از روش تحلیل مودال می‌توان در بدست آوردن پاسخ ارتعاشات آزاد سیستم کمک گرفت.

مثلاً فرض کنید که یک تیر یک سر مفصل یک سر آزاد موجود است با شرایط اولیه:

$$w(x,0)=f(x)\ ,\ \dot{w}(x,0)=0$$

معادله دیفرانسیل تیر همانطور که می‌دانیم عبارت است از:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

با شرایط مرزی:

at $x=0$: $\quad w(0,t)=0\ ,\ M=EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)=0$

at $x=l$: $\quad M=EI\frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2}=0\ ,\ V=-\frac{\partial}{\partial x}\left(EI\frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2}\right)=0$

پاسخ را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\,q_n(t)$$

که ϕ ها همان شکل مودهای نرمال هستند. q_n هم مختصات مودال هستند که معادله زیر را ارضا می‌کنند:

$$\ddot{q}_n(t)+\omega_n^2\,q_n(t)=0 \qquad n=0,1,2,\ldots$$

پاسخ این معادله برابر است با:

$$q_n(t)=q_n(0)\cos\omega_n t+\frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t \qquad n=0,1,2,\ldots$$

که $q_n(0)$ و $\dot{q}_n(0)$ شرایط اولیه تغییر فرم و سرعت مودال که از شرایط اولیه بدست می‌آیند. در صورتیکه شرایط اولیه با الزام زیر باشند:

$$w(x,0)=f(x)=w_0\left(\frac{x}{l}\right)^2\ ,\ \dot{w}(x,0)=0$$

می‌توان نوشت:

$$w(x,0)=\sum\phi_n(x)\,q_n(0)=f(x)$$

از ضرب دو طرف این رابطه در $m(x)\phi_m(x)$ و انتگرال گیری بر روی طول تیر:

$$\sum \int_0^l m \phi_n \phi_m q_n(0)\, dx = \int_0^l m \phi_m f(x)\, dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

با استفاده از خاصیت ارتوگونالیتی شکل مودها:

$$\int_0^l m \phi_n^2\, dx = 1$$

$$\Rightarrow \quad q_n(0) = \int_0^l m \phi_n(x) f(x)\, dx \qquad n=0,1,2,\dots$$

با توجه به $m(x)=m$ و $EI(x)=EI$

و معادله فرکانسی: $\tan\beta l = \tanh\beta l$ و شکل مودها:

شکل مود جسم صلب $\phi_0(x) = A_0 x \quad , \omega_0 = 0$

$$\phi_n(x) = A_n(\sinh\beta_n l \sin\beta_n x + \sin\beta_n l \sinh\beta_n x) , \omega_n = (\beta_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

$n=1,2,\dots$

با نرمال سازی ضرایب A_0 و A_n ثابت می‌آیند:

$$\int_0^l m(A_0 x)^2\, dx = 1 \Rightarrow m A_0^2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^l = 1 \Rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{3}{ml^3}}$$

به همین ترتیب:

$$A_n = \sqrt{\frac{2}{ml(\sinh^2\beta_n l - \sin^2\beta_n l)}} \quad , n=1,2,\dots$$

بنابراین شرایط اولیه $q_n(0)$ و $\dot{q}_n(0)$ خواهند بود:

$$q_0(0) = m\int_0^l \phi_0(x) f(x)\, dx = m\int_0^l \sqrt{\frac{3}{ml^3}}\, x\, w_0 \left(\frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\sqrt{3ml}\; w_0$$

$$q_n(0) = m\int_0^l \phi_n(x) f(x)\, dx = m\sqrt{\frac{2}{ml(\sinh^2\beta_n l - \sin^2\beta_n l)}}\; w_0 \int_0^l \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$(\sinh\beta_n l \sin\beta_n x + \sin\beta_n l \sinh\beta_n x)\, dx$$

با محاسبه انتگرال:

$$q_n(0) = \frac{2mW_0}{\beta_n^3 l^2}\sqrt{\frac{2}{ml(\sinh^2\beta_n l - \sin^2\beta_n l)}}\,(2\cosh\beta_n l \sin\beta_n l - \sin\beta_n l - \sinh\beta_n l)$$

$$n = 1, 2, \ldots$$

سپس برای پاسخ‌های مودال برابرند با :

$$q_0(t) = q_0(0)\cos\omega_0 t = \frac{1}{4}\sqrt{3ml}\,W_0$$

$$q_n(t) = q_n(0)\cos\omega_n t = \frac{2mW_0}{\beta_n^3 l^2}\sqrt{\frac{2}{ml(\sinh^2\beta_n l - \sin^2\beta_n l)}}\Big[2\cosh\beta_n l \sin\beta_n l$$

$$- \sin\beta_n l - \sinh\beta_n l\Big]\cos\left((\beta_n l)^2\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\,t\right) \qquad r = 1, 2, 3, \ldots$$

پاسخ تیر عبارت است از :

$$w(x,t) = \frac{3W_0}{4l}x + 4W_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cosh\beta_n l \sin\beta_n l - \sin\beta_n l - \sinh\beta_n l}{(\beta_n l)^3(\sinh^2\beta_n l - \sin^2\beta_n l)}$$

$$(\sinh\beta_n l \sin\beta_n x + \sin\beta_n l \sinh\beta_n x)\cos\left((\beta_n l)^2\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}\,t\right)$$

مثال: ارتعاشات پیچشی اجباری محور یکنواخت.

درصورتیکه معادله ارتعاشات اجباری پیچشی محور را در نظر بگیریم:

$$GJ_p \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + m_t(x,t) = I\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \qquad (1)$$

با در نظر پاسخ بفرضیم:

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n(x)\,q_n(t) \qquad (2)$$

که Θ_n شکل مود نرمال nام میله و $q_n(t)$ مختصه عمومی nام است. برای بدست آوردن مود نرمال معادله همگن رابطه بالا با حرکت زمانی هارمونیک را در نظر می‌گیریم:

$$GJ_p \frac{d^2\Theta(x)}{dx^2} + I\omega_n^2\Theta(x) = 0 \qquad (3)$$

که مانند سایر سیستم‌های پیوسته می‌توان رابطه ارتوگونالیتی را بدست آورد.

از ضرب دو طرف رابطه (1) در Θ_m و انتگرال گیری بر روی طول میله، استفاده از رابطه ارتوگونالیتی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} GJ_p\,\Theta_n''(x)\,q_n + m_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} I\,\Theta_n(x)\,\ddot q_n(t) \qquad (4)$$

$$\overset{3,4}{\Longrightarrow}\quad -I\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n(x)\,\omega_n^2 q_n + m_n = \sum_{n=1}^{\infty} I\,\Theta_n\,\ddot q_n$$

$$-I\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \Theta_n\Theta_m\,\omega_n^2 q_n\,dx + \int_0^l m_n(x,t)\,\Theta_m\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l I\,\Theta_n\Theta_m\,\ddot q_n\,dx$$

با استفاده از خاصیت ارتوگونالیتی:

$$\int_0^l \Theta_n^2(x)\,dx = 1$$

$$\Longrightarrow \ddot q_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = Q_n(t) \qquad (5)$$

که:

$$Q_n(t) = \frac{1}{I}\int_0^l m_t(x,t)\,\Theta_n(x)\,dx \qquad (6)$$

پاسخ این معادله عبارت است از:

$$q_n(t) = A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t Q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \qquad (6)$$

و پاسخ کلی :

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\int_0^t Q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau\right]\Theta_n(x) \qquad (7)$$

مثلاً در صورتیکه محور دو سر آزاد داشته باشیم که تحت اثر گشتاور به مقدار $M_t = a_0 t$ در $x = l$ قرار گیرد. در صورتیکه شرایط اولیه صفر باشد، پاسخ پایدار عبارت است از:

$$\Theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Theta_n(x)}{\omega_n}\int_0^t Q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \qquad (8)$$

در شرایط عمومی از رابطه (6) محاسبه می‌گردد.

از آنجا که گشتاور خارجی برابر است با:

$$m_t(x,t) = M_t\,\delta(x-l) = a_0 t\,\delta(x-l) \qquad (9)$$

بنابراین:

$$Q_n(t) = \frac{1}{I}\int_0^l a_0 t\,\delta(x-l)\,\Theta_n(x)\,dx = \frac{a_0}{I_0}\Theta_n(l)\,t$$

برای محور دو سر آزاد داریم:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{l} = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{G}{\rho}}\ , \quad \Theta_n(x) = A_n\cos\frac{\omega_n x}{c} \qquad n=1,2,\dots \qquad (10)$$

در صورتیکه مودهای نرمال برابر:

$$\int_0^l \Theta_n^2(x)\,dx = 1$$

باشند، مقدار $A_n = \sqrt{\frac{2}{l}}$ بدست می‌آید. بنابراین:

$$\Theta_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{n\pi x}{l} \qquad n=1,2,\dots \qquad (11)$$

از قرار دادن در رابطه انتگرال کانولوشن:

$$\int_0^t Q_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \frac{a_0}{I}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos n\pi \int_0^t \tau \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau \tag{12}$$

$$= \frac{a_0}{I\omega_n}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos n\pi\left(t-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

و پاسخ پایدار محور:

$$\theta(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\omega_n}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{a_0}{I\omega_n}\sqrt{\frac{2}{l}}\cos n\pi\right)\left(t-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a_0}{lI\omega_n^2}\cos\frac{n\pi x}{l}\left(t-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right) \tag{13}$$

از آنجا که محور نامقید است، به پاسخ فوق می‌بایست پاسخ مربوط به شکل بود جسم صلب را نیز اضافه کرد. برای حالتی که حرکت جسم صلب را داریم:

$$m_t = I\frac{d^2\bar{\theta}(t)}{dt^2} \tag{14}$$

که $\frac{d^2\bar{\theta}(t)}{dt^2}$ شتاب دورانی حرکت جسم صلب محور می‌باشد. از قرار دادن مقدار m_t در رابطه (14)

$$a_0 t = I\frac{d^2\bar{\theta}}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\bar{\theta}}{dt^2}=\frac{a_0 t}{I}$$

با دوبار انتگرال گیری

$$\bar{\theta}(t)=\frac{a_0}{I}\frac{t^3}{6}$$

و پاسخ کلی:

$$\theta(x,t)=\frac{a_0}{6I}t^3+\frac{2a_0}{lI}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{l}\left(t-\frac{1}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)$$

همانطور که قبلاً بیان شد سیستم پیوسته یک بعدی (نقاط روی سازه با یک مختصه x بیان می‌شوند) تحت اثر نیروی $f(x,t)$ و ممان خمشی $M(x,t)$ در واحد طول را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\phi_i(x)\,q_i(t)$$

مختصات عمومی q_i هر یک باید معادله دیفرانسیل حرکت زیر را ارضا کنند:

$$(1)\qquad \ddot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=\frac{1}{m_i}\left[\int_0^l f(x,t)\,\phi_i(x)\,dx+\int_0^l M(x,t)\,\phi_i'(x)\,dx\right]$$

سمت راست حاصل ضرب عکس جرم عمومی m_i در نیروی عمومی Q_i است. این نیروی عمومی را می‌توان با استفاده از کار مجازی بار اعمال شده به صورت $Q_i=\frac{\delta W}{\delta q_i}$ بدست آورد.

در صورتیکه به جای بارهای گسترده، بارهای متمرکز $F(a,t)$ و $M(a,t)$ که در نقطه $x=a$ اعمال می‌گردند، بر سازه وارد شوند، بار عمومی Q_i عبارت است از:

$$\delta W=F(a,t)\,\delta w(a,t)+M(a,t)\,\delta w'(a,t)$$

$$=F(a,t)\sum_i\phi_i(a)\,\delta q_i+M(a,t)\sum_i\phi_i'(a)\,\delta q_i$$

در نتیجه:

$$Q_i=\frac{\delta W}{\delta q_i}=F(a,t)\,\phi_i(a)+M(a,t)\,\phi_i'(a)$$

در نتیجه معادله * عبارت خواهد بود از:

$$\ddot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=\frac{1}{m_i}\left[F(a,t)\,\phi_i(a)+M(a,t)\,\phi_i'(a)\right]\qquad(2)$$

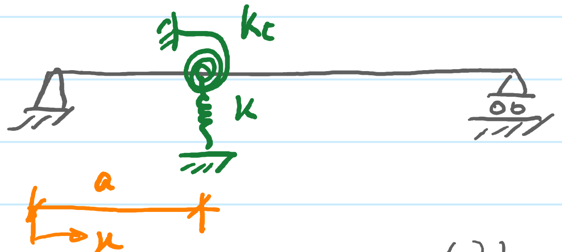
در ادامه به یک کاربرد مهم از این رابطه می‌پردازیم.

مودهای نرمال سازه‌های با قید Normal modes of Constrained Structures

در صورتیکه به سازه‌ای فنر و یا وزنه‌ای اضافه و متصل گردد، به آن سازه با قید گویند. مثلاً در صورتیکه فنری به سازه متصل گردد، این فنر تمایل دارد که در نقطه اتصال به سازه بصورت یک محدودیت عمل کرده و فرکانس طبیعی سیستم را بالا ببرد. در صورتیکه جرمی به سازه اضافه گردد، باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.

برای حل چنین سیستم‌هایی می‌توان از روش جمع مودی استفاده کرد. در این صورت می‌توان به جای محدودیت، در نقطه اتصال از یک نیرو استفاده نمود.

مثلاً تیر دوسر مفصلی را در نظر بگیرید که یک فنر خطی و یک فنر پیچشی در نقطه $x=a$ به آن متصل است.



فنر خطی نیروی زیر را به تیر اعمال می‌کند:

$$F(a,t) = -k\,w(a,t) = -k\sum_j \phi_j(a)\,q_j(t) \qquad (3)$$

همچنین فنر پیچشی ممان زیر را به تیر اعمال می‌کند:

$$M(a,t) = -k_t\,w'(a,t) = -k_t\sum_j \phi'_j(a)\,q_j(t) \qquad (4)$$

از جایگذاری این معادلات در رابطه (2) خواهیم داشت:

$$(5)\quad \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = \frac{1}{m_i}\left[-k\phi_i(a)\sum_j \phi_j(a)q_j - k_t\phi'_i(a)\sum_j \phi'_j(a)q_j\right]$$

در صورتیکه مودهای نرمال سازه با محدودیت را به فرم زیر نشان دهیم:

$$q_i = \bar{q}_i\,e^{j\omega t} \qquad (6)$$

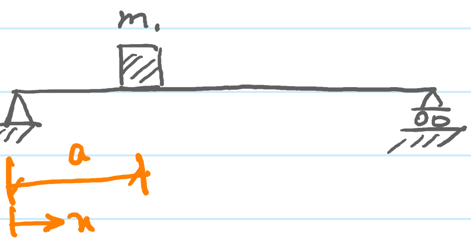
این مود هم هارمونیک بوده و از جایگذاری آن در رابطه (5)

$$-\omega^2 \bar{q}_i \cancel{e^{j\omega t}} + \omega_i^2 \bar{q}_i \cancel{e^{j\omega t}} = \frac{1}{m_i}\left[-k\phi_i(a)\sum_j \phi_j(a)\bar{q}_j \cancel{e^{j\omega t}} - k_t \phi_i'(a)\sum_j \phi_j'(a)\bar{q}_j \cancel{e^{j\omega t}}\right]$$

در نتیجه:

$$\bar{q}_i = \frac{1}{m_i(\omega_i^2-\omega^2)}\left[-k\phi_i(a)\sum_j \phi_j(a)\bar{q}_j - k_t \phi_i'(a)\sum_j \phi_j'(a)\bar{q}_j\right] \quad (7)$$

در صورتیکه از n مود استفاده شود، تعداد n مقدار $\bar{q}_j$ و n معادله شبیه (7) خواهیم داشت. با برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرائب $\bar{q}_j$، فرکانس‌های طبیعی مودی با محدودیت بدست می‌آید. همچنین شکل مودی سازه با محدودیت از جایگذاری شکل مودی $\bar{q}_j$ در رابطه $w(x,t)=\sum_i \phi_i(x) q_i(t)$ و حذف $e^{j\omega t}$ بدست می‌آید.



در صورتیکه به جای فنر، جرم m_0 در $x=a$ قرار گیرد.

نیروی اعمال شده توسط جرم m_0 بر روی تیر همان نیروی اینرسی آن بوده و برابر است با:

$$F(a,t) = -m_0 \ddot{w}(a,t) = -m_0 \sum_j \phi_j(a)\ddot{q}_j(t) \quad (8)$$

از جایگذاری این نیرو در رابطه (5) و ساده کردن:

$$\bar{q}_i = \frac{1}{m_i(\omega_i^2-\omega^2)}\left[\omega^2 m_0 \phi_i(a)\sum_j \phi_j(a)\bar{q}_j\right]$$

مثال: در صورتیکه جرم m_0 را در $a = l/3$ قرار دهیم و تنها از یک مود استفاده کنیم، از معادله قبل خواهیم داشت:

$$\bar{q}_1 = \frac{1}{m_1(\omega_1^2 - \omega^2)}\left[\omega^2 m_0 \phi_1(\tfrac{l}{3})\left(\phi_1(\tfrac{l}{3})\bar{q}_1\right)\right]$$

$$\Rightarrow m_1(\omega_1^2 - \omega^2) = \omega^2 m_0 \phi_1^2(l/3) \rightarrow m_1\omega_1^2 = \left(m_1 + m_0\phi_1^2(\tfrac{l}{3})\right)\omega^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m_1}\phi_1^2(l/3)} \quad *$$

در صورتیکه تیر با یک قید را در نظر بگیریم، مود اول آن عبارت است از:

$$\omega_1 = \pi^2\sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad , \quad \phi_1(x) = \sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi x}{l} \quad , \quad m_1 = m \quad \text{جرم تیر}$$

$$\Rightarrow \phi_1(l/3) = \sqrt{2}\,\mathrm{Sin}\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{1.5}$$

از جایگذاری در * خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{m_0}{m}(\sqrt{1.5})^2} = \frac{1}{1 + 1.5\frac{m_0}{m}}$$

در صورتیکه از دو مود استفاده کنیم:

$$\bar{q}_i = \frac{1}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)}\left[\omega^2 m \phi_i(a)\sum_{j=1}^{2}\bar{q}_j\phi_j(a)\right]$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \bar{q}_1 m_1(\omega_1^2 - \omega^2) = \omega^2 m_0 \phi_1(a)\left(\phi_1(a)\bar{q}_1 + \phi_2(a)\bar{q}_2\right) \\ \bar{q}_2\, m_2(\omega_2^2 - \omega^2) = \omega^2 m_0 \phi_2(a)\left(\phi_1(a)\bar{q}_1 + \phi_2(a)\bar{q}_2\right) \end{cases}$$

و یا:

$$\begin{cases} \left[m_1\omega_1^2 - (m_1 + m_0\phi_1^2(a))\omega^2\right]\bar{q}_1 - m_0\omega^2\phi_1(a)\phi_2(a)\bar{q}_2 = 0 \\ -m_0\omega^2\phi_1(a)\phi_2(a)\bar{q}_1 + \left[m_2\omega_2^2 - (m_2 + m_0\phi_2^2(a))\omega^2\right]\bar{q}_2 = 0 \end{cases}$$

از برابر صفر قرار دادن دترمینان ضرائب فرکانس های طبیعی اول و دوم سازه با قید بدست می آید. همچنین شکل مود اول و دوم آن از قرار دادن شکل مود اول و دوم در

$$w = \sum_{i=1}^{2} \phi_i(x)\, q_i$$

بدست می آیند.

روند فوق را می توان برای حالاتی که چندین فنر یا جرم در جاهای گوناگون سازه قرار گرفته اند نیز گسترش داد.