روش جمع مودی برای سیستم‌های پیچیده را می‌توانیم از معادلات لاگرانژ نیز با $\infty \to n$ حالت آوریم. در صورتیکه دوباره پاسخ سیستم را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\, q_i(t)$$

در روش لاگرانژ نیاز به محاسبه انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و کار نیروهای خارجی است.

انرژی جنبشی عبارت است از:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^l m(x)\,\dot{w}^2(x,t)\,dx=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j \dot{q}_i\dot{q}_j\int_0^l m(x)\,\phi_i\,\phi_j\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n m_n\,\dot{q}_n^2$$

Generalized mass

که جرم عمومی برابر است با:

$$m_n=\int_0^l m(x)\,\phi_n^2(x)\,dx$$

در اینجا از خاصیت متعامد بودن شکل مودی استفاده شده است.

همچنین به ترتیب انرژی پتانسیل عبارت است از:

$$U=\frac{1}{2}\int_0^l EI\,w''(x,t)\,dx=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j q_i q_j\int_0^l EI\,\phi_i''\,\phi_j''\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\sum_n k_n\,q_n^2$$

Generalized Stiffness

که سختی عمومی برابر است با:

$$k_n=\int_0^l EI\left(\phi_n''(x)\right)^2 dx$$

همچنین نیروی عمومی Q_i از کار انجام شده توسط نیروی اعمالی $p(x,t)$ در جابجایی مجازی δW بدست می‌آید که عبارت است از:

$$\delta W = \int_0^l p(x,t)\,\delta w\,dx$$

$$= \int_0^l p(x,t)\left(\sum_n \phi_n\,\delta q_n\right)dx$$

$$= \sum_n \delta q_n \int_0^l p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

$$= \sum_n Q_n\,\delta q_n$$

که نیروی عمومی عبارت است از:

$$Q_n = \int_0^l p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

با جایگذاری در معادله لاگرانژ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_n} + \frac{\partial V}{\partial q_n} = Q_n \quad , \; n=1,2,\ldots$$

مشتقات عبارتند از:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n} = m_n \dot{q}_n \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}\right) = m_n \ddot{q}_n$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_n} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = k_n q_n$$

بنابراین

$$m_n \ddot{q}_n + k_n q_n = Q_n \qquad n=1,2,\ldots$$

و یا:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{m_n}\int_0^l p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

که همان رابطه‌ای است که قبلاً بدست آمد.

در صورتیکه سیستم تحت اثر گشتاور خارجی $M(x,t)$ قرار گیرد: نیروی عمومی عبارت است از:

$$Q_i = \int_0^l M(x,t)\,\phi_n'(x)\,dx$$

ارتعاشات اجباری سیستم‌های پیوسته

همانطور که در جلسه قبل دیده شد، پاسخ یک سیستم پیوسته به ارتعاشات اجباری ناشی از نیروی تحریک $p(x,t)$ بصورت زیر بدست آمد:

$$\ddot{q}_n(t)+\omega_i^2 q_n(t)=\frac{1}{m_n}\int_0^l p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

پس از تعیین q_n ها از قرار دادن در رابطه

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\,q_n(t)$$

پاسخ سیستم بدست می‌آید. در این روابط: ω_n ها فرکانس طبیعی سیستم و ϕ_n شکل مودهای ارتعاشات آزاد سیستم قابل محاسبه است.

آنچه برای محاسبه q_n ها در معادله دیفرانسیل بالا نیاز به شرایط اولیه آنها $q_n(0),\dot{q}_n(0)$ می‌باشد در حالیکه شرایط اولیه برای W موجود است. مثلاً اگر

$$W(x,0)=\sum_i \phi_i(x)\,q_i(0)=f(x)$$

با استفاده از ضرب دو طرف رابطه در $m(x)\,\phi_j(x)$ و انتگرال گیری بر روی طول تیر

$$\sum_i\int_0^l m(x)\,\phi_i\,\phi_j\,q_i(0)\,dx=\int_0^l m(x)\,\phi_j\,f(x)\,dx$$

تمام عبارات سمت چپ صفر هستند بجز حالتیکه $i=j=n$

$$\underbrace{\left(\int_0^l m\,\phi_n^2\,dx\right)}_{m_n} q_n(0)=\int_0^l m\,\phi_n\,f(x)\,dx$$

بنابراین:

$$q_n(0)=\frac{1}{m_n}\int_0^l m(x)\,\phi_n(x)\,f(x)\,dx \qquad n=1,2,\dots$$

به همین ترتیب می‌توان $\dot{q}_n(0)$ را نیز محاسبه نمود.

در صورتیکه توزیع بار $p(x,t)$ (بار بر واحد طول است) بصورت تابعی جدا پذیر باشد، یعنی:

$$p(x,t) = \frac{P_0}{l}\, p(x) \cdot f(t)$$

در اینصورت معادلات مودال عبارتند از:

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{m_n}\int_0^l p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx \qquad *$$

$$= \frac{1}{m_n}\int_0^l \frac{P_0}{l}\, p(x) f(t)\, \phi_n(x)\,dx$$

$$= \frac{P_0}{m_n} f(t)\, \frac{1}{l}\int_0^l p(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

$$= \frac{P_0}{m_n}\,\Gamma_n\, f(t)$$

که در آن:

$$\Gamma_n = \frac{1}{l}\int_0^l p(x)\,\phi_n(x)\,dx$$

بنام ضریب مشارکت مود nام نامیده می‌شود.

پاسخ معادله * عبارت است از:

$$q_n(t) = q_n(0)\cos\omega_n t + \frac{1}{\omega_n}\dot{q}_n(0)\sin\omega_n t$$

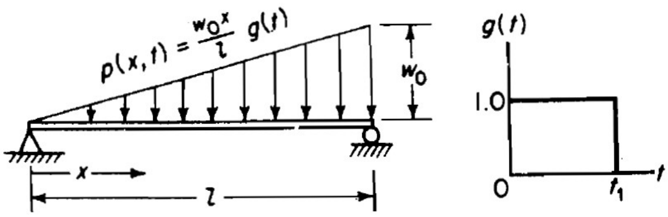
$$+ \left(\frac{P_0\,\Gamma_n}{m_n\,\omega_n^2}\right)\omega_n \int_0^t f(\xi)\,\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

که جمله آخر انتگرال کانولوشن می‌باشد. در این رابطه

$$D_n(t) = \omega_n \int_0^t f(\xi)\,\sin\omega_n(t-\xi)\,d\xi$$

بنام ضریب بار دینامیکی مود nام (Dynamic load factor) خوانده می‌شود.

مثال: یک تیر دوسر مفصل به جرم M_0 تحت اثر نیروی نشان داده شده به صورتی که نشان داده شده است قرار می‌گیرد. مطلوبست پاسخ سیستم با شرایط اولیه صفر.



درصدد تشکیل پاسخ را به فرم زیر در نظر بگیریم:

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\,q_n(t)$$

که ϕ_n مودهای نرمال و ω_n فرکانس‌های طبیعی تیر دو سر مفصل است

$$\omega_n=(n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}=(n\pi)^2\sqrt{\frac{EI}{M_0 l^3}}$$

$$\phi_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

برای تعیین A_n از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^l m(x)\,\phi_n^2(x)\,dx=M_0$$

$$\Rightarrow\int_0^l m\left(A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=A_n^2\,m\frac{l}{2}=M_0$$

$$\Rightarrow A_n^2\,\frac{\cancel{M_0}}{2}=\cancel{M_0}\quad\Rightarrow A_n=\sqrt{2}\Rightarrow\phi_n(x)=\sqrt{2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

جرم مودال نیز:

$$m_n=\int_0^l\left(\frac{M_0}{l}\right)\left(\sqrt{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=M_0$$

از قرار دادن در معادله مودال

$$\ddot{q}_n+\omega_n^2q_n=\frac{1}{m_n}\int_0^l p(x,t)\,\phi_n(x)\,dx$$

نیروی عمومی (مودال) عبارت است از:

$$\int_0^l p(x,t)\cdot\phi_n(x)\,dx=g(t)\int_0^l\left(\frac{W_0x}{l}\right)\left(\sqrt{2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از رابطه بالا:

$$F_n = \frac{w_0\sqrt{2}}{l} g(t) \left[\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{(\frac{n\pi}{l})^2} - \frac{x\cos\frac{n\pi x}{l}}{(\frac{n\pi}{l})} \right]_0^l$$

$$= \frac{w_0\sqrt{2}}{l} g(t) \left[\frac{\sin n\pi}{(\frac{n\pi}{l})^2} - \frac{l\cos n\pi}{(\frac{n\pi}{l})} \right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2}\, w_0 l}{n\pi} \cos n\pi \; g(t)$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\, l w_0}{n\pi} (-1)^n g(t)$$

g(t) تابع پله زمانی می باشد. از قرار دادن نیروی مودال در معادلات مودال،

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{-\sqrt{2}\, l w_0}{n\pi M_0} (-1)^n g(t)$$

که جواب پایدار آن پس از قرار دادن در انتگرال کانولوشن عبارت است از:

$0 < t \le t_1$:

$$q_n(t) = \frac{-\sqrt{2}\, l w_0}{n\pi M_0} \frac{(-1)^n}{\omega_n^2} (1-\cos\omega_n t)$$

$t > t_1$:

$$q_n(t) = \frac{-\sqrt{2}\, l w_0}{n\pi M_0} \frac{(-1)^n}{\omega_n^2} (1-\cos\omega_n t) + \frac{\sqrt{2}\, l w_0}{n\pi M_0} \frac{(-1)^n}{\omega_n^2} \left(1-\cos\omega_n (t-t_1)\right)$$

خیز تیر برابر است با:

$$W(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \sin\frac{n\pi x}{l} \, q_n(t)$$

شرایطِ محدود بودن برای سیستم‌های پیوسته به مانند تیر به دست می‌آید. مثلاً برای میله با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل حرکت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad , \quad c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

با در نظر گرفتن پاسخ به فرم $u=\phi T$ و همچنین هارمونیک بودن T و قرار دادن در معادله دیفرانسیل:

$$\phi'' \cancel{T} = \frac{1}{c^2}\left(-\omega^2 \phi \cancel{T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \phi'' = -\frac{\omega^2}{c^2}\phi = \lambda \phi$$

با در نظر گرفتن دو مود متفاوت i و j:

$$\phi_i'' = \lambda_i \phi_i \qquad \phi_j'' = \lambda_j \phi_j$$

از ضرب دو طرف روابط بالا به ترتیب در ϕ_j و ϕ_i و انتگرال گیری در راستای طول میله:

$$\int_0^l \phi_i'' \phi_j \, dx = \lambda_i \int_0^l \phi_i \phi_j \, dx$$

$$\int_0^l \phi_j'' \phi_i \, dx = \lambda_j \int_0^l \phi_i \phi_j \, dx \qquad *$$

از انتگرال گیری جزء به جزء سمت چپ این روابط، مثلاً اولی:

$$\int_0^l \phi_i'' \phi_j \, dx = \phi_i' \phi_j \Big|_0^l - \int_0^l \phi_i' \phi_j' \, dx$$

اگر شرایط مرزی، متعارف باشد، جمله اول سمت راست صفر می‌گردد. مثلاً در صورتیکه شرایط انتهای گیردار باشد، جابجایی صفر می‌شود و اگر انتها آزاد باشد، شیب آن صفر می‌شود.

بنابراین:

$$\int_0^l \phi_i'' \phi_j \, dx = -\int_0^l \phi_i' \phi_j' \, dx$$

$$\int_0^l \phi_i \phi_j'' \, dx = -\int_0^l \phi_i' \phi_j' \, dx$$

بنابراین سمت چپ دو رابطه * باهم برابرند. از کم کردن این دو رابطه از هم :

$$(\lambda_i - \lambda_j)\int_0^l \phi_i \phi_j \, dx = 0$$

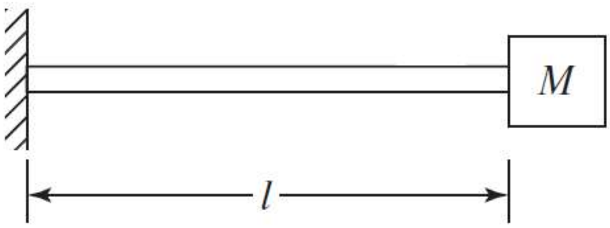
برای دو شکل مود متفاوت تعداد درون پرانتز صفر نشده و بنابراین :

$$\int_0^l \phi_i \phi_j \, dx = 0 \qquad i \neq j$$

از قرار دادن در * ، به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\int_0^l \phi_i' \phi_j' \, dx = \int_0^l \phi_i'' \phi_j \, dx = 0 \qquad i \neq j$$

همانند تیر با شرایط تکیه‌گاهی متعارف، برای حالات غیر متعارف نیز می‌توان روابط تعامد بودن را بدست آورد. مثلاً فرض کنید که تیرِ یک سر گیردار مطابق شکل روبرو که در سر دیگر آن جرمی قرار دارد، داریم. از نوشتن معادله دیفرانسیل تعادل با در نظر گرفتن پاسخ هارمونیک برای تابع زمانی:



$$EI\frac{d^4\phi}{dx^4}=\omega^2 m\phi \qquad (1)$$

شرایط مرزی نیز عبارتند از:

$$x=0 \qquad \phi=0 \quad , \quad \frac{d\phi}{dx}=0$$

$$x=l \qquad EI\frac{d^2\phi}{dx^2}=0 \quad , \quad -EI\frac{d^3\phi}{dx^3}=\omega^2 M\phi \qquad (2)$$

اگر دو مقدار متفاوتِ شکل مود در رابطه (۱) را در نظر بگیریم، می‌توان نوشت:

$$EI\frac{d^4\phi_i}{dx^4}=\omega_i^2 m\phi_i$$

$$(3)$$

$$EI\frac{d^4\phi_j}{dx^4}=\omega_j^2 m\phi_j$$

از ضرب معادله اول در ϕ_j و انتگرال گیری در طول تیر:

$$\int_0^l EI\phi_j\frac{d^4\phi_i}{dx^4}dx=\omega_i^2\int_0^l m\phi_j\phi_i dx \qquad (4)$$

شکل گذشته با دو بار انتگرال گیری جزء به جزء از سمت چپ:

$$\int_0^l EI\phi_j\frac{d^4\phi_i}{dx^4}dx=\left[EI\phi_j\frac{d^3\phi_i}{dx^3}\right]_0^l-\left[EI\frac{d\phi_j}{dx}\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\right]_0^l$$

$$+\int_0^l EI\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx$$

با توجه به شرط اول و دوم (۲) مقادیر درون رابطه بالا در مرز $x=0$ صفر می‌گردند. جمله دوم در حالت نیز با توجه به شرط سوم صفر می‌شود. در نتیجه:

$$\int_0^l EI\,\phi_j \frac{d^4\phi_i}{dx^4}\,dx = -\omega_i^2 M\,\phi_j(l)\,\phi_i(l) + \int_0^l EI\,\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\cdot\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\,dx \qquad (5)$$

از جایگذاری در (4) :

$$\int_0^l EI\,\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\,\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\,dx = \omega_i^2\left[\int_0^l m\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M\,\phi_i(l)\,\phi_j(l)\right] \qquad (6)$$

به همین ترتیب از ضرب ϕ_i در معادله دوم (3) و انتگرال گیری بر روی طول تیر و طی همان روند:

$$\int_0^l EI\,\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\,\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\,dx = \omega_j^2\left[\int_0^l m\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M\,\phi_i(l)\,\phi_j(l)\right] \qquad (7)$$

دیده می‌شود که سمت چپ روابط (6) و (7) یکی است. از کم کردن آنها از هم:

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\left[\int_0^l m\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M\,\phi_i(l)\,\phi_j(l)\right] = 0 \qquad (8)$$

برای $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ خواهیم داشت:

$$\int_0^l m\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M\,\phi_i(l)\,\phi_j(l) = 0 \qquad i\neq j \qquad (9)$$

این رابطه شرط عمود بودن را برای تیر یک سر گیردار که در سر دیگر آن جرم متمرکز M قرار دارد می‌دهد.

در صورتیکه شکل مود نرمال را نیز بخواهیم، می‌توان مثلاً از شرط زیر استفاده کرد:

$$\int_0^l m\,\phi_n^2\,dx + M\,\phi_n^2(l) = 1 \qquad n=1,2,\dots \qquad (10)$$

در این صورت شکل مودها در رابطه زیر صادق هستند:

$$\int_0^l m\,\phi_i\,\phi_j\,dx + M\,\phi_i(l)\,\phi_j(l) = \delta_{ij} \qquad i,j=1,2,\dots \qquad (11)$$

حال اگر جمله $\omega_i^2 M\,\phi_i(l)\,\phi_j(l)$ را به دو طرف رابطه (4) اضافه کنیم و از شرط مرزی نیروی برشی در انتهای تیر نیز استفاده کنیم.

$$\int_0^l EI\phi_i \frac{d^4\phi_j}{dx^4}dx + \omega_i^2 M \phi_i(l)\phi_j(l)$$

$$= \int_0^l EI \phi_i \frac{d^4\phi_j}{dx^4}dx - \left[\phi_i \left(EI \frac{d^3\phi_j}{dx^3}\right)\right]_{x=l}$$

$$= \omega_i^2 \overbrace{\left[\int_0^l m\phi_i\phi_j dx + M\phi_i(l)\phi_j(l)\right]}^{\delta_{ij}}$$

بنابراین شکل مودهای نرمال رابطه ارتوگونالیتی زیر را نیز ارضا می‌کنند :

$$\int_0^l EI\phi_i \frac{d^4\phi_j}{dx^4}dx - \left(\phi_i\left(EI\frac{d^3\phi_j}{dx^3}\right)\right)_{x=l} = \omega_i^2\delta_{ij} \qquad (12)$$

همچنین از (۶) می‌توان رابطه ارتوگونالیتی دیگری را نیز به دست آورد:

$$\int_0^l EI \frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx = \omega_i^2\delta_{ij}$$