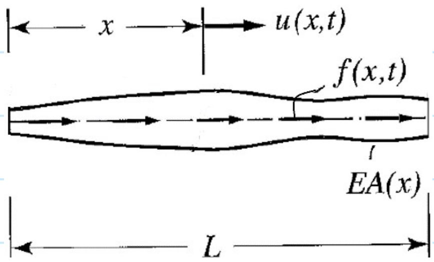
ارتعاشات طولی میله‌ها Longitudinal Vibrations of Rods

میله‌ها نیز مانند تیرها در صنعت کاربرد زیادی دارند پس بررسی ارتعاشات طولی آنها بسیار مهم می‌شوند. به طور کلی هر قطعه‌ای که تحت بار محوری و یا اندکنش بار محوری با سایر نیروها قرار داشته باشد می‌تواند دچار ارتعاشات محوری شود. توربین‌ها، میله‌ها، رشته های حفاری، چرخدنده‌های مخروطی و ... مثالهایی هستند که می توانند تحت ارتعاشات محوری قرار گیرند.

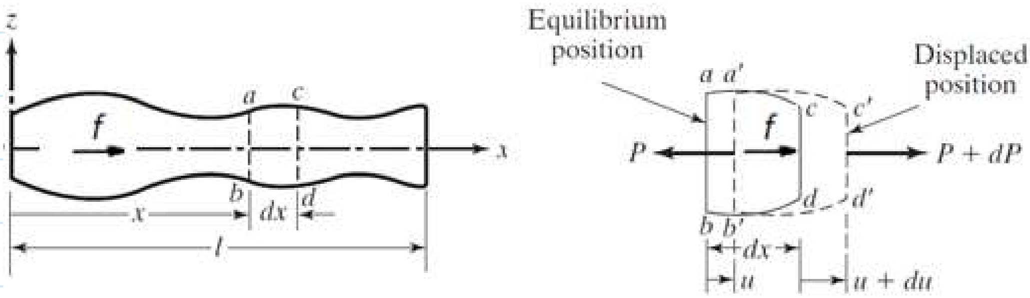
فرض‌ها:

- مقطع در برابر طول خیلی کوچک است.
- در طول ارتعاشات مقاطع به صورت عمود باقی خواهد ماند.
- رفتار میله در محدوده الاستیک است.

میله باریکی را به طول L و جرم مخصوص ρ (x)در نظر بگیرید. فرض می شود که میله تحت اثر نیروی خارجی $f(x,t)$ بر واحد طول قرار دارد. سطح مقطع میله ($A(x)$) می تواند متغیر باشد.



در اثر نیروی محوری موجود در میله، در هر نقطه آن تغییر مکانی خواهیم داشت. اگر المانی به اندازه dx در نظر گرفته و دیاگرام آزاد آن رسم شود، شکل زیر نتیجه می شود که وضعیت تغییر مکان قبل و بعد بارگذاری نشان داده شده است.



فرض می شود ابتدای المان به میزان u جابجا شود. می‌بینیم که جابجایی تابعی از x و t است و چون اینجا بینهایت المان می‌توانیم تعریف کنیم، بی‌نهایت درجه آزادی خواهیم داشت و هر نقطه میله در طول آن جابجایی محوری خواهد داشت.

کرنش برابر است با تغییر طول المان به طول اولیهdx:

$$\varepsilon_x = \frac{\cancel{u} + \frac{\partial u}{\partial x}dx - \cancel{u}}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

با نوشتن قانون دوم نیوتن برای المان داریم:

$$\sum F_x = dma \quad \Rightarrow \sum F_x = dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$(\cancel{P} + \frac{\partial P}{\partial x}dx) - \cancel{P} + f(x,t)dx = dm\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x}dx + f(x,t)dx = \rho A\,dx\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} + f(x,t) = \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

اما P برابر است با:

$$P=\sigma_x A=E\,\varepsilon_x A=EA\frac{\partial u}{\partial x}$$

از قرار دادن P در معادله قبلی، معادله ی دیفرانسیل ارتعاشات اجباری میله بدست می آید:

$$\frac{\partial}{\partial x}(E(x).A(x)\frac{\partial u}{\partial x})+f(x,t)=\rho(x).A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

با فرض ثابت بودن A و E و در صورتیکه ارتعاشات آزاد مد نظر باشد ($f(x,t)=0$):

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad ,c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

توجه شود که ρجرم واحد طول است و c سرعت انتشار موج و واحد آن در سیستم متریک m/s می‌باشد.

حال برای حل این معادله از روش جدا سازی متغیرها استفاده می شود که در آن $u(x,t)=U(x).T(t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{d^2U}{dx^2}\cdot T=U''T$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=U\frac{d^2T}{dt^2}=U\ddot{T}$$

با قرار دادن در معادله دیفرانسیل حرکت:

$$\frac{d^2U}{dx^2}=\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}\quad\Rightarrow T\frac{d^2U}{dx^2}=\frac{1}{c^2}U\frac{d^2T}{dt^2}$$

از تقسیم دو طرف معادله بر UT:

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2}=\frac{1}{T}\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}$$

سمت راست تابعی از متغیر مستقل زمان است و تغییرات آن اثری بر سمت چپ که تابعی از متغیر مستقل مکان می باشد ندارد، بنابراین با توجه به اینکه دو طرف تساوی مستقل از هم هستند برای اینکه تساوی آن‌ها برقرار باشد باید برابر با یک مقدار ثابت باشند.

همچنین برای اینکه حرکت تکرار شونده باشد آن مقدار ثابت باید منفی باشد. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dx^2}=\frac{1}{T}\frac{1}{c^2}\frac{d^2T}{dt^2}=-\frac{\omega^2}{c^2}$$

از اینجا دو معادله دیفرانسیل مرتبه دو، یکی بر حسب مکان و دیگری بر حسب زمان بدست می آید:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{U}\dfrac{d^2U}{dx^2}=-\dfrac{\omega^2}{c^2}\\[2mm]\dfrac{1}{T}\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2T}{dt^2}=-\dfrac{\omega^2}{c^2}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2U}{dx^2}+\dfrac{\omega^2}{c^2}U=0 \\ \dfrac{d^2T}{dt^2}+\omega^2 T=0 \end{cases}$$

پاسخ این معادلات عبارت است از:

$$\begin{cases} U(x)=B_1\cos(\dfrac{\omega}{c}x)+B_2\sin(\dfrac{\omega}{c}x) \\ T(t)=C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t) \end{cases}$$

مسئله اول دارای دو شرط مرزی در دو انتهای میله است. مسئله دوم نیز دارای دو شرط اولیه در زمان صفر می باشد.

شرایط مرزی به دو دسته تقسیم می شوند:

1. شرایط مرزی سینماتیکی (Drichlet, Kinematic, Geometric B.C)
2. شرایط مرزی نیرویی (Force, Dynamic, Kinetic B.C)

این شرایط به صورت شرایط متعارف و غیر متعارف مطرح می شوند. شکل بعدی این شرایط را برای دو طرف میله نشان می دهد:

Boundary condition	At left end ($x = 0$)	At right end ($x = l$)
Fixed end	$x = 0$; $u(0, t) = 0$	$x = l$; $u(l, t) = 0$
Free end	$x = 0$; $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$	$x = l$; $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$
End spring (spring constant = $\underset{\sim}{k}$)	k; $x = 0$; $AE\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \underset{\sim}{k}u(0, t)$	k; $x = l$; $AE\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\underset{\sim}{k}u(l, t)$
End damper (damping constant = $\underset{\sim}{c}$)	c; $x = 0$; $AE\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \underset{\sim}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(0, t)$	c; $x = l$; $AE\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\underset{\sim}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(l, t)$
End mass (mass = $\underset{\sim}{m}$)	m; $x = 0$; $AE\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \underset{\sim}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t)$	m; $x = l$; $AE\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\underset{\sim}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l, t)$

مثلاً در صورتیکه میله ای دو سر آزاد در نظر گرفته شود، در این صورت تنش در دو انتها صفر بوده و:

$$\sigma_x(0,t)=\sigma_x(\ell,t)=0 \quad \Rightarrow AE\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=0$$

در این حالت:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{dU}{dx}T=0 \quad \Rightarrow \frac{dU}{dx}$$

مشتق U عبارت است از:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{\omega}{c}B_1\sin(\frac{\omega}{c}x)+\frac{\omega}{c}B_2\cos(\frac{\omega}{c}x)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق در معادله :

$$\frac{\partial U(0)}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow -\frac{\omega}{c}B_1 \cancelto{0}{\sin(0)}+\frac{\omega}{c}B_2 \cancelto{1}{\cos(0)}=0 \quad \Rightarrow B_2=0$$

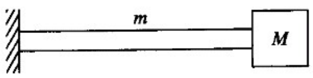
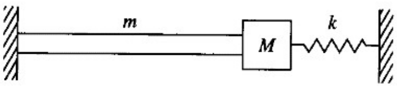
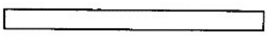
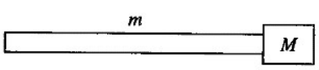
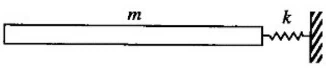
$$\frac{\partial U(\ell)}{\partial x}=0 \quad \Rightarrow -\frac{\omega}{c}B_1 \sin(\frac{\omega}{c}\ell)=0 \quad \Rightarrow \sin(\frac{\omega}{c}\ell)=0=\sin(n\pi) \quad ,n=1,\infty$$

بنابراین فرکانس طبیعی ارتعاشات میله دو سر آزاد برابر است با:

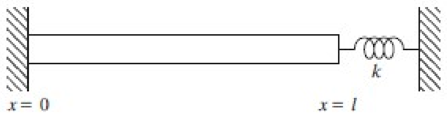
$$\omega_n=\frac{n\pi c}{\ell}$$

پاسخ های شکل مود را نمی‌توان براحتی نشان داد چون ارتعاشات در راستای طولی است و هر نقطه در راستای محور جلو و عقب می‌رود.

در جدول شکل بعد مقادیر شرایط مرزی، معادله فرکانسی، شکل مود و فرکانسهای طبیعی برای میله ای با انواع مختلف شرایط مرزی ارائه شده است:

End conditions of the bar	Boundary conditions	Frequency equation	Mode shapes (normal functions)	Natural frequencies of vibration
1. Fixed–free 	$u(0,t)=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$	$\cos\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=$ $C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$, $n=0,1,2,\ldots$
2. Fixed–fixed 	$u(0,t)=0$ $u(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=$ $C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
3. Fixed–attached mass 	$u(0,t)=0$ $EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=$ $-M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t)$	$\alpha\tan\alpha=\beta$ $\alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\beta=\frac{m}{M}$	$U_n(x)=$ $C_n\sin\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
4. Fixed–attached spring 	$u(0,t)=0$ $EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=$ $-ku(l,t)$	$\alpha\tan\alpha=-\gamma$ $\alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\gamma=\frac{m\omega^2}{k}$	$U_n(x)=$ $C_n\sin\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
5. Fixed–attached spring and mass 	$u(0,t)=0$ $EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=$ $-M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t)$ $-ku(l,t)$	$\alpha\cot\alpha=$ $\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{k}{k_0}$ $\beta=\frac{m}{M}$ $k_0=\frac{AE}{l}$	$U_n(x)=$ $C_n\sin\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
6. Free–free 	$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ $\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$U_n(x)=$ $C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$, $n=0,1,2,\ldots$
7. Free–attached mass 	$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ $EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=$ $-M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(l,t)$	$\tan\alpha=-\alpha\beta$	$U_n(x)=$ $C_n\cos\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
8. Free–attached spring 	$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=0$ $EA\frac{\partial u}{\partial x}(l,t)=$ $-ku(l,t)$	$\alpha\cot\alpha=\delta$ $\delta=\frac{AE}{lk}$	$U_n(x)=$ $C_n\cos\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$

مثال:



درصورتیکه معادله دیفرانسیل حرکت از روش جداسازی متغیرها حل گردد:

$$u(x,t)=U(x)T(t)=(B_1\cos(\frac{\omega}{c}x)+B_2\sin(\frac{\omega}{c}x)).(C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t))$$

از قرار دادن شرایط مرزی در معادله U:

$$x=0 \quad \Rightarrow u(0,t)=0 \quad \Rightarrow U(0)=0$$
$$\Rightarrow U(0)=B_1\underbrace{\cos(0)}_{1}+B_2\underbrace{\sin(0)}_{0} \quad \Rightarrow B_1=0$$

در انتهای میله جابجایی مثبت میله باعث فشرده شدن فنر شده و از طرف فنر نیروی برگشت دهنده $k.u$ که فشاری است به میله اعمال می شود (در میله تنش فشاری منفی و تنش کششی مثبت است). بنابراین نیرو در انتها:

$$x=\ell \quad \Rightarrow EA\frac{\partial u}{\partial x}(\ell,t)=-ku(\ell,t)$$

اما $u(x,t)=U(x).T(t)$، در نتیجه:

$$EA\frac{\omega}{c}T(t).B_2.\cos(\frac{\omega}{c}\ell)=-k\,T(t).B_2.\sin(\frac{\omega}{c}\ell) \quad \Rightarrow EA\frac{\omega}{c}\cos(\frac{\omega}{c}\ell)=-k\sin(\frac{\omega}{c}\ell)$$

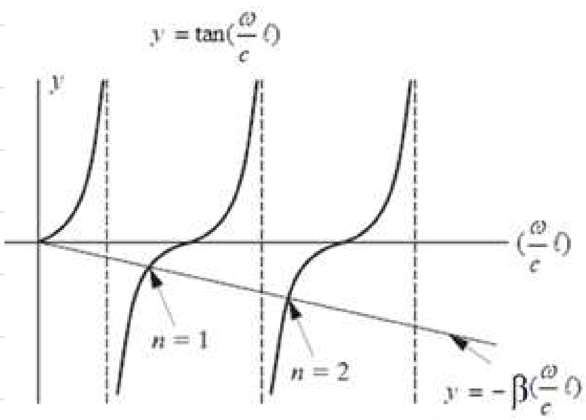
و در نهایت:

$$\tan(\frac{\omega}{c}\ell)=-\frac{EA}{k\ell}\frac{\omega}{c}\ell$$

معادله فرکانسی فوق به روش عددی حل می شود. برای حل دو معادله زیر حل شده وتقاطع آنها بدست می آید:

$$\begin{cases} y=\tan(\frac{\omega}{c}\ell) \\ y=-\beta(\frac{\omega}{c}\ell) \end{cases}$$

که در آن $\beta=EA/kl$. با استفاده از متلب می‌توان دو معادله‌ی فوق را رسم کرد و نقاط برخورد آنها را که جواب هستند بدست آورد. از حل دیده می شود که جوابهای متعددی برای α و یا ω بدست می آید که هر کدام نشان دهنده یک فرکانس طبیعی است.



این رابطه را می توان با ساده کردن به فرمی که در شکل قبلی است در آورد:

$c^2\rho$ $\quad\quad$ m/ℓ

$$\tan\frac{\omega c}{l}=-\frac{EA}{k}\frac{\omega}{c}\frac{\omega}{\omega}=-\frac{c^{2}\overset{m/\ell}{\rho A}\,\omega^{2}}{k\cancel{c}\,\omega}=-\frac{c m\omega^{2}}{k\,\omega l}=-\frac{m\omega^{2}}{k}\frac{c}{\omega l}$$

α قبلاً به صورت $\alpha=\omega l/c$ تعریف شد، با تعریف $\gamma= m\omega^2/k$:

$$\tan\alpha=-\frac{1}{\alpha}\gamma \qquad \Rightarrow \alpha.\tan\alpha=-\gamma$$

که مانند عبارتی است که برای معادله فرکانسی در شکل آمده است.

از قرار دادن جواب های بدست آمده در u:

$$u(x,t)=B_{2n}\sin(\frac{\omega_n}{c}x).(C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t))$$

و یا:

$$u(x,t)=(C_n\cos(\omega t)+D_n\sin(\omega t)).\sin(\frac{\omega_n}{c}x)$$

دیده می شود که بینهایت مقدار برای u بدست می آید که پاسخ کلی ترکیبی از آنهاست:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos(\omega t)+D_n\sin(\omega t)).\sin(\frac{\omega_n}{c}x)$$

برای تعیین ضرایب این رابطه از شرایط اولیه کمک گرفته می شود.

از بکار بردن شرط اولیه سرعت:

$$\dot{y}(x,0)=0=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(-C_n\overset{0}{\cancel{\sin(0)}}+D_n\overset{1}{\cancel{\cos(0)}})\sin(\frac{\omega_n}{c}x) \qquad \Rightarrow D_n=0$$

با بکار بردن شرایط اولیه جابجایی در لحظه صفر:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(0)\sin(\frac{\omega_n}{c}x)$$

و از آنجا:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin(\frac{\omega_n}{c}x)dx$$

میله با مقطع غیر یکنواخت

در صورتیکه سطح مقطع میله ثابت نباشد معادله دیفرانسیل حرکت پیچیده تر می شود. در صورتیکه معادله دیفرانسیل حرکت در نظر گرفته شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\rho}{E}.A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

در صورتیکه پاسخ قسمت زمانی به صورت هارمونیک در نظر گرفته شود:

$$u(x,t)=U(x).\sin(\omega t+\phi)$$

از جا گذاری این پاسخ در معادله دیفرانسیل، معادله مکانی به فرم زیر تبدیل می شود:

$$AT\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{dA}{dx}T\frac{dU}{dx}=-\frac{\omega^2}{c^2}ATU$$

در نتیجه:

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}\frac{dU}{dx}+\frac{\omega^2}{c^2}U=0$$

فرض کنید سطح مقطع بصورت $A(x)=A_0x^n$ باشد، که A_0 مقداری ثابت است. در این صورت:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}=\frac{1}{A_0x^n}nA_0x^{n-1}=\frac{n}{x}$$

از قرار دادن در معادله دیفرانسیل:

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{n}{x}\frac{dU}{dx}+\frac{\omega^2}{c^2}U=0$$

باتعریف:

$$\nu=\frac{n-1}{2},\qquad k^2=\frac{\omega^2}{c}$$

معادله دیفرانسیل به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{2\nu+1}{x}\frac{dU}{dx}+k^2U=0$$

با تغییر متغیر $U(x)=x$-$\nu.X(x)$ و قرار دادن در معادله دیفرانسیل:

$$x^2X''+xX'+(k^2x^2-\nu^2)X=0$$

این یک معادله دیفرانسیل بسل درجه ν کلاسیک است. پاسخ عبارت است از:

$$X(x)=C_1J_\nu(kx)+C_2Y_\nu(kx)$$

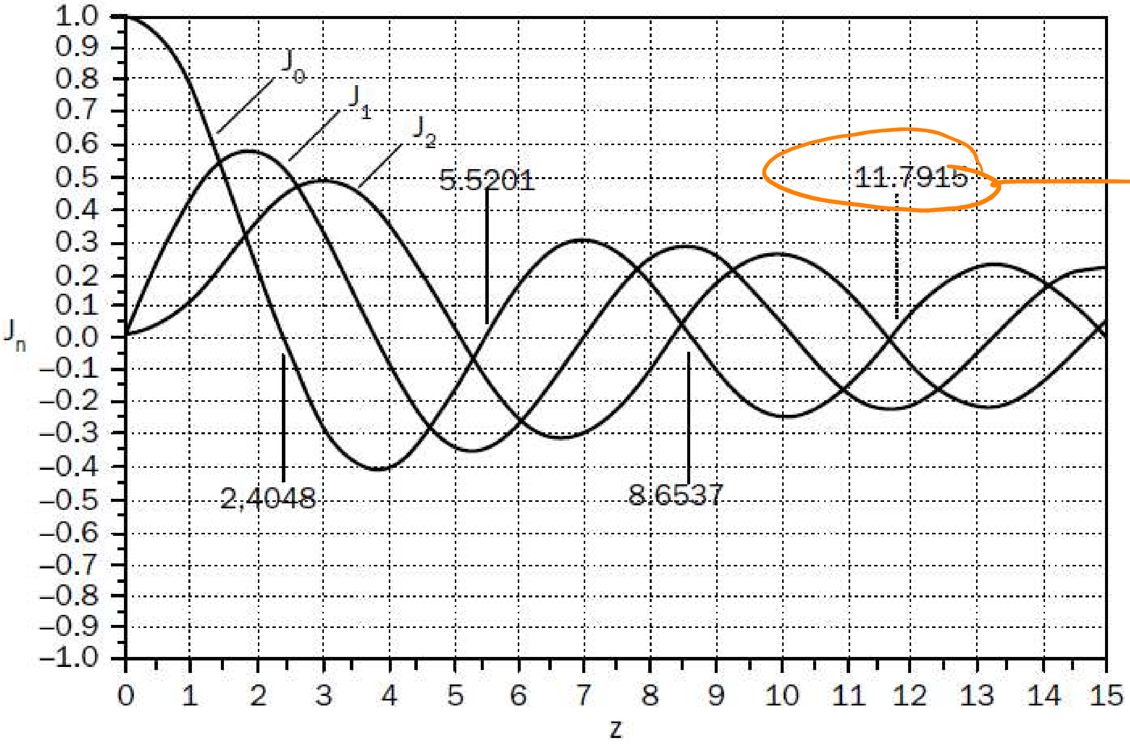
که J_ν و Y_ν به ترتیب توابع بسل نوع اول و دوم هستند. درجه توابع بسل برابر ν است که می تواند عدد صحیح و یا اعشاری باشد.

در نهایت پاسخ u برابر است با:

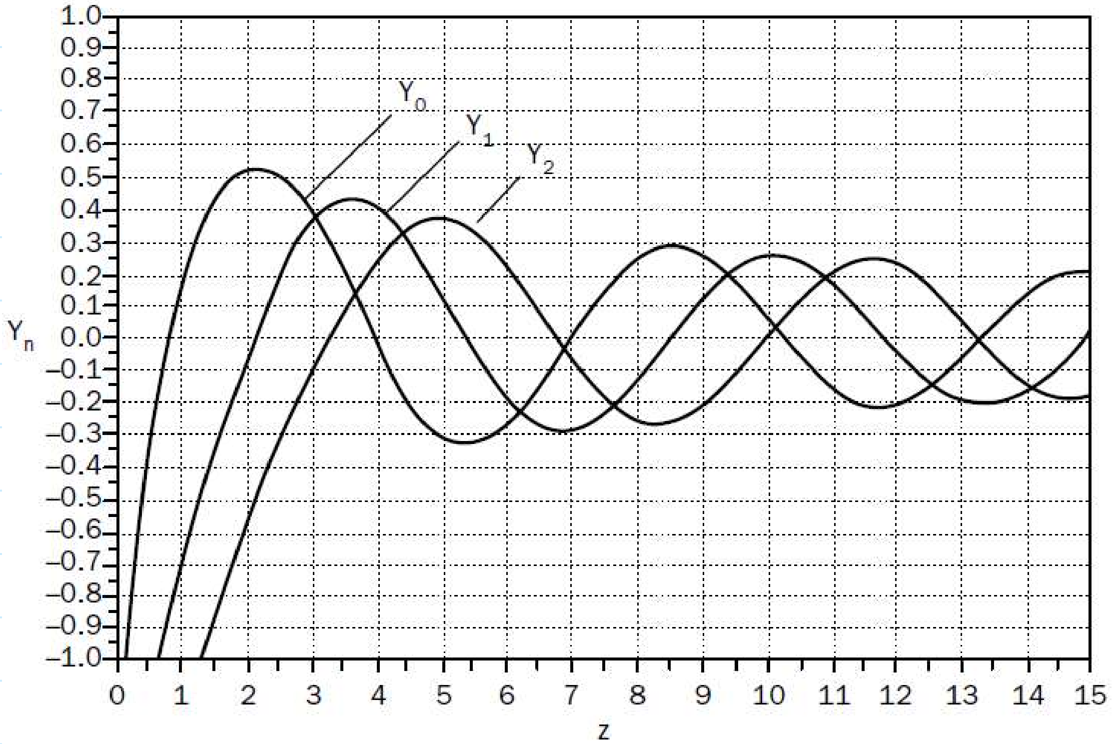
$$u(x,t)=[C_1J_\nu(kx)+C_2Y_\nu(kx)]x^{-\nu}\sin(\omega t+\phi)$$

Bessel Functions:

$$z^2\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+\left(k^2z^2-\nu^2\right)y=0 \quad \begin{cases} y=C_1J_\nu(kz)+C_2Y_\nu(kz), \text{ always} \\ y=C_1J_\nu(kz)+C_2J_{-\nu}(kz), \ \nu \text{ not an integer} \end{cases}$$



صفرهای J_0



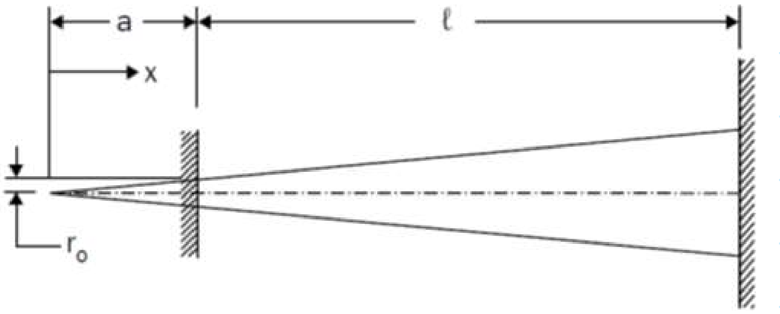
مثال: مطلوبست تعیین معادله فرکانسی، فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای ارتعاشات طولی میله ای با مقطع دایروی و طول l که در دو انتها ثابت است، و شعاع آن به صورت خطی زیر تغییر می کند:

$$r = r_0 \frac{x}{a}$$

که r_0 شعاع گوشه کوچکتر است.

سطح مقطع به فرم زیر تغییر می کند:

$$A = \pi r^2 = \pi \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 x^2$$



بنابراین $A_0=\pi(r_0/a)^2$ و $n=2$ و جواب عبارت است از:

$$U(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left(C_1 J_{\frac{1}{2}}(kx) + C_2 Y_{\frac{1}{2}}(kx)\right)$$

تابع بسل درجه ½ دارای این خاصیت است که $Y_{1/2}(z)=-J_{-1/2}(z)$ و همچنین ارتباط آن با توابع مثلثاتی بصورت زیر است:

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \qquad ,Y_{\frac{1}{2}}(z) = J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

بنابراین پاسخ را می توان بدین فرم نوشت:

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[C_1\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin kx - C_2\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos kx\right]$$

و یا: $D_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, C_1 \;, D_2 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, C_2$

$$U(x) = \frac{1}{x}\left[D_1 \sin kx + D_2 \cos kx\right]$$

البته برای حالت خاص $A=A_0x^2$ یک جواب دقیق برای معادله دیفرانسیل حرکت به فرم زیر وجود دارد. با در نظر گرفتن معادله حرکت میله:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{E} A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(A_0 x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{E} A_0 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$A_0\left(x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\rho}{E} A_0 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad \Rightarrow x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\rho}{E} x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

که می توان آنرا بفرم زیر نوشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ux) = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ux)$$

این همان معادله موج است که تابع آن با ux عوض شده و پاسخ آن عبارت است از:

$$ux = (D_1 \sin kx + D_2 \cos kx).\sin(\omega t + \phi)$$

که با جواب قبلی یکی است و در آن $k^2=\rho\omega^2/E=(\omega/c)^2$ است.

از اعمال شرایط مرزی:

$$x = a \Rightarrow \qquad X(a) = 0 \quad \Rightarrow D_1 \sin ka + D_2 \cos ka = 0$$

$$x = a + l = b \Rightarrow X(b) = 0 \quad \Rightarrow D_1 \sin kb + D_2 \cos kb = 0$$

برای داشتن جواب غیر بدیهی دترمینان ضرایب می بایست صفر گردد:

$$\begin{vmatrix} \sin ka & \cos ka \\ \sin kb & \cos kb \end{vmatrix} = 0$$

و یا:

$$\sin ka.\cos kb - \sin kb \cos ka = 0 \quad \Rightarrow \sin k(a-b) = -\sin kl = 0 = \sin m\pi$$

این معادله فرکانسی است که بینهایت جوابهای آن عبارتند از:

$$kl = m\pi \quad , m = 1, \infty \quad \Rightarrow \omega_m = \frac{m\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad , m = 1, \infty$$

دیده می شود که فرکانسهای طبیعی بدست آمده برای میله مخروطی شکل دقیقاً با فرکانسهای طبیعی میله با مقطع ثابت و شرایط مرزی دو سر ثابت یکی می شود. این حالت غیر طبیعی فقط برای $n=2$ و شرایط دو سر ثابت برقرار است.

همچنین فرکانس ها به شکل واقعی مقطع بستگی نداشته بلکه به چگونگی تغییر سطح آن ربط دارند. بنابراین میله ای با سطح مقطع مستطیل شکل و مخروطی در دو جهت (و بنابراین $A=A_0x^2$)، دارای همان فرکانسهایی است که میله با سطح مقطع دایروی مخروطی.

برای تعیین شکل مود مقادیر ویژه kl را در یکی از معادلات مرزی قرار داده و:

$$\frac{D_1}{D_2} = -\tan ka = -\tan\frac{m\pi a}{l}$$

از قرار دادن در معادله U برای شکل مود mام:

$$U_m = \frac{D_1}{x}\left[\sin\frac{m\pi x}{l} - \tan\frac{m\pi a}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\right]$$

که D_1 ضریب دلخواه است. همانطور که دیده می شود شکل مود با شکل مود میله دو سر ثابت با مقطع یکنواخت خیلی فرق دارد.