot{X} + \cancel{t(-\omega_n^2 X)} + \cancel{\omega_n^2 t X} = \frac{F_0}{m}\sin\omega_n t$$

$$2\dot{X} = 2\omega_n(-A_1\sin\omega_n t + A_2\cos\omega_n t) = \frac{F_0}{m}\sin\omega_n t$$

$$\Rightarrow A_2 = 0 \quad , \quad A_1 = -\frac{F_0}{2m\omega_n} \qquad (10)$$

بنابراین پاسخ خصوصی عبارت است از: $x_p(t) = -\frac{F_0}{2m\omega_n} t\cos\omega_n t$

از جایگذاری این رابطه به جای پاسخ خصوصی در (4) و اعمال شرایط اولیه، ثوابت A و B بدست می‌آیند. در نهایت پاسخ عبارت است از:

$$x(t) = x_0\cos\omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} + \frac{F_0}{2m\omega_n^2}\right)\sin\omega_n t - \frac{F_0}{2m\omega_n} t\cos\omega_n t \qquad (11)$$

این شکل پاسخ نمایانگر آن است که به مرور با گذشت زمان دامنه حرکت زیاد می‌شود.

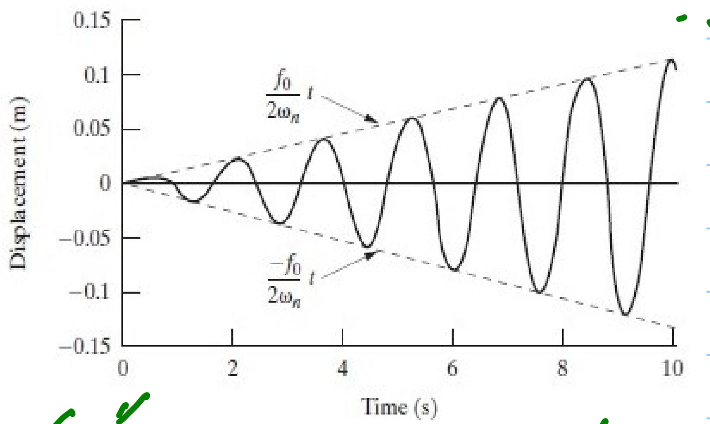
این پدیده بنام تشدید (Resonance) معروف بوده و مشکلات زیادی را در صنعت ایجاد می‌کند.

هنگامی که ارتعاش به سیستم نیرو وارد شروع می‌شود حرکت پایدار سیستم در فرکانس طبیعی رخ می‌دهد و این امر نیازی به انرژی اضافی وارداتی از خارج سیستم ندارد.

بنابراین در صورت وجود نیروی هارمونیک خارجی، این نیرو باعث می‌گردد که سیستم حرکت ترکیبی از دو فرکانس ارتعاش نماید.

اما اگر فرکانس نیروی خارجی برابر با فرکانس طبیعی سیستم باشد، کار انجام شده توسط نیرو صرف نگه داشتن حرکت پایدار نداشته و بنابراین باعث می‌گردد که انرژی کل سیستم زیاد گردد. این امر سبب افزایش دامنه سیستم شده و ممکن است منجر به شکست شود.

این امر در شکل روبرو قابل مشاهده است.



پدیده تشدید، پدیده خطرناکی است که در طراحی با شناسایی می‌توان از وقوع آن جلوگیری کرد.

در ادامه به ترسیم منحنی دامنه ارتعاشات اجباری پایدار بر حسب فرکانس می‌پردازیم.

نقطه پیک تنها به دلیل از بین رفتن ترم نمی‌شود.

در صورتی که تحریک نداشته باشیم ($\omega=0$)، یعنی تحریک با دامنه ثابت F_0 باشد

$\omega=0 \Rightarrow x_0 = F_0/k$ $\qquad$ $\omega \to \infty \Rightarrow x_0 \to 0$

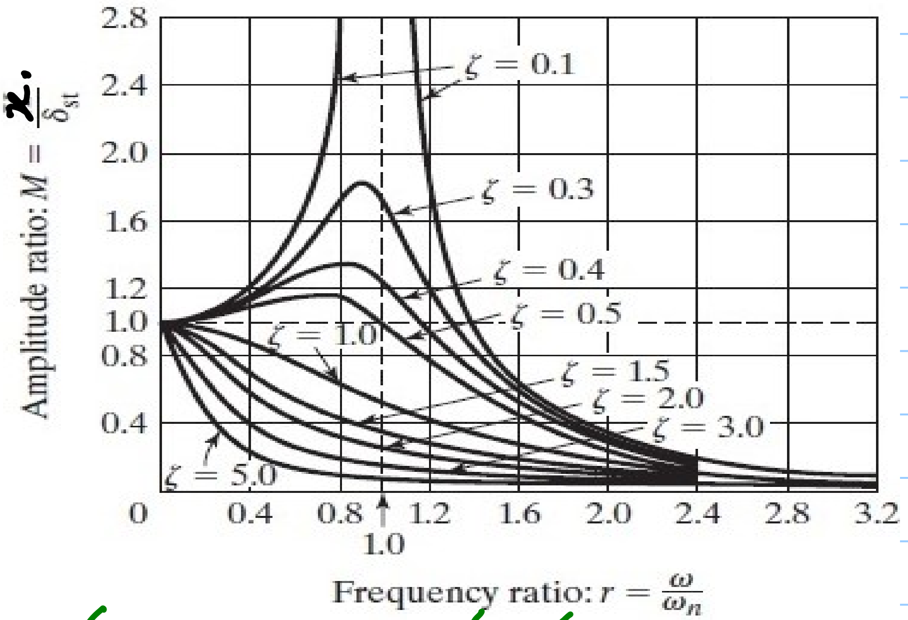
$c=0 \Rightarrow$ $\qquad$ $\omega=\omega_n \Rightarrow x_0 \to \infty$

در صورتی که رسم منحنی خواهیم داشت:

قسمت منفی نمودار را با بلندتر کردن
در بالا نشان داده‌ایم، زیرا در
اینجا به دنبال دامنه هستیم.

ما بقیه این منحنی‌ها را برای حالاتی که c صفر نباشد (c>0):

این منحنی برحسب دامنه می‌باشد



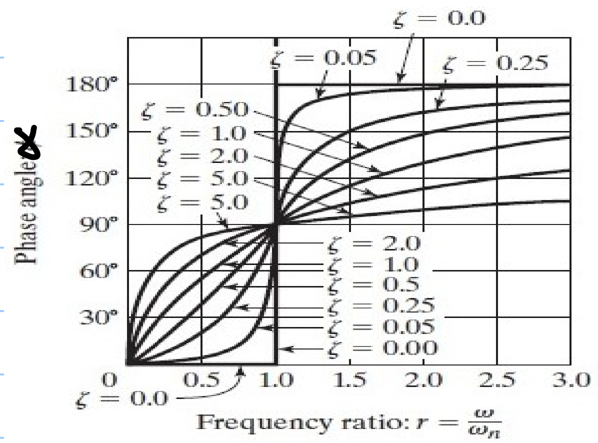
$$\frac{x_0}{\delta_{st}} = \frac{x_0}{F_0/k}$$

و فرکانس می‌باشد $r = \frac{\omega}{\omega_n}$

رسم شده است.

دیده می‌شود که با افزایش اتلاف c قله نمودار دامنه به سمت چپ حرکت می‌کند. همچنین با ازدیاد c ماکزیمم دامنه در $r=0$ رخ می‌دهد.

- شبیه به این منحنی را می‌توان برای زاویه تأخیر فاز نیز رسم نمود.



و دیده می‌شود که همه منحنی‌ها از $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ عبور می‌کنند.

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\omega \to \omega_n \Rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \alpha \to 180^\circ$$

حال به طلب مربوط به دامنه و زاویه تأخیر فاز را کمی ساده می‌کنیم:

$$x_0 = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(c\omega)^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-\frac{m}{k}\omega^2)^2+(\frac{c\omega}{k})^2}} = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2)^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}}$$

با در نظر گرفتن $r=\frac{\omega}{\omega_n}$ در نتیجه

$$x_0 = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} \qquad (12)$$

در صدد تشبیه دامنه را هم بی بعد می‌کنیم:

$$\frac{x_0}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}} = M$$

این رابطه به نام ضریب بزرگنمایی (Magnification Factor) گرفته شد.

برای زاویه تأخیر فاز نیز:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\frac{c\omega}{k}}{1-\frac{m\omega^2}{k}} = \tan^{-1}\frac{2\xi r}{1-r^2} \qquad (13)$$

در صورت تعیین ماکزیمم دامنه نسبت به فرکانس را ماکزیمم از این نسبت نسبت به r یا ω مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{x_0}{F_0/k}\right)=0 \Rightarrow \cdots \quad \frac{\cancel{2}(1-r^2)(-\cancel{2}r)+2(\cancel{4}\xi^2 r)}{2\sqrt{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}}=0$$

$$\Rightarrow -(1-r^2)r+2\xi^2 r=0 \Rightarrow r\left[2\xi^2-(1-r^2)\right]=0$$

$r=0$ نقطه ابتدای نمودار $\qquad (14)$

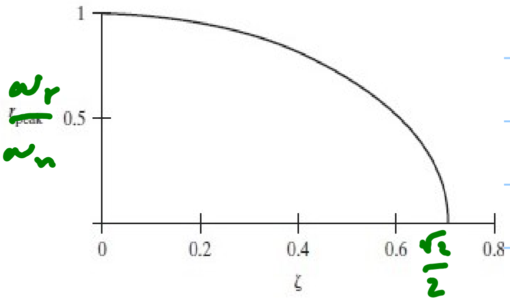
$$2\xi^2-1+r^2=0 \Rightarrow r^2=1-2\xi^2 \Rightarrow r=\frac{\omega}{\omega_n}=\sqrt{1-2\xi^2}$$

این فرکانس که آن را بیشترین فرکانس تشدید ارتعاشات اجباری نامیده را با علامت ω_{p} نشان می‌دهیم و نشان می‌دهد با افزایش ξ ماکزیمم دامنه به سمت چپ تمایل پیدا می‌کند.

رابطه (14) را می‌توان بفرم زیر نوشت :

$$\left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2 = 1-2\zeta^2 \Rightarrow \frac{\zeta^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(\frac{\omega_r}{\omega_n}\right)^2}{1} = 1 \qquad (15)$$

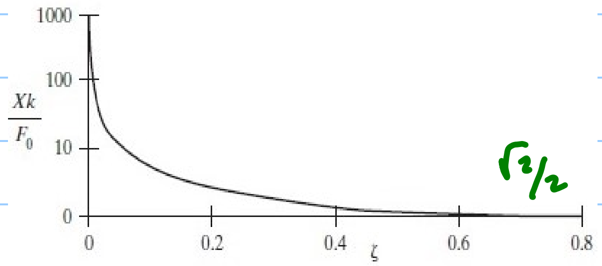
که نشان‌دهنده یک بیضی است.



همچنین اگر رابطه (14) را در رابطه دامنه قرار دهیم، دامنه ماکزیمم بدست می‌آید.

$$\frac{X_{0max}}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-(1-2\zeta^2))^2+(2\zeta\sqrt{1-2\zeta^2})^2}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (16)$$

که نمودار آن بفرم زیر است :



مقدار زاویه تأخیر فاز در ω_r عبارت است از:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta} \qquad (17)$$