معادلات لاگرانژ Lagrange's Equations

Note Title 3/16/2020

تا کنون از قانون دوم نیوتن برای بدست آوردن معادلات دیفرانسیل حرکت استفاده می‌کردیم. اما همانطور که از ارتعاشات دوره کارشناسی ارشد به خاطر داریم می‌توان از روش انرژی نیز استفاده نمود که روش سهل‌تر است.
این روش منجر به معادله لاگرانژ می‌گردد که امروزه کاربرد خیلی زیادی در بدست آوردن معادلات حرکت دارد.
قبل از بدست آوردن این روش لازم است که مختصات عمومی و اصل کار مجازی را تعریف کنیم.

مختصات عمومی Generalized Coordinates

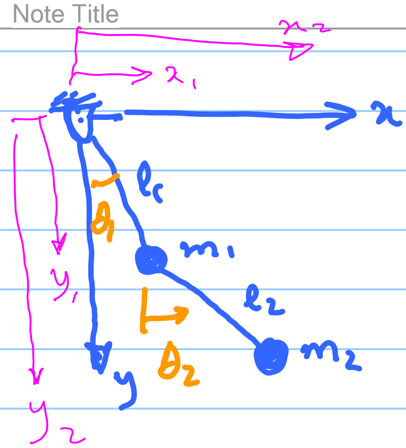
تعداد مختصه‌هایی که برای بیان حرکت یک سیستم (سیستم ذرات، سیستم اجسام صلب و ..) نیاز است را مختصات عمومی گویند.

- این مختصات ممکن است که با هم ارتباط داشته باشند و از هم دیگر مستقل نباشند.
- این ارتباط‌ها را با محدودیت نشان می‌دهیم.
- در صورتیکه N تعداد مختصات عمومی و l تعداد محدودیت‌ها باشند آنگاه

$$n = N - l$$

که n درجه آزادی سیستم است.

همانطور که می‌دانیم تعداد حداقل مختصات مستقل از هم برای بیان حرکت را درجه آزادی گویند.



مثال: پاندول دوبل شکل روبرو را در نظر بگیرید.

در اینجا چهار مختصه x_1، y_1، x_2 و y_2 را برای بیان حرکت داریم ($N=4$).

اما x_1 و y_1 با رابطه:

$$x_1^2+y_1^2=l_1^2$$

و x_2 و y_2 با رابطه:

$$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=l_2^2$$

با هم مرتبط هستند ($l=2$)

بنابراین درجه آزادی سیستم برابر با $n=2$ است.

- اما خیلی اوقات ممکن است که محدودیت نداشته باشیم و مختصات عمومی همان درجات آزادی باشند.

- همچنین خیلی اوقات می‌توان از مختصات دیگری نیز کمک گرفت. مثلاً در مثال بالا می‌توان به جای اندازه‌های x_1 و y_1 از زاویه‌های θ_1 و θ_2 به عنوان درجات آزادی و یا مختصات عمومی استفاده کرد.

مرسوم است که مختصات عمومی را با علامت q نشان می‌دهند.

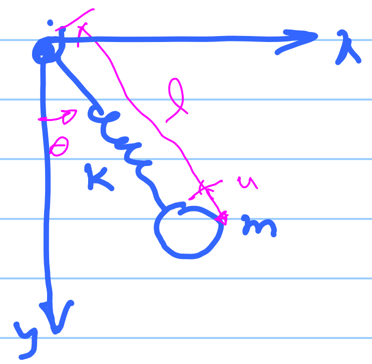
$$q_1=\theta_1 \quad , \quad q_2=\theta_2$$

اینجا یک تفاوت مختصات عمومی نسبت به درجات آزادی را بیان می‌کند

که درجات آزادی ممکن است که برخی از جنس طول و برخی از جنس زاویه باشند

که این کار با درجات آزادی را شکل می‌کند. اما در مختصات عمومی همه درجات آزادی به یک چشم نگاه می‌شوند.

مثال :



دیده می‌شود که این سیستم دو درجه آزادی دارد

$$x(t) = (l+u(t))\sin\theta(t)$$
$$y(t) = (l+u(t))\cos\theta(t)$$

در اینجا l طول آزاد فنر و u تغییر طول آن است.

می‌توان بردار موقعیت جرم m را بصورت زیر نوشت :

$$\underset{\sim}{r}(t) = \begin{Bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x(\theta(t), u(t)) \\ y(\theta(t), u(t)) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (l+u(t))\sin\theta(t) \\ (l+u(t))\cos\theta(t) \end{Bmatrix}$$

حال اگر مختصات عمومی را بصورت $q_1=\theta$, $q_2=u$ تعریف کنیم :

$$\underset{\sim}{q}(t) = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ u(t) \end{Bmatrix}$$

بنابراین دیده می‌شود که r تابعی از $\underset{\sim}{q}$ است.

همچنین اگر انرژی جنبشی در سیستم فیزیکی را محاسبه کنیم، دیده می‌شود که این انرژی در حالت کلی تابعی از مختصات عمومی و مشتقات آنها هستند. $T=T(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}})$

اما اگر انرژی پتانسیل آنها حساب شود این انرژی فقط تابعی از مختصات عمومی است

$V=V(\underset{\sim}{q})$

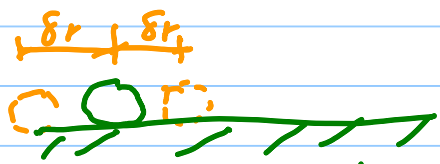
تغییرمکان مجازی   Virtual Displacement

تغییرمکان مجازی، تغییرمکانی بسیار کوچک است که تعبیر آن عمل می‌کند و با سیستم سازگار است.

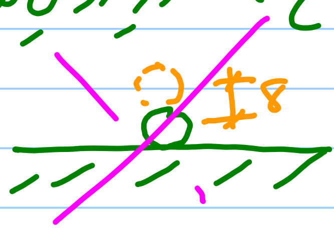
از آنجایی که این تغییرمکان تعبیر آن عمل می‌کند بنابراین تابع زمان نیست.

همچنین تغییرمکان مجازی باید با سیستم سازگار باشد

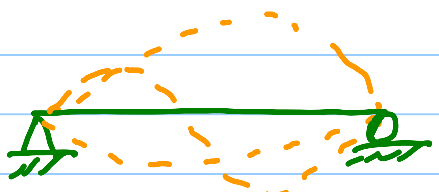
مثلاً اگر جسمی در امتداد سطحی حرکت می‌کند، تغییرمکان مجازی می‌تواند در امتداد سطح باشد مثل



اما تغییرمکان مجازی نمی‌تواند در جهت عمود بر سطح باشد زیرا این محدودیت با سیستم دیگری سازگار نیست



یا مثلاً اگر تیر دو سر مفصلی را در نظر بگیریم:



تمام حالت‌های نشان داده شده می‌توانند تغییرمکان مجازی باشند. اما تغییرمکان دو سر نمی‌تواند تغییرمکان مجازی باشد

زیرا در این صورت تیر دو سر مفصل نخواهیم داشت.

- بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در راستای محدودیت سیستم، تغییرمکان مجازی نخواهیم داشت.
- معمولاً این تغییرمکان را با δ علامت می‌دهند، δ در مقابل d که برای تغییرمکان واقعی استفاده می‌شد.

اصل کار مجازی — Virtual Work Principle

این روش در ابتدا برای حل مسائل استاتیکی و سپس برای مسائل دینامیکی استفاده شد.

این اصل بیان می‌دارد که:

اگر سیستمی که تحت اثر نیروهایی قرار دارد در حالت تعادل باشد، تحت اثر تغییر مکان‌های مجازی قرار بگیرد، کار مجازی انجام شده توسط این نیروها صفر است.

فرض کنید یک سیستم شامل تعداد N جسم که هر کدام ممکن است تحت اثر تعدادی نیرو با برآیند R_j (برای جسم j ام) است باشد. کار مجازی انجام شده برای جابجایی مجازی δr_j برابر است با:

$$\delta W = \sum_j R_j \cdot \delta r_j$$

از آنجا که در وضعیت تعادل R_j برابر صفر است، این کار برابر صفر می‌گردد.

اما R_j برآیند نیروهای خارجی (F_j) و نیروهای محدودکننده f_j می‌باشد:

$$R_j = F_j + f_j = 0$$

بنابراین:

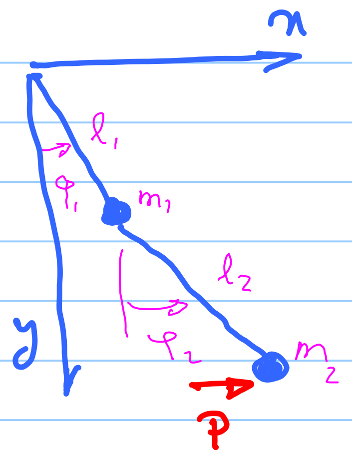
$$\delta W = \sum_j (F_j + f_j)\,\delta r_j = 0$$

و اما می‌دانیم که تغییر مکان مجازی نیروهای محدود کننده صفر است، بنابراین

$$\delta W = \sum_j F_j\,\delta r_j = 0$$

این رابطه به نام اصل کار مجازی نامیده می‌شود که توسط برنولی تشریح شده است.

مثال: پاندول دوبل شکل مقابل تحت اثر نیروی P قرار گرفته است و



$$l_1 = l_2 = l$$

سیستم دارای دو درجه آزادی φ_1 , φ_2 است.

نیروهای وارد بر اجزای دو جرم عبارتند از:

$$\underline{F}_1 = m_1 g \, \underline{j} \quad , \quad \underline{F}_2 = P \, \underline{i} + m_2 g \, \underline{j}$$

در مسئله حاضر تغییر مکان مجازی جرم‌ها را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta \underline{r}_m = \frac{\partial \underline{r}_m}{\partial q_i} \delta q_i \quad , \quad \underline{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

$$\delta \underline{r}_m = \frac{\partial \underline{r}_m}{\partial \varphi_1} \delta \varphi_1 + \frac{\partial \underline{r}_m}{\partial \varphi_2} \delta \varphi_2$$

آنگاه:

$$\underline{r}_1 = l_1 (\sin\varphi_1 \, \underline{i} + \cos\varphi_1 \, \underline{j})$$

$$\underline{r}_2 = l_1 (\sin\varphi_1 \, \underline{i} + \cos\varphi_1 \, \underline{j}) + l_2 (\sin\varphi_2 \, \underline{i} + \cos\varphi_2 \, \underline{j})$$

با تغییر گرفتن و $l_1 = l_2 = l$ خواهیم داشت:

$$\delta \underline{r}_1 = l (\cos\varphi_1 \, \underline{i} - \sin\varphi_1 \, \underline{j}) \delta\varphi_1$$

$$\delta \underline{r}_2 = l (\cos\varphi_1 \, \underline{i} - \sin\varphi_1 \, \underline{j}) \delta\varphi_1 + l (\cos\varphi_2 \, \underline{i} - \sin\varphi_2 \, \underline{j}) \delta\varphi_2$$

$$= l (\cos\varphi_1 \, \delta\varphi_1 + \cos\varphi_2 \, \delta\varphi_2) \underline{i} - l (\sin\varphi_1 \, \delta\varphi_1 + \sin\varphi_2 \, \delta\varphi_2) \underline{j}$$

از قرار دادن در رابطه اصل کار مجازی خواهیم داشت:

$$\delta W = \sum_{m=1}^{2} \underline{F}_m \cdot \delta \underline{r}_m$$

$$\delta W = m_1 g \underline{j} \cdot \left[l(\cos\varphi_1 \underline{i} - \sin\varphi_1 \underline{j})\delta\varphi_1 \right]$$

$$+ (P\underline{i} + m_2 g \underline{j}) \cdot \left[l(\cos\varphi_1 \delta\varphi_1 + \cos\varphi_2 \delta\varphi_2)\underline{i} - l(\sin\varphi_1 \delta\varphi_1 + \sin\varphi_2 \delta\varphi_2)\underline{j} \right] = 0$$

از ضرب داخلی داریم:

$$\delta W = -m_1 g l \sin\varphi_1 \delta\varphi_1 - m_2 g l (\sin\varphi_1 \delta\varphi_1 + \sin\varphi_2 \delta\varphi_2)$$

$$+ P l (\cos\varphi_1 \delta\varphi_1 + \cos\varphi_2 \delta\varphi_2) = 0$$

$$= \left[-(m_1 + m_2) g l \sin\varphi_1 + P l \cos\varphi_1 \right] \delta\varphi_1$$

$$+ \left[-m_2 g l \sin\varphi_2 + P l \cos\varphi_2 \right] \delta\varphi_2 = 0$$

اما $\delta\varphi_1$ و $\delta\varphi_2$ مجازی بوده و بی‌نهایت حالت می‌توانند داشته باشند. در این صورت برای صفر شدن حاصل عبارت بالا می‌بایست که ضرایب درون کروشه صفر باشند یعنی:

$$\begin{cases} -(m_1 + m_2) g l \sin\varphi_1 + P l \cos\varphi_1 = 0 & \Rightarrow \tan\varphi_1 = \dfrac{P}{(m_1 + m_2) g} \\ -m_2 g l \sin\varphi_2 + P l \cos\varphi_2 = 0 & \Rightarrow \tan\varphi_2 = \dfrac{P}{m_2 g} \end{cases}$$

همانطور که دیده می‌شود با استفاده از اصل کار مجازی توانستیم حالت تعادل استاتیکی را به‌دست آوریم.

این اصل را می‌توان برای سیستم‌های دینامیکی نیز توسعه داد. این کار با استفاده از اصل دالامبر صورت می‌پذیرد. در صورتیکه در رابطه قانون دوم نیوتن نیروی اینرسی را به سمت دیگر معادله ببریم لذا

$$\underline{F}_j = m\ddot{\underline{r}}_j \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_j - m\ddot{\underline{r}}_j = 0$$

به این رابطه تعادل دینامیکی گویند.

حال از بکار بردن تعادل دینامیکی در اصل کار مجازی داریم:

$$\delta W = \sum (\underline{F}_j - m\ddot{\underline{r}}_j)\,\delta \underline{r}_j = 0$$

نیروهایی که به عبارتی در رابطه بکار برده می‌گردند شامل نیروهای محدودیت نمی‌گردند.

معادلات لاگرانژ را می‌توان از روی این رابطه بدست آورد.

معادلات لاگرانژ Lagrange's Equations

برای بدست آوردن این معادلات ابتدا آنها را برای حالت تک بعدی بدست آورده و سپس آن را به حالت چند درجه آزادی گسترش می‌دهیم.

در صورتیکه حرکت یک نقطه مادی را در یک جهت، مثلاً x در نظر بگیریم و اگر q مختصه عمومی باشد:

$$F_x = m\ddot{x} \quad (1)$$

از معادلهٔ مربوط در رابطهٔ کار مجازی

$$(F_x - m\ddot{x})\delta x = 0 \quad (2)$$

جمله اول را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$F_x\,\delta x = F_x\frac{\partial x}{\partial q}\delta q = Q\,\delta q \quad (3), \qquad Q = F_x\frac{\partial x}{\partial q} \quad (4)$$

که به Q نیروی عمومی (Generalized Force) گویند.

جمله دوم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m\ddot{x}\,\delta x = m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q}\delta q$$

$$= m\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q}\right) - \dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)\right]\delta q \quad (5)$$

اما

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q}\dot{q} \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q} \quad (6)$$

حال انرژی جنبشی جرم را در نظر می‌گیریم:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad (7)$$

و مشتقات آن را نسبت به q و $\dot{q}$ می‌نویسیم:

$$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2}m(2)(\dot{x})\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial q}\right) = m\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2}m(2)(\dot{x})\left(\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}}\right) = m\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = m\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q} \quad (9)$$

از جایگذاری (۹)، (۸) در (۶) خواهیم داشت:

$$m\ddot{x}\,\delta x = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\right]\delta q \qquad (10)$$

بنابراین رابطه اصل دالامبر به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\left\{Q - \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\right]\right\}\delta q = 0 \qquad (11)$$

از آنجا که تغییرمکان مجازی δq می‌تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q \qquad (12)$$

این رابطه به نام معادله لاگرانژ معروف است.