Forced Vibrations of Contineous Systems ارتعاشات اجباری سیستمهای ممتد

در این بخش به دنبال بررسی ارتعاشات اجباری سیستمهای ممتد هستیم. برای این کار از روش تحلیل مودال استفاده خواهیم کرد

در سیستمهای چند درجه آزادی برای این کار از خاصیت ارتوگونالیتی شکل مودها استفاده میکردیم.

در اینجا نیز برای سیستمهای مختلف این رابطه را بدست خواهیم آورد.

برای بررسی این روش ابتدا تیر را در نظر گرفته و بررسی میکنیم. برای تیر اویلر-برنولی معادله دیفرانسیل حرکت بصورت زیر برای ارتعاشات آزاد نوشته شد.

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

دیدیم که پاسخ بصورت حاصلضرب تابع زمانی در تابع مکانی نوشته شد.

$$w(x,t)=\phi(x)T(t)$$

با توجه به هارمونیک بودن پاسخ زمانی، از قرار دادن رابطه بالا در معادله حرکت:

$$EI\frac{d^4\phi}{dx^4}T-\omega^2 m\phi T=0 \qquad m=\rho A \text{ جرم واحد طول}$$

$$\Rightarrow EI\frac{d^4\phi}{dx^4}-m\omega^2\phi=0$$

این رابطه برای تمامی مودها برقرار است. درصورتی که آن را برای دو مود i و j بنویسیم:

$$EI\frac{d^4\phi_i}{dx^4}-m\omega_i^2\phi_i=0 \qquad (1)$$

$$EI\frac{d^4\phi_j}{dx^4}-m\omega_j^2\phi_j=0 \qquad (2)$$

از ضرب کردن معادله اول در ϕ_j و انتگرال گیری در طول تیر خواهیم داشت:

$$\int_0^l \left(EI \frac{d^4\phi_i}{dx^4}\phi_j - m\omega_i^2 \phi_i \phi_j \right) dx = 0$$

از انتگرال گیری جزء به جزء جمله اول:

$$EI \frac{d^3\phi_i}{dx^3}\phi_j \Big|_0^l + \int_0^l \left(-EI \frac{d^3\phi_i}{dx^3}\frac{d\phi_j}{dx} - m\omega_i^2 \phi_i \phi_j \right) dx = 0$$

با انتگرال گیری جزء به جزء مجدد:

$$EI \frac{d^3\phi_i}{dx^3}\phi_j \Big|_0^l - EI \frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d\phi_j}{dx}\Big|_0^l + \int_0^l \left(EI \frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2} - m\omega_i^2 \phi_i \phi_j \right) dx = 0$$

برای تیرهایی با شرایط مرزی متعارف مثل تیرهای با تکیه‌گاه مفصلی، گیردار و آزاد، جملات مرزی بالا صفر هستند. این شرایط:

$x = 0, l$:

$\phi = 0$ یا $\frac{d^3\phi}{dx^3} = 0$, $\frac{d\phi}{dx} = 0$ یا $\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$

مثلاً در تکیه‌گاه آزاد لنگر خمشی و نیروی برشی صفر است.

بنابراین جملات مرزی رابطه بالا حذف شده و خواهیم داشت:

$$\int_0^l \left(EI \frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2} - m\omega_i^2 \phi_i \phi_j \right) dx = 0 \qquad (3)$$

و یا:

$$\int_0^l EI \frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx = \omega_i^2 \int_0^l m \phi_i \phi_j dx \qquad (4)$$

در صورتیکه در رابطه (2) آن را در ϕ_i ضرب کرده و همین پروسه را تکرار کرد:

$$\int_0^l EI \frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2} dx = \omega_j^2 \int_0^l m \phi_i \phi_j dx \qquad (5)$$

از کم کردن (5) از (4)، با توجه به آنکه سمت چپ هر دو یکی است، خواهیم داشت:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^l m \phi_i \phi_j dx = 0 \qquad (6)$$

در صورتیکه $\omega_i \neq \omega_j$ باشد، انتگرال مربوطه صفر گردد:

$$\int_0^l m\,\phi_i\,\phi_j\,dx = 0 \quad i \neq j \qquad \text{Mass Orthogonality} \quad (7)$$

این شرایط عمود بودن مودها نسبت به جرم است.

از قرار دادن این رابطه در (4)

$$\int_0^l EI\,\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\,\frac{d^2\phi_j}{dx^2}\,dx = 0 \quad i \neq j \qquad \text{Stiffness Orthogonality} \quad (8)$$

که به نام شرط عمود بودن شکل مودها نسبت به سختی معروف است.

این رابطه را با دو بار انتگرال گیری جزء به جزء می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$\int EI\,\frac{d^4\phi_i}{dx^4}\,\phi_j\,dx = 0 \qquad (9)$$

بنابراین دیده می‌گردد که توانستیم یک رابطه عمود بودن برای شکل مودها بیابیم. مشابه چنین رابطه‌ای را می‌توان برای تیرهای دیگر و یا سیستم‌های پیوسته دیگر بدست آورد.

روش جمع مودها برای سیستم‌های پیوسته

با استفاده از خاصیت عمود بودن شکل مودها می‌توان روش جمع مودها (Mode Superposition) را برای ارتعاشات اجباری آنها بنا نهاد. مانند حالت سیستم‌های چند درجه آزادی در اینجا هم می‌توان پاسخ را به صورت ترکیبی خطی از شکل مودها انتخاب کرد.

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x)\,q_i(t) \qquad (10)$$

که ϕ_i شکل مودها بوده و $q_i(t)$ مختصات عمومی و یا مختصات نرمال هستند. در سیستم‌های ممتد تعداد مودها بی‌نهایت است.

در صورتیکه ارتعاشات اجباری تیر در نظر گرفته شود:

$$EI\,\frac{d^4 w}{dx^4} + m\,\frac{d^2 w}{dt^2} = p(x,t) \qquad (11)$$

از قرار دادن (۱۰) در (۱۱)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(m\phi_i\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4\phi_i}{\partial x^4}q_i\right)=p(x,t)$$

از ضرب دو طرف رابطه در ϕ_j و انتگرال گیری بر روی طول تیر:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^l\left(m\phi_i\phi_j\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4\phi_i}{\partial x^4}\phi_j q_i\right)dx=\int_0^l\phi_i\,p(x,t)\,dx$$

از روابط عمود بودن جملات اول و دوم انتگرال بالا صفر هستند، الا در حالتی که $i=j=n$ باشد که نتیجه معادلات غیر مرتبط مودال می‌شوند:

$$\int_0^l\left(m\phi_n^2\frac{d^2 q_n}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4\phi_n}{\partial x^4}\phi_n q_n\right)dx=\int_0^l\phi_n\,p(x,t)\,dx\qquad n=1,2,\ldots$$

این معادلات را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$m_n=\int_0^l m\phi_n^2(x)\,dx\qquad \text{modal mass}$$

$$k_n=\int_0^l EI\frac{\partial^4\phi_n}{\partial x^4}\phi_n\,dx=\int_0 EI\left(\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^2}\right)^2dx\qquad \text{modal stiffness}$$

$$F_n(t)=\int_0^l\phi_n(x)\,p(x,t)\,dx\qquad \text{modal Load}$$

در نتیجه:

$$m_n\ddot{q}_n+k_n q_n=F_n\qquad n=1,2,\ldots$$

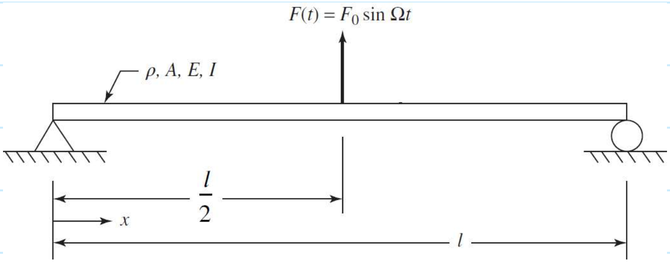
دیده می‌شود که در اینجا بی‌نهایت معادله مودال غیر مرتبط داریم که هر معادله یک درجه آزادی ظاهر می‌گردد. با توجه به: $\omega_n^2=\dfrac{k_n}{m_n}$

$$\ddot{q}_n+\omega_n^2 q_n=\frac{1}{m_n}F_n\qquad n=1,2,\ldots$$

با استفاده از روش‌های حل معادلات تک درجه آزادی می‌توان پاسخ $q_n(t)$ را بدست آورده و سپس پاسخ سیستم را بصورت زیر نوشت:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\,q_n(t)$$

مثال: فرض کنید که تیر دو سر مفصل شکل زیر تحت اثر نیروی هارمونیک که در شکل نشان داده شده قرار گرفته است. به دنبال پاسخ آن هستیم



از ارتعاشات آزاد تیر دو سر مفصل به یاد داریم که:

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad \text{و} \quad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \quad , \; n = 1, 2, \ldots$$

حال پارامترهای مودال شامل جرم، سختی و نیروی مودال را محاسبه می‌کنیم:

$$m_n = \int_0^l m\,\phi_n^2\,dx = \int_0^l m \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx = \int_0^l m\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx$$

$$= \int_0^l \frac{m}{2}\,dx - \int_0^l \frac{m}{2}\cos\frac{2n\pi x}{l}\,dx = \frac{m}{2}\left[x - \left(\frac{l}{2n\pi}\right)\sin\frac{2n\pi x}{l}\right]_0^l = \frac{ml}{2}$$

$$k_n = \int_0^l EI\left(\frac{\partial^2\phi_n}{\partial x^2}\right)^2 dx = \int_0^l EI\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2 dx = EI\,\frac{n^4\pi^4}{l^4}\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx$$

$$= EI\,\frac{n^4\pi^4}{l^4}\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}EI\,\frac{n^4\pi^4}{l^3}$$

دقت داریم که:

$$\omega_n^2 = \frac{k_n}{m_n} = \frac{\frac{1}{2}EI\,\frac{n^4\pi^4}{l^3}}{\frac{1}{2}ml} = \left(\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)^2\left(\frac{EI}{m}\right)$$

برای محاسبه بار مودال از آنجا که بار خارجی وارده در وسط تیر عمل می‌کند، نمایش آن را به فرم زیر داریم:

$$p(x,t) = p\sin\Omega t\;\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)$$

در نتیجه:

$$F_n = \int_0^l \phi_n(x)\,p(x,t)\,dx = \int_0^l \phi_n(x)\,p\sin\Omega t\;\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)dx$$

$$= p\sin\Omega t\int_0^l \phi_n(x)\,\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)dx = p\sin\Omega t\;\phi_n\left(\frac{l}{2}\right)$$

در اینجا از خاصیت انتگرال حاصل‌ضرب تابع دلخواه در تابع دلتای دیراک استفاده کرده ایم.

همچنین

$$F_n = p \sin \Omega t \cdot \sin \frac{n\pi \, l/2}{l} = p \sin \Omega t \sin \frac{n\pi}{2}$$

بنابراین معادلات غیرمرتبط مودال عبارتند از:

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{m_n} F_n(t)$$

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{2}{lm} p \sin \frac{n\pi}{2} \sin \Omega t \qquad n = 1, 2, \dots$$

با توجه به آنکه بسته به مقدار n مقدار $\sin \frac{n\pi}{2}$ می‌تواند یکی از مقادیر ۰، ۱ و یا ۱- را داشته باشد، کلاً سه معادله زیر را خواهیم داشت:

$$\ddot{q}_n + EI \frac{n^4\pi^4}{ml^4} q_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{2P}{ml} \sin \Omega t & n = 1, 5, 9, \dots \\ -\frac{2P}{ml} \sin \Omega t & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

دیده می‌شود که در nهای زوج از آنجا که گره در وسط تیر قرار می‌گیرد، حضور نیرو در این نقطه اثری بر روی ارتعاش تیر نخواهد داشت و پاسخ پایدار آن صفر است.

از ارتعاشات دوره کارشناسی می‌دانیم که:

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \Rightarrow x(t) = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

از قرار دادن در معادلات بالا:

$$q_n(t) = \frac{2pl^3 \sin \Omega t}{EI n^4\pi^4 - ml^4\Omega^2} \qquad n = 1, 5, 9, \dots$$

$$q_n(t) = -\frac{2pl^3 \sin \Omega t}{EI n^4\pi^4 - ml^4\Omega^2} \qquad n = 3, 7, 11, \dots$$

بنابراین پاسخ سیستم عبارت است از:

$$W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)\,q_n(t)$$

$$=\frac{2pl^3\sin\frac{\pi x}{l}\sin\Omega t}{\pi^4EI-ml^4\Omega^2}-\frac{2pl^3\sin\frac{3\pi x}{l}\sin\Omega t}{81\pi^4EI-ml^4\Omega^2}+\frac{2pl^3\sin\frac{5\pi x}{l}\sin\Omega t}{625\pi^4EI-ml^4\Omega^2}-\cdots$$

دقت کنید که برای شکل مود نرمال از ضریب واحد استفاده شد، در حالت کلی شکل مود نرمال می‌تواند ضریبی به جز واحد داشته باشد. مثلاً در اینجا

$$\phi_n(x)=A_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

مقدار ضریب A_n بستگی به طریقه نرمال کردن دارد

- اگر قرار دهیم

$$\int_0^l\phi_n^2\,dx=1\Rightarrow\int_0^l A_n^2\sin^2\frac{n\pi x}{l}\,dx=1$$

$$\Rightarrow A_n^2\frac{l}{2}=1\Rightarrow \underline{A_n=\sqrt{\frac{2}{l}}}\qquad\Rightarrow\phi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

- اگر قرار دهیم

$$\int_0^l m(x)\,\phi_n^2(x)\,dx=M$$

که $m(x)$ جرم واحد طول و M جرم کل تیر است.

برای تیر یکنواخت:

$$\int_0^l m\left(A_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^2dx=mA_n^2\frac{l}{2}=\frac{(ml)}{2}A_n^2=\frac{M}{2}A_n^2=M$$

$$\Rightarrow \underline{A_n=\sqrt{2}}$$

- اگر قرار دهیم

$$\int_0^l\phi_n^2(x)\,dx=\frac{l}{2}\Rightarrow \underline{A_n=1}$$