



## ارتعاشات غشاءها Vibration of Membranes

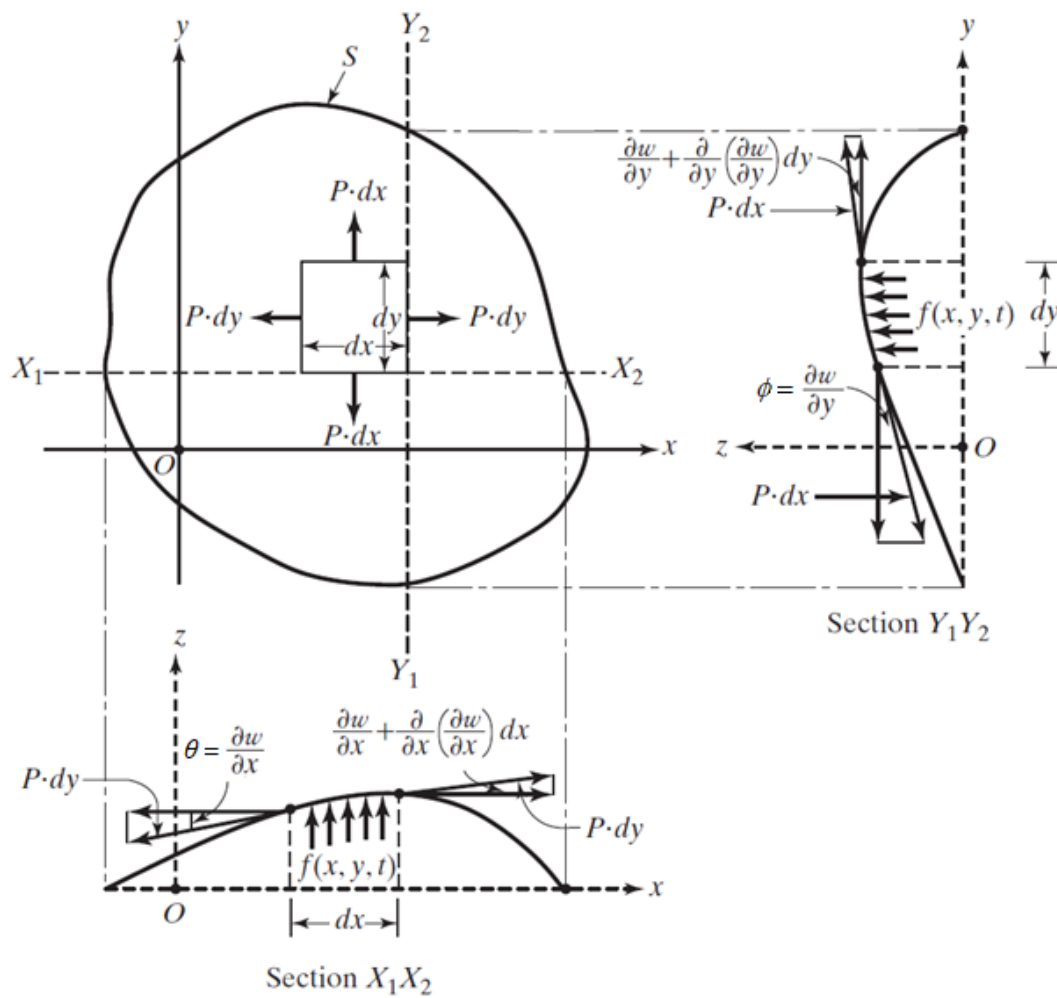
غشاء یک محیط پیوسته دو بعدی است که سختی خمشی نداشته و لذا بار جانبی را تنها توسط کشش در غشاء تحمل می کند. از این سازه ها در سقف ورزشگاهها و دیافراگمها و... که طراحان نمی خواهند سازه سنگین باشد، استفاده می شود. همچنین، این اعضاء بار خمشی کمی را تحمل می کنند مانند بار ناشی از وزن آب، برف و یا پرنده و ...

در حقیقت غشا نوعی کابل دو بعدی است که در دو جهت تحت بار کششی قرار دارد. در شکل (۱) تعدادی از کاربردهای غشاء نشان داده شده است.



شکل (۱): کاربردهای غشاء.

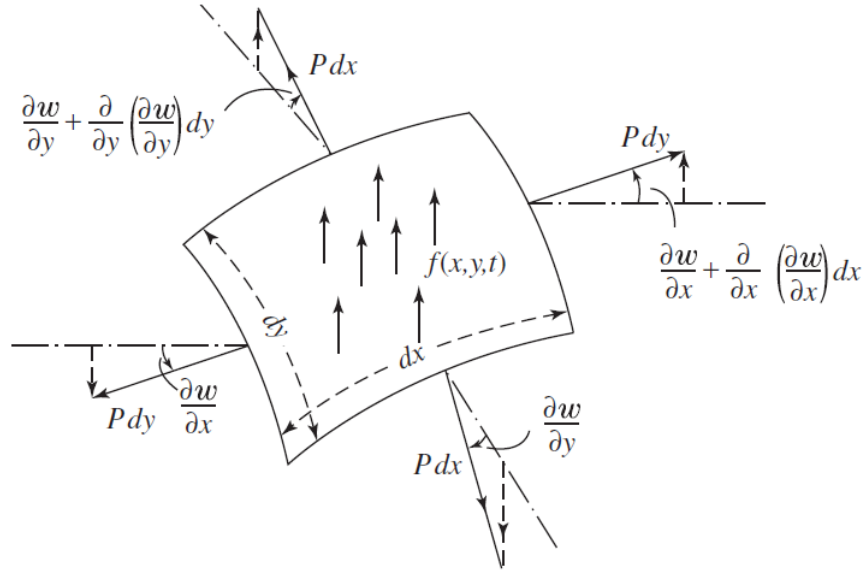
شکل (۲) غشایی را که از اطراف ثابت بوده و تحت کشش  $P$  قرار گرفته است را نشان می دهد. در اینجا افتهای جانبی کوچک فرض شده و در حقیقت غشاء تنها در صفحه  $x-y$  دارای افت جانبی  $w(x,y,t)$  است.



شکل (۲): نمایی از غشاء تحت بار.

در شکل همچنین دو مقطع غشاء نشان داده شده و نیروهای وارد بر المان کوچکی به ابعاد  $dx$  در  $dy$  به تصویر کشیده شده است. فرض بر آن است که غشاء تحت کشش یکنواخت  $P$  بر واحد طول قرار دارد (البته می توان این کشش را متغیر نیز در نظر گرفت). نیروی عرضی  $f(x, y, t)$  نیز بر سطح غشاء وارد می شود.

شکل (۳) وضعیت بهتری از نیروهای وارد بر المان را نشان می دهد.



شکل (۳): المانی از غشاء و نیروهای وارد بر آن.

برآیند نیروها در جهت عمود بر صفحه به دلیل نیروی کشش در لبه  $dy$  برابر است با:

$$Pdy \sin(\theta + d\theta) - Pdy \sin\theta = Pd\theta dy = P \frac{\partial\theta}{\partial x} dx dy$$

که در آن  $\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$  است. به همین ترتیب برآیند نیروها در لبه  $dx$  عبارت است از:

$$Pdx \sin(\phi + d\phi) - Pdx \sin\phi = Pd\phi dx = P \frac{\partial\phi}{\partial y} dy dx$$

که  $\phi = \frac{\partial w}{\partial y}$  است. از به کار بردن قانون دوم نیوتن برای این المان:

$$\sum F_z = dm \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

در نتیجه:

$$P \frac{\partial\theta}{\partial x} dx dy + P \frac{\partial\phi}{\partial y} dx dy + f(x, y, t) dx dy = \rho dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

در این رابطه  $\rho$  جرم واحد سطح غشاء است. از جایگذاری عبارتها بر حسب  $w$ :

$$P \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

و یا:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} f(x, y, t)$$

در صورتیکه  $D = \frac{\partial}{\partial t}$ ،  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  و  $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$  باشد:

$$D^2 w = c^2 \nabla^2 w + \frac{1}{\rho} f(x, y, t)$$

در بررسی ارتعاشات آزاد غشاء نیروی خارجی صفر در نظر گرفته می شود.

### ارتعاشات آزاد غشاء مستطیلی Free Vibration of Rectangular Membrane

برای حل از روش جدا سازی متغیرها استفاده می شود که در آن:

$$w(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$$

از جاگذاری در معادله دیفرانسیل حرکت:

$$c^2(X''YT + XY''T) = XY\ddot{T}$$

از تقسیم بر  $XYT$ :

$$c^2 \left( \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \right) = \frac{\ddot{T}}{T} = -\omega^2$$

سمت چپ تابعی از متغیر های مکانی و سمت راست تابعی از متغیر های زمانی است، بنابراین می بایست برابر مقداری ثابت باشند. این مقدار ثابت منفی است. در نتیجه معادلات زیر بدست می آید:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$c^2 \frac{X''}{X} = -c^2 \frac{Y''}{Y} - \omega^2 = cte = -V_1^2$$

سمت چپ تابعی از متغیر مستقل  $x$  و سمت راست تابعی از متغیر مستقل  $y$  است که تغییرات یکی بر دیگری اثر ندارد، بنابراین حاصل مقداری ثابت است. این مقدار ثابت منفی بوده و به نام ثابت جداسازی اول،  $V_1$ ، خوانده می شود. در نتیجه معادلات زیر بدست می آید:

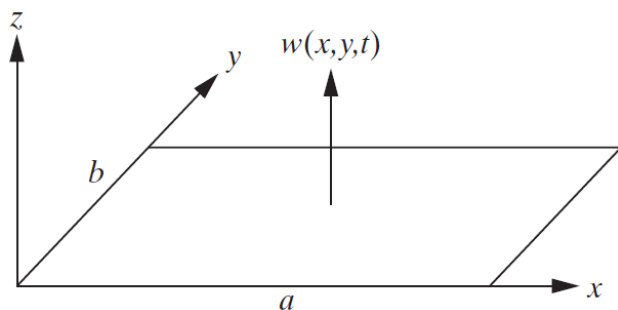
$$X'' + \left(\frac{V_1}{c}\right)^2 X = 0$$

$$-c^2 \frac{Y''}{Y} = \omega^2 - V_1^2 = V_2^2$$

$V_2$  به نام ثابت جداسازی دوم خوانده می شود. از این رابطه:

$$\omega^2 = V_1^2 + V_2^2$$

در صورتیکه غشاء مانند شکل (۴) مستطیل شکل بوده و مرزهای آن ثابت باشد، پاسخ معادلات مکانی عبارت است از:



شکل (۴): غشاء مستطیل شکل.

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{V_1}{c}x\right) + C_2 \sin\frac{V_1}{c}x$$

$$Y(y) = D_1 \cos\left(\frac{V_2}{c}y\right) + D_2 \sin\frac{V_2}{c}y$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$w(0, y, t) = 0 \rightarrow X(0) = 0$$

$$w(a, y, t) = 0 \rightarrow X(a) = 0$$

$$w(x, 0, t) = 0 \rightarrow Y(0) = 0$$

$$w(x, b, t) = 0 \rightarrow Y(b) = 0$$

با جاگذاری شرایط مرزی:

$$X(0) = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$X(a) = 0 \rightarrow C_2 \sin\frac{V_1}{c}a = 0 \rightarrow \sin\frac{V_1}{c}a = 0 = \sin n\pi \Rightarrow V_1 = \frac{n\pi c}{a}, n = 1, \infty$$

$$Y(0) = 0 \rightarrow D_1 = 0$$

$$Y(b) = 0 \rightarrow D_2 \sin\frac{V_2}{c}b = 0 \rightarrow \sin\frac{V_2}{c}b = 0 = \sin m\pi \Rightarrow V_2 = \frac{m\pi c}{b}, m = 1, \infty$$

فرکانس طبیعی سیستم،  $\omega_{mn}$ ، را می توان از جاگذاری  $V_1$  و  $V_2$  در رابطه فرکانسی بدست آورد:

$$\omega_{mn}^2 = V_1^2 + V_2^2 = \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{b}\right)^2$$

و یا:

$$\omega_{mn}^2 = \pi^2 c^2 \left( \left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 \right)$$

شکل مودهای نرمال عبارتند از:

$$\phi(x, y) = X(x)Y(y) = \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}$$

برای حل کامل مسئله ابتدا مسئله زمانی حل می گردد:

$$T(t) = A_1 \cos \omega_{mn} t + A_2 \sin \omega_{mn} t$$

از ضرب این پاسخ در پاسخ مکانی  $XY$ :

$$w_{mn}(x, y, t) = \left( C_2 \sin \frac{n\pi x}{a} D_2 \sin \frac{m\pi y}{b} \right) (A_1 \cos \omega_{mn} t + A_2 \sin \omega_{mn} t)$$

جواب را می توان به صورت ترکیب خطی از  $w_{mn}$  ها در نظر گرفت:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right) (B_{1mn} \cos \omega_{mn} t + B_{2mn} \sin \omega_{mn} t)$$

که  $B_{1mn}$  و  $B_{2mn}$  از روی شرایط اولیه بدست می آیند. مثلاً اگر این شرایط به فرم زیر باشند:

$$w(x, y, 0) = g_1(x, y)$$

$$\dot{w}(x, y, 0) = g_2(x, y)$$

در اینصورت:

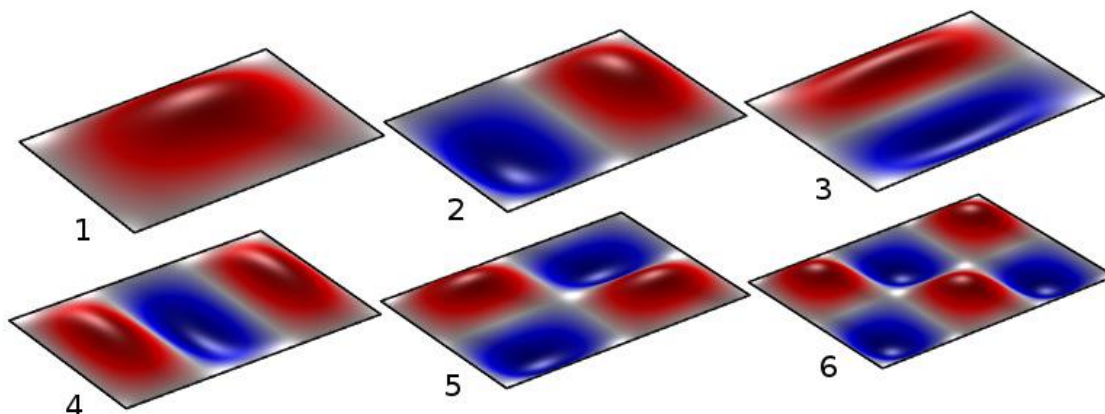
$$B_{1mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g_1(x, y) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right) dy dx$$

$$B_{2mn} = \frac{1}{\omega_{mn}} \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b g_2(x, y) \sin \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{m\pi y}{b} \right) dy dx$$

بنابراین با داشتن شرایط اولیه می توان این ضرایب را بدست آورده و پاسخ ارتعاشات آزاد غشاء را محاسبه نمود.

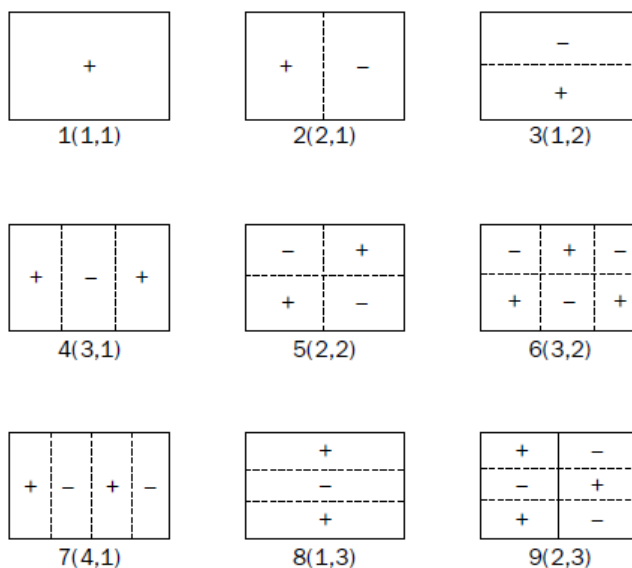
اما شکل مودهایی که بدست آمد را می توان رسم نمود و محل گره را بر روی غشاء مشخص نمود. شکل

(۵) تعدادی از شکل مودهای غشاء مستطیل شکل را نشان می دهد:



شکل (۵): شکل موده‌های غشاء مستطیل شکل.

شکل (۶) نه شکل مود اول غشاء مستطیل شکل با نسبت  $a/b=1.5$  را نشان می‌دهد. خطوط گره به خوبی در هر دو شکل ملاحظه می‌شود که دارای جابجایی صفر هستند.



شکل (۶): شکل موده‌های غشاء مستطیل شکل با نسبت  $a/b=1.5$ .

همچنین جدول ۱ ده فرکانس طبیعی اول این غشاء را نشان می‌دهد.



جدول ۱: فرکانسهای طبیعی غشاء مستطیل شکل با نسبت  $a/b=1.5$ .

Mode number	$m$	$n$	$\lambda = \omega a \sqrt{\rho h / T}$	$\omega / \omega_1$
1	1	1	5.664	1
2	2	1	7.854	1.387
3	1	2	9.935	1.754
4	3	1	10.538	1.861
5	2	2	11.327	1.999
6	3	2	13.329	2.353
7	4	1	13.421	2.370
8	1	3	14.482	2.557
9	2	3	15.471	2.731
10	4	2	15.708	2.773

در ستون سوم مقدار فرکانس بی بعد  $\lambda$  مشاهده می شود که عبارت است از:

$$\lambda = \omega a \sqrt{\frac{\rho h}{T}} = \pi \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 n^2}$$

ستون آخر نسبت فرکانس ها به فرکانس طبیعی اول را نشان می دهد. همانطور که دیده می شود افزایش فرکانس های طبیعی به نسبت ابعادی و شماره مودها بستگی دارد بطوریکه مثلاً  $\omega_{31}$  کمتر از  $\omega_{22}$  است.

### مود های متناسب (Degenerate) Modes

برخی اوقات ممکن است فرکانس طبیعی دو مود از غشاء یکسان گردد ولی دو مود یکسان نباشند. مثلاً در غشاء مربعی واضح است که فرکانس طبیعی  $\omega_{nm}$  و  $\omega_{mn}$  یکی می شوند اما اشکال مودها یکی نمی

شوند. این حالت ممکن است در غشاء های مستطیلی دیگری نیز رخ دهد. مثلاً در حالت  $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{8}{3}}$  فرکانس

های  $\omega_{12}$  و  $\omega_{31}$  برابرند. در این حالت به فرکانس ها "منحط" یا "متناسب" گویند. مثلاً برای غشاء مربعی:

$$a = b \rightarrow \omega_{mn}^2 = \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2 (m^2 + n^2) = \omega_{nm}^2$$

اما شکل موده‌های غشاء با هم متفاوت هستند. به عنوان مثال  $\phi_{12} \neq \phi_{21}$  چون:

$$\phi_{12} = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} \neq \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} = \phi_{21}$$

از آنجا که فرکانس طبیعی هر دو مود یکی است، جواب کلی را می‌توان به صورت ترکیبی از دو مود نوشت:

$$\phi(x, y) = \phi_{12} + \phi_{21} = \left( C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + D \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \right)$$

مقادیر  $C$  و  $D$  به شرایط اولیه بستگی دارند. فرض کنید  $D = 0$  باشد، در این صورت  $\phi = C\phi_{12}$

اگر  $C = 0$  باشد، آنگاه  $\phi = D\phi_{21}$ . بنابراین هر دو مود را می‌توان داشت. اما اگر  $C=D$  باشد

$$\begin{aligned} \phi &= C \left( \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{a} + \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \right) \\ &= C \left( 2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi y}{a} + 2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \cos \frac{\pi x}{a} \right) \\ &= 2C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left( \cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{a} \right) \end{aligned}$$

حال برای پیدا کردن خط گره  $\phi$  باید صفر باشد.

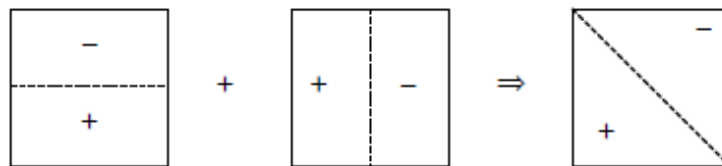
$$2C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \left( \cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{a} \right) = 0$$

توجه کنید که  $\sin \left( \frac{\pi x}{a} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{a} \right) = 0$  همان مرزهای دور تا دور غشا را به ما می‌دهد، اما:

$$\cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{a} = 0 = 2 \cos \frac{\pi}{2a} (x + y) \cos \frac{\pi}{2a} (x - y)$$

$$\cos \frac{\pi}{2a} (x + y) = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2a} (x + y) = \frac{\pi}{2} \rightarrow (x + y) = a$$

پس معادله خط گره،  $y=a-x$  است.



شکل (۷): شکل موده‌های منحنی شونده.

اگر  $C=-D$  باشد، به صورت مشابه با حالت قبل عبارت زیر منتج می شود:

$$\cos \frac{\pi x}{a} - \cos \frac{\pi y}{a} = 0 = -2 \sin \left( \frac{\pi}{2a} (x + y) \right) \left( \sin \frac{\pi}{2a} (x - y) \right) = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{2a} (x - y) = 0 \rightarrow x - y = 0$$

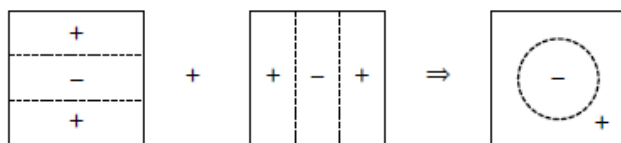
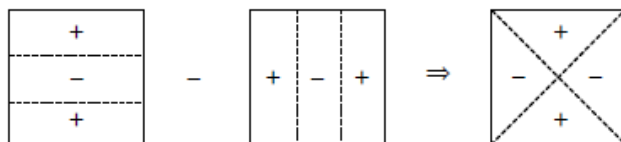
پس معادله خط  $y=x$  خواهد بود.



شکل (۸): شکل موده‌های منحنی شونده.

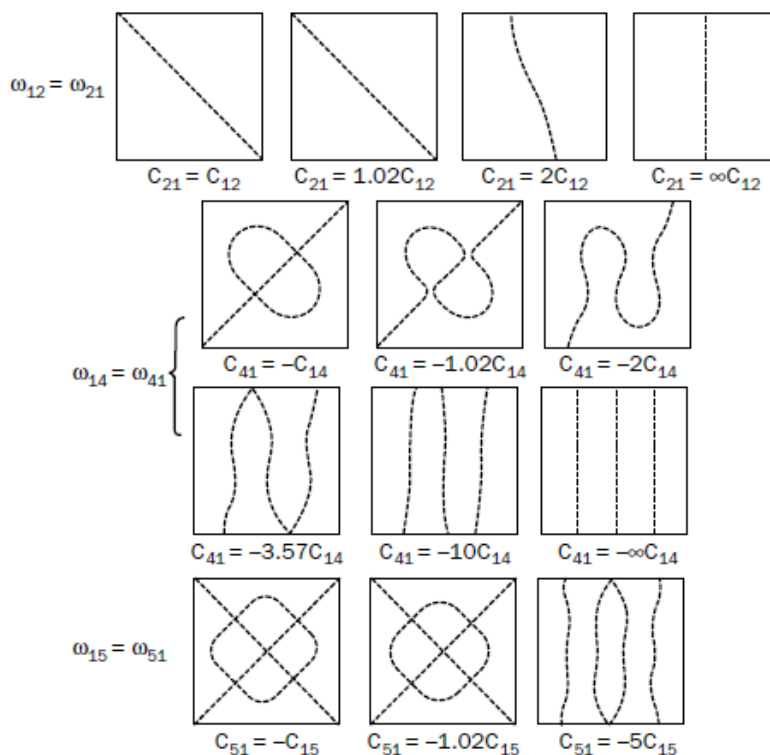
دیده می شود که خطوط قطری هم می توانند به عنوان گره مطرح شوند. در موده‌های منحنی دیگر رفتار

متفاوت خواهد بود، مثلاً شکل (۹) دو حالت از موده‌های  $\phi_{31}$  و  $\phi_{13}$  را نشان می دهد.



شکل (۹): شکل موده‌های منحنی شونده  $\phi_{31}$  و  $\phi_{13}$ .

البته اینها تنها تعدادی از حالت های است که ممکن است پیش بیاید و بسته به شرایط اولیه حالت های دیگری نیز می تواند حادث شود که در شکل (۱۰) نمایش داده شده است.



شکل (۱۰): شکل مدهای منحنی شونده که از ترکیب متفاوت دو مود بدست می آیند.

### ارتعاشات آزاد غشاء دایره ای Free Vibration of Circular Membrane

این غشاء ها کاربرد زیادی در صنعت دارند. برای بررسی آنها بهتر است از سیستم مختصات قطبی  $r$  و  $\theta$  استفاده نمود. غشاء دایروی به شعاع  $a$  را در نظر بگیرید. در این صورت ارتباط این مختصات با مختصات دکارتی عبارت است از:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

با توجه به آنکه عملگر لاپلاسین در مختصات قطبی به صورت زیر بیان می شود:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

از نوشتن معادله دیفرانسیل ارتعاشات آزاد غشاء در مختصات قطبی:

$$c^2 \left[ \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\partial^2 w(r, \theta, t)}{\partial t^2}$$

که در آن  $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$  است. برای حل با استفاده از روش جداسازی متغیرها:

$$w(r, \theta, t) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot T(t)$$

از جاگذاری پاسخ در معادله دیفرانسیل حرکت:

$$R\Theta \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \left( \frac{d^2 R}{dr^2} \Theta T + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Theta T + \frac{1}{r^2} R \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} T \right)$$

که با تقسیم بر  $R\Theta T$  به فرم زیر در می آید:

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c^2 \left( \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \right)$$

سمت راست تابعی از متغیرهای مکانی و سمت چپ تابعی از متغیرهای زمانی است، بنابراین می بایست

برابر مقداری ثابت باشند. این مقدار ثابت منفی است ( $-\omega^2$ ). در نتیجه معادلات زیر بدست می آید:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$\left( \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\omega^2 r^2}{c^2} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

سمت چپ تابعی از متغیر مستقل  $r$  و سمت راست تابعی از متغیر مستقل  $\theta$  است که تغییرات یکی بر دیگری اثر ندارد، بنابراین حاصل مقداری ثابت است. در صورتیکه غشاء دایروی باشد، این مقدار ثابت می بایست مثبت باشد تا بتوان پاسخ پریودیک بدست آورد. با استفاده از  $m^2$  به عنوان این ثابت، معادلات زیر بدست می آید:

$$r^2 R'' + rR' + \left( \frac{\omega^2 r^2}{c^2} - m^2 \right) R = 0$$

$$\Theta'' + m^2 \Theta = 0$$

پاسخ معادله آخر عبارت است از:

$$\Theta(\theta) = C_{1m} \cos m\theta + C_{2m} \sin m\theta$$

برای یک غشاء دایروی این پاسخ می بایست بر حسب  $\theta$  پریودیک و با پریود  $2\pi$  باشد. از پاسخ دیده می شود که این امر در صورتی میسر است که  $m$  عددی صحیح باشد ( $m=0,1,2,\dots$ ).

پاسخ زمانی مسئله هم عبارت است از:

$$T(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

اما معادله دیفرانسیل در جهت  $r$  با استفاده از  $\lambda = \frac{\omega r}{c}$  به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{d^2 R}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{dR}{d\lambda} + \left( 1 - \frac{m^2}{\lambda^2} \right) R = 0$$

که معادله بسل از درجه  $m$  است. پاسخ آن عبارت است از:

$$R_m(\lambda) = B_{1m} J_m(\lambda) + B_{2m} Y_m(\lambda) \quad , m = 0, 1, 2, \dots$$

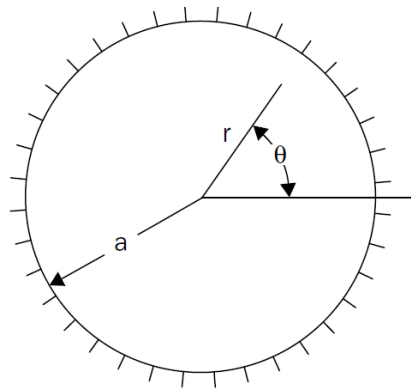
که  $J_m$  و  $Y_m$  توابع بسل درجه  $m$  نوع اول و دوم هستند. بنابراین پاسخ را می توان بفرم زیر بیان کرد:

$$w(r, \theta, t) = W_m(r, \theta).T(t) = W_m(r, \theta). (A_1 \cos \omega t + A_1 \sin \omega t)$$

$$W_m(r, \theta) = \left( B_{1m} J_m \left( \frac{\omega r}{c} \right) + B_{2m} Y_m \left( \frac{\omega r}{c} \right) \right) (C_{1m} \cos m\theta + C_{2m} \sin m\theta)$$

ضرایب  $B_{2m}$  و  $B_{1m}$  از شرایط مرزی مسئله بدست می آیند. در صورتیکه غشاء دایروی مانند شکل (۱۱) در  $r=a$  ثابت باشد، شرایط مرزی آن عبارتند از:

$$w(0, \theta, t) = \text{Finite}, \quad w(a, \theta, t) = 0$$



شکل (۱۱): غشاء دایروی با مرز ثابت.

که در نتیجه:

$$w(0, \theta, t) = \text{Finite} \Rightarrow W_m(0, \theta) = \text{Finite}$$

$$w(a, \theta, t) = 0 \Rightarrow W_m(a, \theta) = 0$$

از شرط اول دیده می شود که مقدار  $W_m$  در  $r=0$  می بایست محدود باشد، اما  $Y_m$  در این نقطه به سمت بی نهایت میل می کند، بنابراین  $B_{2m}$  صفر است. در نتیجه عبارت  $W_m$  عبارت است از:

$$W_m(r, \theta) = J_m \left( \frac{\omega r}{c} \right) (C_{1m} \cos m\theta + C_{2m} \sin m\theta)$$

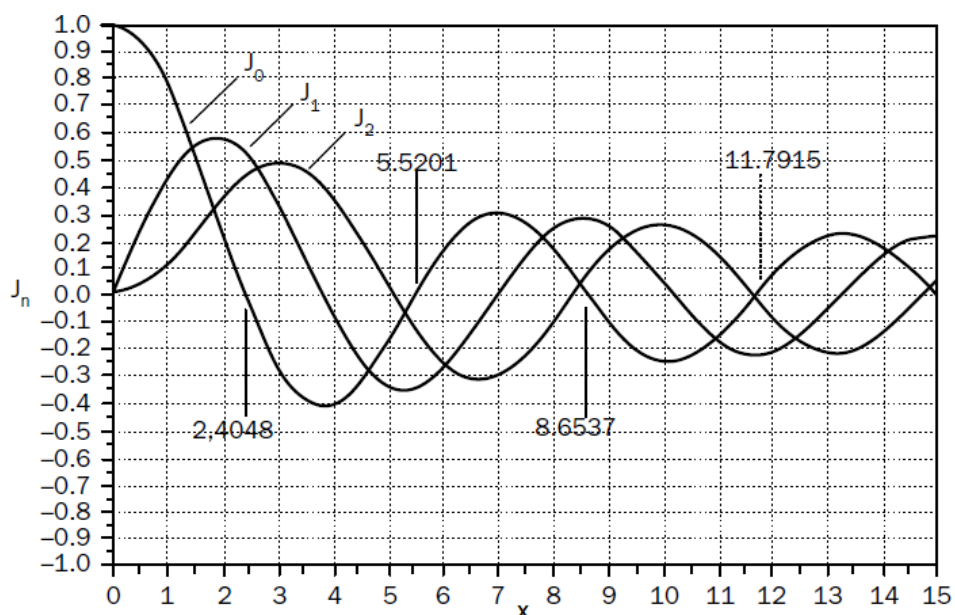
که  $C_{2m}$  و  $C_{1m}$  ضرایب جدیدی هستند. از شرط دیگر مرزی:

$$W_m(a, \theta) = J_m\left(\frac{\omega a}{c}\right) (C_{1m} \cos m\theta + C_{2m} \sin m\theta) = 0$$

معادله فوق می بایست برای تمام مقادیر  $\theta$  برقرار باشد، بنابراین:

$$J_m\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0, m = 0, 1, 2, \dots$$

این معادله مشخصه فرکانسی غشاء دایره ای است. به ازای هر مقدار  $m$  از روی ریشه های  $J_m$  مقادیر فرکانسهای طبیعی بدست می آیند. هر  $J_m$  بینهایت ریشه دارد بنابراین فرکانسهای طبیعی را می توان به صورت  $\omega_{mn}$  بیان نمود. در شکل (۱۲) ریشه های تابع بسل نوع اول نمایش داده شده است.



شکل (۱۲): ریشه های تابع بسل نوع اول.

در زیر تعدادی از این ریشه ها نشان ارائه شده اند.



$$m = 0, J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0:$$

$$\lambda = \frac{\omega a}{c} = 2.405, 5.520, 8.654, 11.792, 14.931, 18.071, 21.212, 24.353, \dots$$

$$m = 1, J_1\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0:$$

$$\lambda = \frac{\omega a}{c} = 3.832, 7.016, 10.173, 13.323, 16.470, 19.616, 22.760, 25.903, \dots$$

$$m = 2, J_2\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0:$$

$$\lambda = \frac{\omega a}{c} = 5.135, 8.417, 11.620, 14.796, 17.960, 21.117, 24.270, 27.421, \dots$$

$$m = 3, J_3\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0:$$

$$\lambda = \frac{\omega a}{c} = 6.379, 9.760, 13.017, 16.224, 19.410, 22.583, 25.749, 28.909, \dots$$

$$m = 4, J_4\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0:$$

$$\lambda = \frac{\omega a}{c} = 7.586, 11.064, 14.373, 17.616, 20.827, 24.018, 27.200, 30.371, \dots$$

$$m = 5, J_5\left(\frac{\omega a}{c}\right) = 0:$$

$$\lambda = \frac{\omega a}{c} = 8.780, 12.339, 15.700, 18.982, 22.220, 25.431, 28.628, 31.813, \dots$$

همچنین تعدادی از ریشه ها (ضرایب فرکانس ها) در جدول ۲ ارائه شده است.

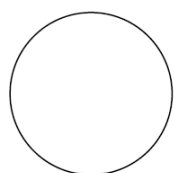
جدول ۲: ضرایب فرکانس های طبیعی غشاء دایروی.

Number of root*	m (nodal diameters)					
	0	1	2	3	4	5
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.373	15.700
4	11.792	13.324	14.796	16.223	17.616	18.980
5	14.931	16.471	17.960	19.409	20.827	22.218

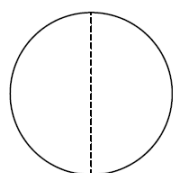
با بدست آوردن  $\lambda_{mn}$  مقادیر فرکانسهای طبیعی بصورت زیر بدست می آیند:

$$\omega_{mn} = \frac{\lambda_{mn}c}{a}$$

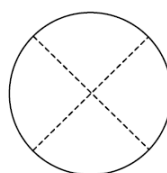
شکل مودهای غشاء از  $J_m\left(\frac{\omega_{mn}a}{c}\right) \cos m\theta$  و یا  $J_m\left(\frac{\omega_{mn}a}{c}\right) \sin m\theta$  که 90 درجه اختلاف فاز دارند بدست می آیند. بنابراین هر کدام را می توان به عنوان شکل مود در نظر گرفت. در این شکل مودها  $m$  تعداد قطره‌های گره ای را بیان می کند. همچنین  $n$  که ریشه های تابع بسل است نشان دهنده تعداد دواير گره ای در شکل مود است. شکل (۱۳) تعدادی از این شکل مودها را نشان می دهد.



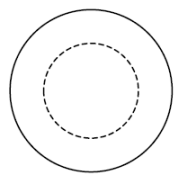
2.405



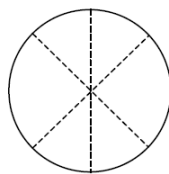
3.832



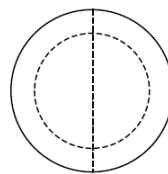
5.136



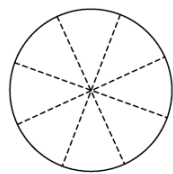
5.520



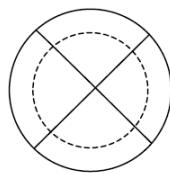
6.380



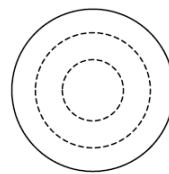
7.016



7.588



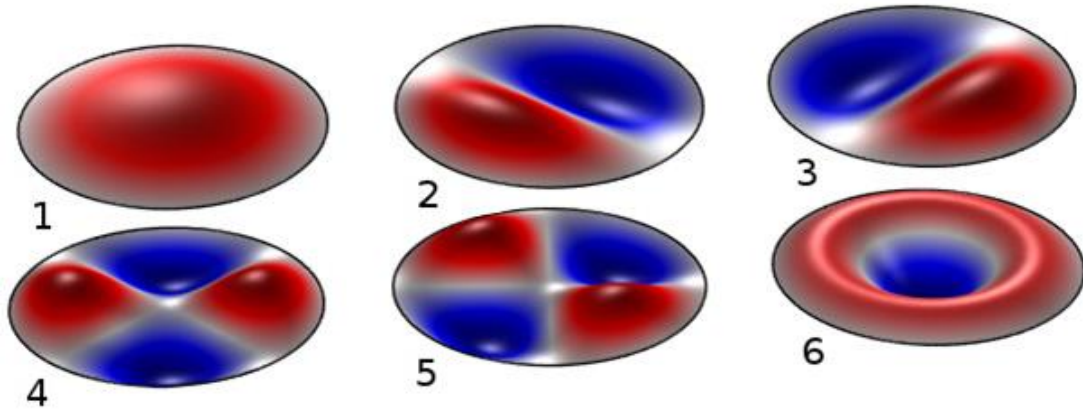
8.417



8.654

شکل (۱۳): شکل مودهای غشاء دایروی با مرز ثابت.

شکل (۱۴) برخی از شکل مودها را به صورت سه بعدی نشان می دهد.



شکل (۱۴): شکل موده‌های سه بعدی غشاء دایروی با مرز ثابت.

به مانند غشاء مستطیلی، در اینجا نیز می توان پاسخ را به صورت حاصل ضرب  $W_m(r, \theta)$  در  $T$  نوشت:

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( \lambda_{mn} \frac{r}{a} \right) (C_{1m} \cos m\theta + C_{2m} \sin m\theta) (A_{1mn} \cos \omega_{mn} t + A_{2mn} \sin \omega_{mn} t)$$

این رابطه را می توان به فرم زیر نیز نوشت:

$$w(r, \theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( \lambda_{mn} \frac{r}{a} \right) \cos m\theta (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} J_m \left( \lambda_{mn} \frac{r}{a} \right) \sin m\theta (C_{mn} \cos \omega_{mn} t + D_{mn} \sin \omega_{mn} t)$$

که  $A_{mn}$  تا  $D_{mn}$  ضرایبی هستند که از شرایط اولیه بدست می آیند. مثلاً اگر این شرایط به فرم زیر باشند:

$$w(r, \theta, 0) = g_1(r, \theta)$$

$$\dot{w}(r, \theta, 0) = g_2(r, \theta)$$

روابط ارتوگونالیته در این حالت عبارت است از:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} J_m \left( \lambda_{mn} \frac{r}{a} \right) J_i \left( \lambda_{ij} \frac{r}{a} \right) \cos m\theta \cos i\theta r dr d\theta = 0 \quad \text{if } i \neq m, j \neq n$$

مشابه همین عبارت را می توان برای تابع سینوس نیز به کار برد.

از جاگذاری شرایط اولیه در پاسخ، ضرب دو طرف رابطه بدست آمده در  $J_i\left(\lambda_{ij}\frac{r}{a}\right)\cos i\theta$  و انتگرال گیری روی سطح و استفاده از رابطه:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 m\theta d\theta = \pi, m = 1, 2, \dots$$

می توان ضرایب  $A_{mn}$  و  $B_{mn}$  را بدست آورد:

$$A_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} g_1(r, \theta) J_m\left(\lambda_{mn}\frac{r}{a}\right) \cos m\theta r dr d\theta}{\pi \int_0^a \left[J_m\left(\lambda_{mn}\frac{r}{a}\right)\right]^2 r dr}$$

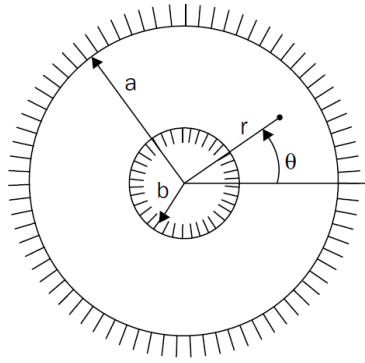
$$B_{mn} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} g_2(r, \theta) J_m\left(\lambda_{mn}\frac{r}{a}\right) \cos m\theta r dr d\theta}{\pi \omega_{mn} \int_0^a \left[J_m\left(\lambda_{mn}\frac{r}{a}\right)\right]^2 r dr}$$

در روابط بالا برای حالت  $m=0$  در مخرج کسر با  $2\pi$  تعویض می شود. مشابه همین روابط را می توان با تعویض  $\cos m\theta$  با  $\sin m\theta$  برای بدست آوردن ضرایب  $C_{mn}$  و  $D_{mn}$  به کار بست. بنابراین با داشتن شرایط اولیه می توان این ضرایب را بدست آورده و پاسخ ارتعاشات آزاد غشاء را محاسبه نمود.

### غشاء حلقوی و قطاعی Annular and Sectorial Membrane

برخی اوقات غشاء به فرم حلقوی و یا قطاعی از یک دایره است. در حالت حلقوی، غشاء توسط دو دایره هم مرکز محدود شده است.

در شکل (۱۵) غشاء حلقوی که مرزهای آن در  $r=a$  و  $r=b$  ثابت هستند نشان داده شده است.



شکل (۱۵): غشاء حلقوی با مرز ثابت.

برای بدست آوردن فرکانسهای طبیعی و شکل مودها می توان از پاسخ شعاعی که قبلاً بدست آمد، استفاده نمود:

$$R_m(\lambda) = B_{1m}J_m(\lambda) + B_{2m}Y_m(\lambda) \quad , m = 0,1,2, \dots$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$w(a, \theta, t) = 0 \Rightarrow R_m(a) = 0$$

$$w(b, \theta, t) = 0 \Rightarrow R_m(b) = 0$$

از جاگذاری شرایط مرزی:

$$\begin{bmatrix} J_m\left(\frac{\omega a}{c}\right) & Y_m\left(\frac{\omega a}{c}\right) \\ J_m\left(\frac{\omega b}{c}\right) & Y_m\left(\frac{\omega b}{c}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1m} \\ B_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای داشتن جواب غیر بدیهی، دترمینان ضرایب می بایست صفر گردد، که منجر به رابطه زیر می شود:

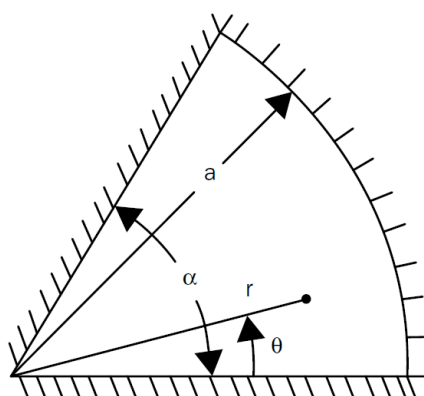
$$J_m(k)Y_m\left(\frac{b}{a}k\right) - J_m\left(\frac{b}{a}k\right)Y_m(k) = 0$$

که در آن  $k = \frac{\omega a}{c}$  می باشد. از این رابطه می توان فرکانس طبیعی غشاء را برای هر مقدار  $\frac{b}{a}$  بدست آورد. سه فرکانس طبیعی (بی بعد) اول غشاء حلقوی مربوط به دواير گره ای 0، 1 و 2 برای  $m=0$  (متقارن) و  $m=1$  برای نسبت های مختلف  $\frac{b}{a}$  در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۳: ضرایب فرکانس های طبیعی غشاء حلقوی.

m	b/a	Number of root		
		1	2	3
0	0.80	15.698	31.411	47.121
	0.60	7.828	15.695	23.553
	0.40	5.183	10.443	15.688
	0.20	3.816	7.786	11.732
	0.10	3.314	6.858	10.377
	0.02	2.884	6.136	9.376
	0.00	2.405	5.520	8.654
1	0.80	15.738	31.431	47.134
	0.60	7.930	15.747	23.588
	0.40	5.391	10.558	15.766
	0.20	4.236	8.055	11.927
	0.10	3.941	7.331	10.748
	0.02	3.836	7.031	10.205
	0.00	3.832	7.016	10.173

یک غشاء قطاعی، قسمتی از یک دایره با زاویه قطاع  $\alpha$  است که در شکل (۱۶) نمایش داده شده است.



شکل (۱۵): غشاء قطاعی با مرز ثابت.

برای حل می توان از معادلات مکانی که قبلاً بدست آمد استفاده نمود و نوشت:

$$W(r, \theta) = R_\nu \sin \nu \theta$$

در اینجا بر خلاف غشاء دایروی، به علت آنکه تقارن در  $\theta$  وجود ندارد،  $\nu$  عدد صحیح نیست. از جاگذاری این رابطه در معادله دیفرانسیل مکانی، معادله دیفرانسیل برای  $R$  بدست می آید که در آن به جای  $m$  مقدار  $\nu$  وجود دارد و حل آن عبارت است از:

$$R_\nu(r) = A_\nu J_\nu \left( \frac{\omega r}{c} \right) + B_\nu Y_\nu \left( \frac{\omega r}{c} \right)$$

در اینصورت توابع بسل از درجه غیر صحیح هستند.

شرایط مرزی عبارتند از:

$$\begin{aligned} W(r, 0) &= 0 \\ W(r, \alpha) &= 0 \\ W(0, \theta) &= \text{Finite} \\ W(a, \theta) &= 0 \end{aligned}$$

شرط اول که در معادله  $W$  ارضاء می شود. اعمال شرط مرزی دوم در  $\theta = \alpha$  منجر به:

$$\sin \nu \alpha = 0 \Rightarrow \nu = \frac{n\pi}{\alpha}, n = 1, 2, \dots$$

می شود. اعمال شرط سوم مانند غشاء دایروی سبب صفر شدن  $B_\nu$  می گردد. نهایتاً، شرط مرزی آخر

معادله فرکانسی را بفرم زیر نتیجه می دهد:

$$J_\nu \left( \frac{\omega a}{c} \right) = 0$$

این معادله شبیه رابطه ای است که برای غشاء دایروی بدست آمد، با این تفاوت که اینجا  $v$  می تواند عدد حقیقی باشد. همانطور که دیده می شود برای هر زاویه قطاع  $\alpha$  تعداد بینهایت جواب  $v$  است.  $n$  های فرد موده های متقارن را نتیجه داده، و  $n$  های زوج موده های غیرمتقارن را سبب می شوند.

جدول ۴ فرکانسهای بی بعد را برای  $v = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}$  ارائه می کند.

$$v = \frac{n\pi}{\alpha}, n = 1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\pi = 360^\circ \rightarrow v = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ \rightarrow v = \frac{3}{2} \\ \alpha = \frac{2\pi}{5} = 72^\circ \rightarrow v = \frac{5}{2} \end{cases}$$

جدول ۳: ضرایب فرکانس های طبیعی غشاء قطاعی.

Number of root*	Sector angle, $\alpha$ (value of $v$ )					
	360° (1/2)	120° (3/2)	72° (5/2)	51.43° (7/2)	40° (9/2)	32.73° (11/2)
1	3.142	4.493	5.763	6.988	8.183	9.356
2	6.283	7.725	9.095	10.418	11.705	12.967
3	9.425	10.904	12.323	13.698	15.040	16.355