در صورتیکه یک سیستم n درجه آزادی را در نظر بگیریم از نوشتن اصل کار مجازی برای اصل دالامبر خواهیم داشت:

$$\sum_i \left(F_i - m_i\frac{d^2}{dt^2}r_i\right)\delta r_i = 0 \qquad (1)$$

بردار موقعیت r_i تابعی از مختصات عمومی و زمان است:

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \qquad (2)$$

بنابراین تغییر مکان مجازی δr_i عبارت است از:

$$\delta r_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (3)$$

این در مقابل تغییر مکان واقعی زیر است:

$$dr_i = \sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\cdot\delta q_j + \frac{\partial r_i}{\partial t} \qquad (4)$$

جمله اول معادله (1) عبارت است از:

$$\sum_i F_i\cdot\delta r_i = \sum_i F_i\cdot\sum_j \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j$$

$$= \sum_j\left(\sum_i F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = \sum_j Q_j\,\delta q_j \qquad (5)$$

در این رابطه نیروی عمومی برابر است با:

$$Q_j = \sum_i F_i\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j} \qquad (6)$$

و ابعاد آن نیرو یا گشتاور است.

جمله دوم رابطه (1) مربوط به کار انجام شده توسط نیروی اینرسی است:

$$\sum_i m_i\frac{d^2 r_i}{dt^2}\,\delta r_i = \sum_i m_i\frac{d^2 r_i}{dt^2}\sum_j\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\delta q_j \qquad (7)$$

$$= \sum_j\left(\sum_i m_i\frac{d^2 r_i}{dt^2}\cdot\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

با در نظر گرفتن قسمتی از این رابطه :

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\overbrace{m_i \frac{d r_i}{dt}}^{m v_i} \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \sum_i \left(m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) + \sum_i \left(m_i \frac{d r_i}{dt} \overbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)}^{\frac{\partial v_i}{\partial q_j}}\right)$$

جمله آخر سمت راست :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial^2 r_i}{\partial q_j \partial t} = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)\overbrace{\frac{\partial q_k}{\partial t}}^{\dot q_k} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_j}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{\left\{\sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}\right\}}_{\dot r_i} = \frac{\partial \dot r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial v_i}{\partial q_j}$$

در حقیقت سرعت برابر است با :

$$v_i = \frac{d}{dt} r_i = \sum_k \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot q_k + \frac{\partial r_i}{\partial t}$$

از این رابطه دیده می شود :

$$\frac{\partial v_i}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial r_i}{\partial q_j}$$

با جایگذاری این جملات در رابطه (۷)

$$\sum_i m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2}\cdot\delta r_i = \sum_i\left\{\frac{d}{dt}\left(m_i v_i \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \dot q_j}\right) - m_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial q_j}\right\} \qquad (8)$$

با در نظر گرفتن انرژی جنبشی :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i \cdot v_i$$

جمله اول و دوم سمت راست (۸) عبارت است از $\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}$ و $\frac{\partial T}{\partial q_j}$ ، بنابراین رابطه (۸) بصورت زیر ساده می شود :

$$\sum_j\left[Q_j - \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right\}\right]\delta q_j = 0 \qquad (9)$$

با توجه به آنکه میخواهیم تغییرات n مستقل باشند داریم :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \qquad j = 1, n$$

حال نیروهای عمومی را در نظر گرفته و آنها را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم:

- نیروهای مستقل از نقش پتانسیل   Potential Free Forces
- نیروی مربوط به پتانسیل

نیروهایی که نقش پتانسیل دارند از آنها که تابع پتانسیل انرژی پتانسیل است و در رابطه با موقعیت و وضعیت جسم هستند را می‌توان با استفاده از انرژی پتانسیل تعریف نمود:

انرژی پتانسیل: کار انجام شده بر علیه نیرو برای تغییر مکان δq_i

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad \text{Potential Energy}$$

$$\delta V = -Q_i \delta q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}\delta q_i \Rightarrow Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

همانطور که دیده می‌شود نیروی Q_i را می‌توان با مشتق گیری از تابع انرژی پتانسیل به دست آورد.

حال اگر رابطه لاگرانژ را مجدد بنویسیم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \left(-\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)$$

که Q_i تمام نیروهای عمومی به جز نقش پتانسیل است:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, n$$

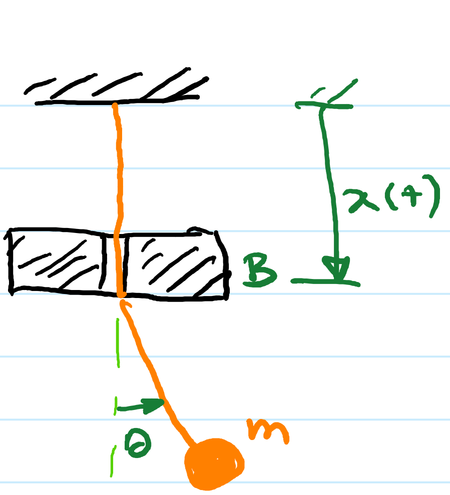
معادله فوق معادله لاگرانژ است که رابطه بین انرژی جنبشی سیستم و نیروهای عمومی را برقرار می‌کند.

اگر کمیتی به نام لاگرانژین که مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل است را تعریف کنیم (Lagrangian)

$$L = T - V$$

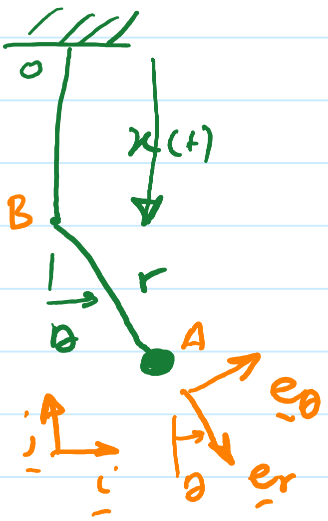
معادله لاگرانژ به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, n$$



ل: نخ پاندول نشان داده شده در شکل به طول l از درون قرقره B عبور کرده است. حرکت قرقره در جهت قائم حرکت از پیش تعیین شده x(t) است.

معلوم است: تعیین معادله دیفرانسیل حرکت.



همانطور که دیده می‌شود نیروی خارجی غیر از وزن وجود ندارد. سیستم دارای یک درجه آزادی θ می‌باشد. x درجه آزادی نیست زیرا حرکتش معلوم است.

برای حل می‌بایست انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را بدست آورد.

برای انرژی جنبشی به سرعت A نیاز است. از حرکت نسبی استفاده می‌کنیم:

$$\underline{V}_A = \underline{V}_{A/B} + \underline{V}_B = \dot r\, \underline{e}_r + r\dot\theta\, \underline{e}_\theta - \dot x\, \underline{j}$$

اما:

$$r = AB = l - x \Rightarrow V_r = \dot r = -\dot x\,,\quad V_\theta = r\dot\theta = (l-x)\dot\theta$$

بنابراین:

$$\underline{V}_A = -\dot x\, \underline{e}_r + (l-x)\dot\theta\, \underline{e}_\theta + \dot x(\cos\theta\, \underline{e}_r - \sin\theta\, \underline{e}_\theta)$$

$$= -\dot x(1-\cos\theta)\underline{e}_r + \left[(l-x)\dot\theta - \dot x\sin\theta\right]\underline{e}_\theta$$

انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} m\, \underline{V}_A \cdot \underline{V}_A$$

$$= \frac{1}{2} m\left[\dot x^2(1-\cos\theta)^2 + (l-x)^2\dot\theta^2 - 2(l-x)\dot\theta\dot x\sin\theta + \dot x^2\sin^2\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2} m\left[2\dot x^2(1-\cos\theta) + (l-x)^2\dot\theta^2 - 2(l-x)\dot x\dot\theta\sin\theta\right]$$

برای انرژی پتانسیل آن نسبت به o میگیریم:

$$V = -mg\left[x + (l-x)\cos\theta\right]$$

رابطه لاگرانژ برای سیستم فوق عبارت است از :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

در این رابطه :

$$\frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = m\left[(l-x)^2\dot\theta - (l-x)\dot x \sin\theta\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) = m\left[2(l-x)(-\dot x)\dot\theta + (l-x)^2\ddot\theta + \dot x^2 \sin\theta - (l-x)\ddot x \sin\theta - (l-x)\dot x\dot\theta\cos\theta\right]$$

و :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = m\left[\dot x^2 \sin\theta - (l-x)\dot x\dot\theta\cos\theta\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg(l-x)\sin\theta$$

با قرار دادن در معادله لاگرانژ :

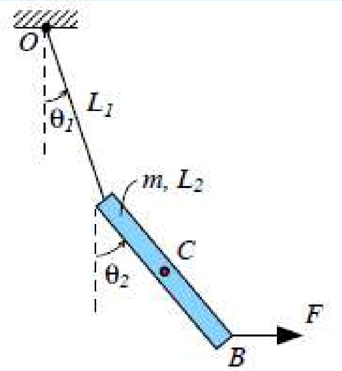
$$(l-x)\left[(l-x)\ddot\theta - 2\dot x\dot\theta + (g-\ddot x)\sin\theta\right] = 0$$

با $l-x\neq 0$ خواهیم داشت :

$$(l-x)\ddot\theta - 2\dot x\dot\theta + (g-\ddot x)\sin\theta = 0$$

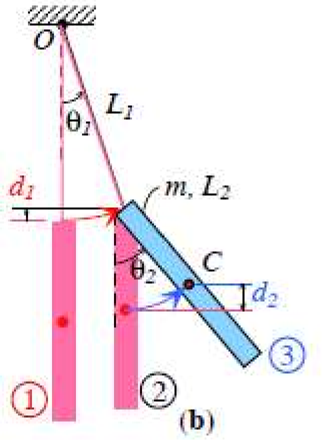
Problem Statement: A uniform rigid bar of total mass m and length L_2, suspended at point O by a string of length L_1, is acted upon by a horizontal force F, as shown in Figure 1.

Use the Lagrange equation to derive the equations of motion for the system.



سیستم دارای ۲ درجه آزادی است که با θ_1 و θ_2 نشان داده شده‌اند.

برای تعیین معادلات دیفرانسیل حرکت می‌بایست انرژی پتانسیل و جنبشی سیستم محاسبه شوند.



انرژی پتانسیل فقط مربوط به جاذبه است.

برای محاسبه آن، جنبش نسبی را از زیر در دو وضعیت می‌سازیم.

ابتدا کل سیستم به اندازه θ_1 حول O می‌چرخد و سپس به اندازه θ_2 حول انتهای میله می‌چرخد تا به وضعیت 3 برسد.

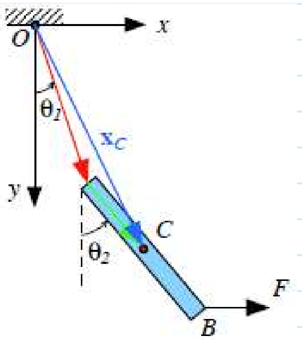
بنابراین میزان تغییر ارتفاع مرکز ثقل میله عبارت است از:

$$d_1+d_2 = L_1(1-\cos\theta_1)+\frac{L_2}{2}(1-\cos\theta_2)$$

و انرژی پتانسیل برابر است با:

$$V = mg(d_1+d_2) = mg\left[L_1(1-\cos\theta_1)+\frac{L_2}{2}(1-\cos\theta_2)\right]$$

اما انرژی جنبشی سیستم شامل انرژی جنبشی خطی مربوط به حرکت خطی مرکز ثقل و انرژی جنبشی دورانی حول مرکز ثقل است. برای تعیین سرعت مرکز ثقل، موقعیت آن یعنی x_c را مشخص کرده و سپس از آن مشتق گرفته تا سرعت به دست آید.



$$\mathbf{x}_C = (L_1\sin\theta_1+\frac{L_2}{2}\sin\theta_2)\hat{\mathbf{i}}+(L_1\cos\theta_1+\frac{L_2}{2}\cos\theta_2)\hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{x}}_C = \left(L_1\cos\theta_1\dot{\theta}_1+\frac{L_2}{2}\cos\theta_2\dot{\theta}_2\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(L_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1+\frac{L_2}{2}\sin\theta_2\dot{\theta}_2\right)\hat{\mathbf{j}}$$

بنابراین :

$$v_c^2 = \underline{v}_c \cdot \underline{v}_c = L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{L_2^2}{4} \dot{\theta}_2^2 + L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

در نتیجه انرژی جنبشی برابر است با :

انرژی جنبشی خطی ←   → انرژی جنبشی دورانی

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2} m L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{6} m L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} m L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

دقت داریم که حرکت دورانی فقط حول θ_2 است و $I = \frac{1}{12} m L_2^2$

در مرحله بعد نیروی تعمیم یافته محاسبه می‌گردد. برای این کار کار مجازی نیروی F محاسبه می‌گردد.

ابتدا تغییر مکان نقطه اعمال نیرو را حساب کرده و سپس تغییرات مجازی آن را محاسبه می‌کنیم.

$$\underline{x}_B = (L_1 \sin\theta_1 + L_2 \sin\theta_2)\,\underline{i} + (L_1 \cos\theta_1 + L_2 \cos\theta_2)\,\underline{j}$$

$$\delta \underline{x}_B = \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial q_i} \delta q_i = \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial \theta_1} \delta\theta_1 + \frac{\partial \underline{x}_B}{\partial \theta_2} \delta\theta_2$$

$$= (L_1 \cos\theta_1 \delta\theta_1 + L_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2)\,\underline{i} + (-L_1 \sin\theta_1 \delta\theta_1 - L_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2)\,\underline{j}$$

$$\delta W = \underline{F} \cdot \delta \underline{x}_B = (F\underline{i}) \cdot \left[(L_1 \cos\theta_1 \delta\theta_1 + L_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2)\,\underline{i} - (L_1 \sin\theta_1 \delta\theta_1 + L_2 \sin\theta_2 \delta\theta_2)\,\underline{j}\right]$$

$$= F L_1 \cos\theta_1 \delta\theta_1 + F L_2 \cos\theta_2 \delta\theta_2 = Q_1 \delta\theta_1 + Q_2 \delta\theta_2$$

$$Q_1 = F L_1 \cos\theta_1 \qquad , \quad Q_2 = F L_2 \cos\theta_2$$

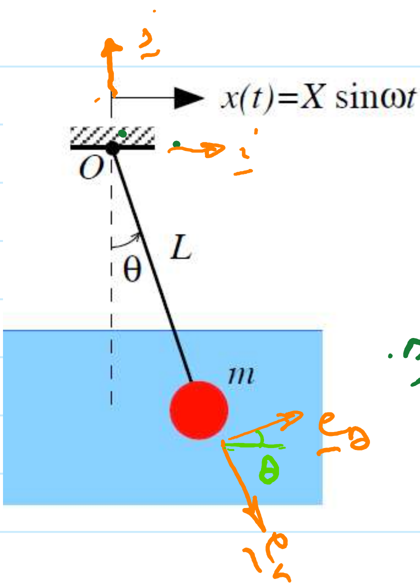
با قرار دادن در معادله لاگرانژ

$q_1 = \theta_1$

$$\Rightarrow m L_1^2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2} m L_1 L_2 \left[\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\right] + m g L_1 \sin\theta_1 = F L_1 \cos\theta_1$$

$q = \theta_2$

$$\frac{1}{2} m L_1 L_2 \left[\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\right] + \frac{1}{3} m L_2^2 \ddot{\theta}_2 + m g L_2 \sin\theta_2 = F L_2 \cos\theta_2$$



مثال: در سیستم شکل مقابل یک پاندول ساده به طول l و جرم m درون سیالی با ضریب ویسکوزیته c غوطه‌ور است. پایه O تحت جابجایی هارمونیکی به فرم $x(t)=X\sin\omega t$ قرار دارد. معادله دیفرانسیل حرکت را بدست آورید.

از روش نسبی سرعت m را بدست می‌آوریم. V_m را می‌توان برحسب سیستم دکارتی یا قطبی به دست آورد:

$$\underline{V}_m=\underline{V}_o+\underline{V}_{m/o}=\dot{x}\underline{i}'+l\dot{\theta}(\cos\theta\,\underline{i}+\sin\theta\,\underline{j})$$

$$=(\dot{x}+l\dot{\theta}\cos\theta)\underline{i}+l\dot{\theta}\sin\theta\,\underline{j}$$

$$\underline{V}_m=\dot{x}\underline{i}'+l\dot{\theta}\underline{e}_\theta=(\dot{x}\cos\theta\,\underline{e}_\theta+\dot{x}\sin\theta\,\underline{e}_r)+l\dot{\theta}\underline{e}_\theta$$

$$=\dot{x}\sin\theta\,\underline{e}_r+(l\dot{\theta}+\dot{x}\cos\theta)\underline{e}_\theta$$

بنابراین

$$V_m^2=\underline{V}_m\cdot\underline{V}_m=\dot{x}+l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

انرژی جنبشی برابر است با:

$$T=\frac{1}{2}mV_m^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+l^2\dot{\theta}^2+2l\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta)$$

انرژی پتانسیل:

$$V=mgl(1-\cos\theta)$$

برای تعیین نیروی عمومی تغییر مکان مجازی را حساب کرده و در نیروی اصطکاک ضرب کرده تا کار آن بدست آید.

$$\underline{r}_m=\underline{r}_o+\underline{r}_{m/o}=x\underline{i}'+l\underline{e}_r$$

دقت کنید که x درجه آزادی نیست.

$$\delta\underline{r}_m=\frac{\partial\underline{r}_m}{\partial\theta}\delta\theta=0+l\frac{\partial\underline{e}_r}{\partial\theta}\delta\theta$$

$$=l\underline{e}_\theta\delta\theta$$

همچنین نیروی استهلاک:

$$\underline{F}_c = -c\underline{V}_m = -c[\dot{x}\sin\theta\,\underline{e}_r + (l\dot{\theta} + \dot{x}\cos\theta)\underline{e}_\theta]$$

بنابراین:

$$\delta W = \underline{F}_c \cdot \delta\underline{r}_m = -c[\dot{x}\sin\theta\,\underline{e}_r + (l\dot{\theta} + \dot{x}\cos\theta)\underline{e}_\theta]\cdot l\,\delta\theta\,\underline{e}_\theta$$

$$= -c(l\dot{\theta} + \dot{x}\cos\theta)\,l\,\delta\theta = Q\,\delta\theta$$

$$Q = -c(l^2\dot{\theta} + l\dot{x}\cos\theta)$$

از جایگذاری در معادله لاگرانژ داریم:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}m(2\dot{x}l\cos\theta + 2l^2\dot{\theta}) = m\dot{x}l\cos\theta + ml^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m\ddot{x}l\cos\theta - m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta + ml^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{1}{2}m(-2\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta) = -m\dot{x}l\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl\sin\theta$$

بنابراین:

$$m\ddot{x}l\cos\theta - \cancel{ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta} + ml^2\ddot{\theta} \cancel{-(-ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta)} + mgl\sin\theta$$

$$= -cl^2\dot{\theta} + cl\dot{x}\cos\theta$$

معادله دیفرانسیل حرکت عبارت است از:

$$ml\ddot{\theta} + cl\dot{\theta} + mg\sin\theta = -(m\ddot{x} + c\dot{x})\cos\theta$$

Dissipation Function — تابع تلفات

اگر نیروهایی با طبیعت ویسکوز که بصورت خطی تابعی از سرعت هستند وجود داشته باشند،

نیروی آنها عبارت است از :

$$Q_i = -\sum_j c_{ij}\dot{q}_j$$

توان تلف آنها عبارت است از :

$$P = -\sum_j Q_j \dot{q}_j$$

در صورتیکه از توان تلف نسبت به $\dot{q}_i$ مشتق بگیریم :

$$\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_j - \sum_j Q_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j -c_{ij}\dot{q}_j - Q_j\delta_{ij}$$

$$= \sum_j c_{ij}\dot{q}_j - Q_i = -Q_i - Q_i = -2Q_i$$

نتیجه اینکه :

$$Q_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \dot{q}_i}$$

در صورتیکه نیمی نرخ کار انجام شده در واحد زمان را با F نشان دهیم :

$$F = \frac{1}{2}P \qquad \text{Rayleigh's Dissipation Function}$$

$$Q_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}$$

حال اگر در معادله لاگرانژ نیروی اتلافی ویسکوز را از سایر نیروهای عمومی جدا کنیم :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i + \left(-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}\right)$$

و یا :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

برای شامل کردن در مسئله شتق میرایی ← به جای نیروی F_c تابع F را محاسبه کنید.

$$F = \frac{1}{2} c V_m^2$$

$$= \frac{1}{2} c \left(\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 l \dot{x} \dot{\theta} \cos\theta \right)$$

با گرفتن مشتق نسبت ← $\dot{\theta}$ و قرار دادن در معادله لاگرانژ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} c \left(2 l^2 \dot{\theta} + 2 \dot{x} l \cos\theta \right)$$

$$= c l^2 \dot{\theta} + c l \dot{x} \cos\theta$$

با جایگذاری در معادله لاگرانژ

$$m l \ddot{\theta} + c l \dot{\theta} + m g \sin\theta = -\left(m \ddot{x} + c \dot{x} \right) \cos\theta$$

بررسی ساختار انرژی های جنبشی و پتانسیل

اگر برای سادگی حرکت جسم را اقلیدسی دو بعدی در نظر بگیریم، سرعت عبارت است از :

$$\underline{v} = \dot{x}\,\underline{i} + \dot{y}\,\underline{j} \Rightarrow v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

با بیان این انرژی برحسب مختصات عمومی

$$x = x(q_1, q_2)$$
$$y = y(q_1, q_2)$$

می‌نویسیم :

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_r}\dot{q}_r = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2$$
$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q_r}\dot{q}_r = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2$$

با جایگذاری در رابطه انرژی جنبشی داریم : $T = \frac{1}{2} m v^2$

$$T = a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2$$

که در آن :

$$a_{11} = \frac{1}{2} m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2\right] = a_{11}(q_1, q_2)$$

$$a_{22} = \frac{1}{2} m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2\right] = a_{22}(q_1, q_2)$$

$$a_{12} = m\left[\frac{\partial x}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}\right] = a_{12}(q_1, q_2)$$

همانطور که دیده می‌شود a_{ij} تابعی از مختصات عمومی هستند. اما در صورتیکه حرکت کوچک باشند می‌توان آنها را ثابت در نظر گرفت. بنابراین انرژی جنبشی :

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\dot{q}_r\right)\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_s}\dot{q}_s\right) \qquad r,s = 1,\dots,n$$

این رابطه را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$T = \frac{1}{2} a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s$$

که در آن a_{rs} به نام ماتریس جرم نامیده شده و عبارت است از:

$$a_{rs} = \sum_i m_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} \frac{\partial x_i}{\partial q_s}$$

و دیده می‌شود که این ماتریس خاصیت تقارن دارد:

$$a_{rs} = a_{sr} = \underline{\underline{m}}$$ (در این رابطه با توجه به جابجایی r و s چیزی عوض نمی‌شود)

این یعنی ماتریس مربعی بوده و رابطه انرژی را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$T = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \underline{\underline{m}} \, \underline{\dot{q}}$$

- همانطور که دیده می‌شود انرژی جنبشی یک عبارت مثبت قطعی است، زیرا انرژی مقداری مثبت بوده و تنها در ازای $\dot{q}_i = 0$ مقدار آن صفر می‌شود.

- عبارت بالا یک عبارت درجه ۲ از $\dot{q}$ است.

همچنین انرژی پتانسیل تابعی از موقعیت می‌باشد. در مورد شکل حالت ساده دو درجه‌ای را در نظر بگیریم:

$$V = V(q_1, q_2)$$

با بسط این انرژی حول وضعیت تعادل $(0,0)$ خواهیم داشت:

$$V = V(0,0) + \frac{\partial V(0,0)}{\partial q_1} q_1 + \frac{\partial V(0,0)}{\partial q_2} q_2 + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} q_1^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} q_1 q_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} q_2^2\right]$$

$$+ H.O.T$$

اگر فرض کنیم که می‌دانیم مقدار انرژی پتانسیل در وضعیت تعادل $(V(0,0))$ معمولاً نقشی را بازی نمی‌کند و آن را می‌توان صفر در نظر گرفت.

همچنین از اصل مینیمم انرژی پتانسیل می‌دانیم در وضعیت تعادل مشتق اول انرژی پتانسیل صفر است.

بنابراین:

$$V = \frac{1}{2}\left[V_{,11} q_1^2 + 2 V_{,12} q_1 q_2 + V_{,22} q_2^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[K_{11} q_1^2 + 2 K_{12} q_1 q_2 + K_{22} q_2^2\right]$$

$$= \frac{1}{2} K_{ij} q_i q_j$$

که

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$$

جملات K_{ij} از مقادیر ثابت هستند و به نام سختی نیز نامیده می‌شوند. و به دلیل اینکه ترتیب مشتق‌گیری تأثیری در K ندارد و بنابراین متقارن است.

بنابراین:

$$V = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{K}}\, \underline{q}$$

$\underline{\underline{K}}$ ماتریس متقارن و مربعی است.