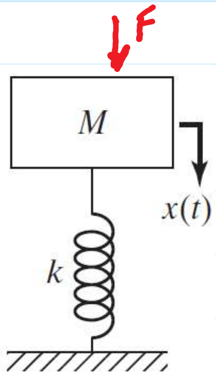
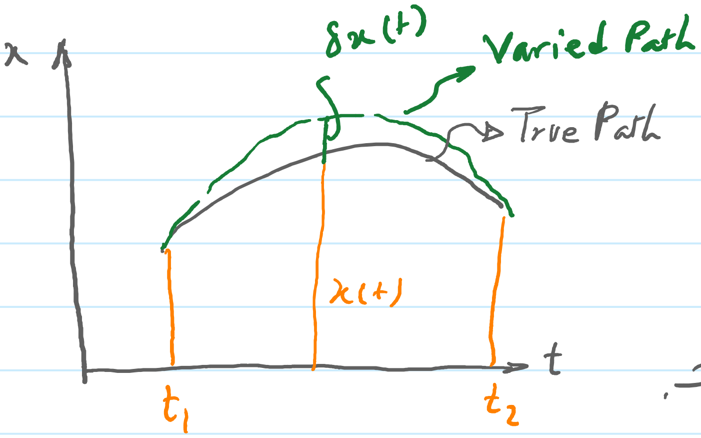
Hamilton's Principle   اصل هامیلتون

در بحث اصل کار مجازی، از آن برای بدست آوردن معادلات لاگرانژ کمک گرفته شد، در اینجا این اصل را گسترش داده، با بدست آوردن اصل هامیلتون، از روی آن می‌توان در حالت خاص، معادلات لاگرانژ را بدست آورد. به شکل زیر توجه کنید:



سیستم یک درجه آزادی شکل مقابل را در نظر بگیرید. تغییر مکان سیستم با x که تابعی از زمان است نشان داده شده است.

در زمان t_1 سیستم موقعیت $x(t_1)$ را داراست و در زمان t_2 دارای موقعیت $x(t_2)$ می‌باشد. اگر تغییر مکان را برحسب تابعی از زمان رسم کنیم، یک منحنی که نشان دهنده حرکت جرم m در فاصله زمانی بین t_1 و t_2 است بدست می‌آید.



فرض کنید که در لحظه t تغییر مکان مجازی δx بر سیستم اعمال گردد. این تغییر مکان مجازی در سایر لحظات با رنگ سبز نشان داده شده است.

مسیر حرکتی که x را طی می‌کند بنام مسیر واقعی یا نیوتنی و یا (True Path) نامیده می‌شود. دیده می‌شود که به ازای داشتن جابجایی‌های مجازی از مسیر واقعی به مسیر دیگری رفته‌ایم که مسیر تغییر یافته (Varied Path) نامیده می‌شود.

همچنین همانطور که دیده می‌شود مسیر تغییر یافته در لحظات t_1 و t_2 بر مسیر نیوتنی (واقعی) منطبق است.

این ویژگی ناشی از انتخاب دلخواه ما است و می‌خواهیم مطمئن شویم که در نقاط t_1 و t_2 حرکت معلوم است.

بنابراین در این حالت :

$$\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$$

همچنین دقت کنید که تغییر مکان مجازی مانند گذشته می‌بایست که شرایط مرزی مکانی را نیز برآورده کرده و با سیستم سازگار باشد. در این صورت اصل هامیلتون بیان می‌دارد که:

«از بین تمام مسیرهای ممکن برای سیستم مکانیکی در بین دو لحظه زمانی t_1 و t_2، مسیری که توسط سیستم انتخاب می‌گردد (مسیر واقعی) مسیری است که مقدار انتگرال زمانی انرژی مکانیکی سیستم را اکسترمم کند»

مثلاً مثال قبل که سیستم یک درجه آزادی است را در نظر بگیرید. از قانون دوم نیوتن:

$$\sum F_x = m\ddot{x} \Rightarrow F - kx = m\ddot{x}$$

از ضرب دو طرف در تغییر مکان مجازی δx

$$F\delta x - kx\delta x = m\ddot{x}\delta x$$

اما انرژی جنبشی و پتانسیل و کار نیروی غیر کنزرواتیو (Non Conservative) عبارت است از:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \delta V = kx\delta x$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow \delta T = m\dot{x}\delta\dot{x}$$

$$\delta W_{nc} = F\delta x$$

از جایگذاری در معادله بالا:

$$\delta W_{nc} - \delta V = m\ddot{x}\delta x$$

اما:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}\delta x) = m\ddot{x}\delta x + m\dot{x}\delta\dot{x}$$

پس:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}\delta x) = (\delta W_{nc} - \delta V) + \delta T$$

$$\Rightarrow d(m\dot{x}\delta x) = (\delta W_{nc} - \delta V + \delta T)\,dt$$

از انتگرال گیری دو طرف بر روی زمان از t_1 تا t_2

$$\int_{t_1}^{t_2} d(m\dot{x}\,\delta x) = \int_{t_1}^{t_2}(\delta T - \delta V + \delta W_{nc})\,dt$$

بنابراین:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V+W_{nc})\,dt = m\dot{x}\,\delta x\Big|_{t_1}^{t_2}$$

اما $\delta x(t_1)=\delta x(t_2)=0$ و بنابراین:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V+W_{nc})\,dt=0$$

که نشان می‌دهد تغییرات انتگرال زمانی انرژی لاگرانژی سیستم بین t_1 و t_2 صفر بوده و یا اینکه اکسترمم است. برای سیستم‌های کنسرواتیو تعادل ثابت همان اصل کمینه انرژی است.

بیان دیگری از این اصل را می‌توان به عبارت زیر عنوان نمود:

« حرکت هر سیستم دینامیکی، هماهنگ با شرایط مرزی آن، به گونه‌ای است که انتگرال تغییرات انرژی جنبشی سیستم و کار مجازی انجام شده توسط کلیه نیروهای خارجی بر روی سیستم در هر فاصله زمانی $t_1<t<t_2$ برابر صفر است »

توجه کنید که این اصل شباهت به انرژی پتانسیل اکسترمم است دارد.

در صورتیکه یک سیستم n درجه آزادی در نظر گرفته شود:

$$T=T(q_1,q_2,\dots,q_n,\dot q_1,\dot q_2,\dots,\dot q_n)$$

تغییرات انرژی جنبشی

$$\delta T=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\,\delta q_k+\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\,\delta\dot q_k\right)$$

به همین ترتیب انرژی پتانسیل سیستم تابعی فقط از مختصات عمومی است:

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_n) \Rightarrow \delta V = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial q_k}\delta q_k$$

همچنین کار مجازی نیروی غیرکنسرواتیو برابر است با:

$$\delta W_{nc} = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta q_k$$

که Q_k نیروی عمومی هستند. این نیرو شامل نیروی دمپر، نیروی خارجی، گشتاور و ...

از قرار دادن δT، δV و δW_{nc} در معادله اصل هامیلتون:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc})\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} + Q_k \right)\delta q_k + \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k \right] dt = 0$$

همچنین توجه داریم که:

$$\text{at } t = t_1, t_2 \Rightarrow \delta q_k = 0 \quad , k = 1, 2, \dots, n$$

از انتگرال گیری جمله آخر رابطه بالا با استفاده از روش جزء به جزء:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}}_{u} \underbrace{\frac{d}{dt}\delta q_k\,dt}_{dv} = \cancel{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\delta q_k \Big|_{t_1}^{t_2}} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\,dt$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)\delta q_k\,dt \quad , k = 1, 2, \dots, n$$

از قرار دادن این رابطه در رابطه اصل هامیلتون بالا:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k} + Q_k - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) \right] \delta q_k\,dt = 0$$

از آنجایی که δq_k جابجایی مجازی است، بنابراین مقدار می‌تواند دلخواه باشد، بنابراین عبارت درون کروشه می‌بایست صفر باشد.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

که همان معادله لاگرانژ است.

حال اگر سازه پیوسته‌ای را در نظر بگیریم که تحت نیروهای سطحی T_i (Surface Forces) و نیروهای حجمی f_i (Body Forces) باشد، از روی اصل همیلتون می‌توان معادلات دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی حاکم بر آن را بدست آورد.

از نوشتن معادلات حرکت برای سازه:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (1)$$

که ρ دانسیته جرمی و u_i مؤلفه بردار تغییر مکان و σ_{ij} تنش می‌باشد.

درصورتیکه کار انجام شده مجازی (δW_E) توسط نیروهای T_i و f_i در طول تغییر مکان مجازی δu_i دلخواه گرفته شود.

δu_i می‌بایست بصورت پیوسته قابل قبول بوده و محدودیتهای سازه را نیز رعایت کند. همچنین باید گذشته این تغییر فرم مجازی را بگونه‌ای محدود می‌کنیم که δu_i در تمام نقاط سازه در زمان t_1 و t_2 صفر باشد، یعنی:

$$\delta u_i(x_j, t_1) = \delta u_i(x_j, t_2) = 0 \qquad (2)$$

به عبارت دیگر فرض می‌کنیم که تغییر مکان در t_1 و t_2 معلوم است و به دنبال یافتن حرکت جسم در حال $t_1 < t < t_2$ هستیم.

کار مجازی نیروهای خارجی عبارت است از:

$$\delta W_E = \int_s T_i \,\delta u_i \, ds + \int_V f_i \,\delta u_i \, dV \qquad (3)$$

انتگرال دو بر روی سطح را با استفاده از قضیه گرین (Green Theorem) می‌توان بفرم حجمی درآورد:

$$\int_s T_i \,\delta u_i \, ds = \int_V (\sigma_{ij}\,\delta u_i)_{,j} \, dV = \int_V (\sigma_{ij,j}\,\delta u_i + \sigma_{ij}\,\delta u_{i,j}) \, dV \qquad (4)$$

نتیجتاً کار مجازی نیروهای خارجی:

$$\delta W_E = \int_V [\sigma_{ij}\,\delta u_{i,j} + (\sigma_{ij,j} + f_i)\,\delta u_i] \, dV \qquad (5)$$

با استفاده از تانسور کرنش

$$\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \Rightarrow \delta\epsilon_{ij}=\frac{1}{2}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})$$

از قرار دادن این رابطه در رابطه (۱) در (۵):

$$\delta W_E=\int_V \sigma_{ij}\,\delta\epsilon_{ij}\,dV+\int_V \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\,\delta u_i\,dV \quad (6)$$

انتگرال حجمی اول سمت راست کار مجازی داخلی توسط تنش‌ها می‌باشد که با انرژی کرنشی (U) نشان داده می‌شود:

$$\delta W_E=\delta U+\int_V \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\,\delta u_i\,dV \quad (7)$$

برای بدست آوردن اصل همیلتون رابطه (۷) را بین t_1 و t_2 انتگرال گیری می‌کنیم:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta W_E-\delta U)\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_V \rho\underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}}_{dv}\,\underbrace{\delta u_i}_{u}\,dV\,dt$$

با تعویض انتگرال‌ها و انتگرال گیری جزء به جزء خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta W_E-\delta U)\,dt=\int_V \rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\delta u_i\,dV\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_V\int_{t_1}^{t_2}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\frac{\partial \delta u_i}{\partial t}\,dt\,dV$$

جمله اول سمت راست صفر می‌باشد زیرا از (۲) داریم: $\delta u_i(t_1)=\delta u_i(t_2)=0$. همچنین با توجه به $\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial t}=\delta\frac{\partial u_i}{\partial t}$ خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta W_E-\delta U)\,dt=-\int_{t_1}^{t_2}\delta\int_V \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\frac{\partial u_i}{\partial t}\,dV.dt$$

که جمله درون انتگرال حجمی سمت راست انرژی جنبشی را بیان می‌کند. بنابراین:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta W_E-\delta U+\delta T)\,dt=0$$

که بیانگر اصل همیلتون است.

در صورتیکه بار خارجی شامل نیروهایی که قابل دسترسی از یک تابع پتانسیل V_E مشخص باشد رابطه قبلی را می‌توان بفرم زیر نوشت:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U - V_E)\,dt = 0$$

که در آن:

$$\delta V_E = -\delta W_E = -\int_S T_i\, \delta u_i\, ds - \int_V f_i\, \delta u_i\, dV$$

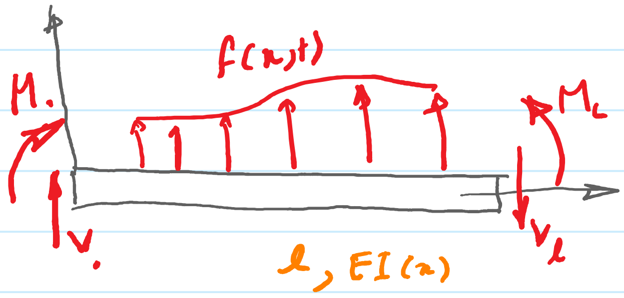
اگر نیروهای T_i و f_i مستقل از تغییر مکان u_i باشند:

$$V_E = -\int_S T_i\, u_i\, ds - \int_V f_i\, u_i\, dV$$

در حالت آوردن معادلات دیفرانسیل حرکت سازه‌ها و شرایط مرزی حاکم بر آنها، معمولاً انرژی سیستم محاسبه شده و کار نیروهای خارجی نیز محاسبه می‌گردد و به صورت معکوس از رابطه اصل همیلتون استفاده می‌شود.

مثال:

استفاده از اصل همیلتون در تعیین معادله دیفرانسیل حرکت و شرایط مرزی ارتعاشات عرضی تیر



تیر متغیری با سختی خمشی $EI(x)$، جرم واحد طول m و طول l که تحت نیروی گسترده $f(x,t)$ قرار دارد را در نظر بگیرید. مقادیر شرایط مرزی $W(0,t)$، $W(l,t)$ و $W'(0,t)$ و $W'(l,t)$، V_0، V_l، M_0 و M_l بسته به شرایط انتهایی در سر تیر هستند. انرژی کرنشی ناشی از خمش:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} M\, d\theta = \int_0^l \frac{1}{2} M \frac{d\theta}{dx}\, dx = \int \frac{1}{2} M \frac{d^2 W}{dx^2}\, dx$$

با توجه به:

$$M = EI\frac{d^2w}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

و در نتیجه:

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} M \left(\frac{M}{EI}\right) dx = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^l \frac{EI}{2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx$$

انرژی جنبشی هم:

$$T = \int_0^l \frac{1}{2} \rho \dot{w}^2 dx$$

و پتانسیل ناشی از بارهای خارجی:

$$V_E = -\int_0^l f(x,t)\, w\, dx - V_0 w(0,t) + M_0 w'(0,t) + V_l w(l,t) - M_l w'(l,t)$$

در این روابط دقت کنید که مثلاً در جمله اول، نیروی f مثبت لحاظ و در جابجایی مثبت ضرب شده و کار آن مثبت لحاظ که انرژی پتانسیل آن منفی می‌باشد.

از جایگذاری در اصل همیلتون:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T + V_E)\, dt = 0$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \int_0^l \Big[\frac{1}{2} EI\, w''^2 - \frac{1}{2}\rho \dot{w}^2 - f(x,t) w\Big] dx$$

$$- V_0 w(0,t) + M_0 w'(0,t) + V_l w(l,t) - M_l w'(l,t) \Big\} dt = 0$$

از اعمال اپراتور δ بر روی عبارات انتگرال بالا:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \int_0^l \Big[EI\, w''\delta w'' - \rho \dot{w}\,\delta \dot{w} - f(x,t)\,\delta w\Big] dx$$

$$- V_0\, \delta w(0,t) + M_0\, \delta w'(0,t) + V_l\, \delta w(l,t) - M_l\, \delta w'(l,t) \Big\} dt = 0$$

با توجه به آنکه $\delta \dot{w} = \frac{\partial(\delta w)}{\partial t}$ و $\delta w'' = (\delta w)''$ ، جمله اول انتگرال بالا را دو مرتبه انتگرال‌گیری جزء به جزء و جمله دوم را یک مرتبه انتگرال‌گیری جزء به جزء انجام می‌دهیم.

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l EIw''\delta w''\,dx = \int_{t_1}^{t_2}\left[EIw''\delta w'\Big|_0^l - \int_0^l (EIw'')'\delta w'\,dx\right]dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left\{(EIw'')\delta w'\Big|_0^l - \left[(EIw'')'\delta w\Big|_0^l - \int_0^l (EIw'')''\delta w\,dx\right]\right\}dt$$

و

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \rho\dot{w}\delta\dot{w}\,dx\,dt = -\int_0^l\left[\rho\dot{w}\delta w\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\rho\ddot{w}\delta w\,dt\right]dx$$

جمله اول سمت راست این انتگرال با توجه به $\delta w(x,t_1)=\delta w(x,t_2)=0$ صفر می‌شود

از جایگذاری باقی جملات در معادله صفحه قبل:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^l\left[(EIw'')''+\rho\ddot{w}-f(x,t)\right]\delta w\,dx\right.$$

$$+\left[-V_0+(EIw'')'\right]_{x=0}\delta w(0,t)+\left[V_l-(EIw'')'\right]_{x=l}\delta w(l,t)$$

$$\left.+\left[M_0-EIw''\right]_{x=0}\delta w'(0,t)+\left[-M_l+EIw''\right]_{x=l}\delta w'(l,t)\right\}dt=0$$

از آنجا که δw هر مقداری را می‌تواند داشته باشد برای صفر شدن انتگرال می‌بایست که عبارات زیر همزمان صفر شوند:

$$(EIw'')''+\rho\ddot{w}=f(x,t)$$

$$V_0=\left[(EIw'')'\right]_{x=0} \quad \text{یا} \quad \delta w(0,t)=0$$

$$V_l=\left[(EIw'')'\right]_{x=l} \quad \text{یا} \quad \delta w(l,t)=0$$

$$M_0=\left[EIw''\right]_{x=0} \quad \text{یا} \quad \delta w'(0,t)=0$$

$$M_l=\left[EIw''\right]_{x=l} \quad \text{یا} \quad \delta w'(l,t)=0$$

که این معادلات، معادله ارتعاشات خمشی تیر اویلر-برنولی به همراه شرایط مرزی حاکم بر آن می‌باشند. از این معادلات دیده می‌شود که نیروی برشی و یا خیز و همچنین ممان خمشی و یا شیب در دو انتها می‌بایست ذکر گردد.