ارتعاشات سیستم‌های پیوسته(continuous systems)

سیستم‌های با بینهایت درجه‌ی آزادی سیستم‌های مختلفی هستند از جمله کابل‌ها، میله‌ها، تیرها، ورق‌ها و ... . این سیستم‌ها بینهایت یا چندین بینهایت درجه آزادی دارند. مثلا یک تیر را در نظر بگیرد یک ارتعاش محوری دارد با بینهایت درجه‌ی آزادی، دو ارتعاش عرضی دارد با دو بینهایت درجه‌ی آزادی و یک ارتعاش پیچشی دارد با بینهایت درجه‌ی آزادی.

در ابتدا ارتعاشات آزاد را بررسی می‌کنیم. کاری که انجام می‌دهیم این است که ابتدا با استفاده از قانون نیوتن مسائل را حل می کنیم و در ادامه از اصل همیلتون نیز استفاده می کنیم که می‌تواند به ما معادله ی دیفرانسیل حرکت را بدهد. سپس ارتعاشات اجباری را در نظر خواهیم گرفت.

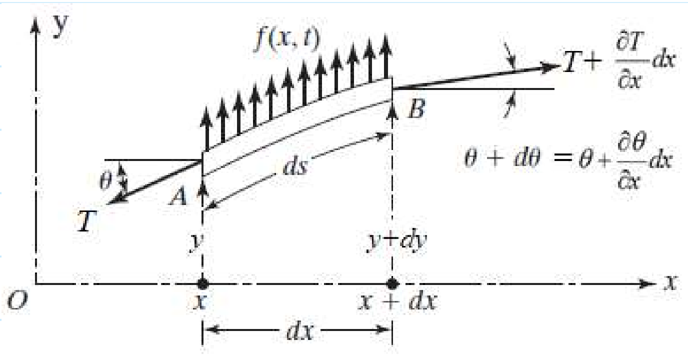
ارتعاشات کابل‌ها (Transverse Vibration of String or Cable)

کابل‌ها عضوهایی هستند که فقط کشش را تحمل می‌کنند , هرچه کشش بیشتر شود سخت‌تر می‌شوند. به دلیل ارزان بودن در صنعت کاربرد فراوانی دارد. از جمله کاربردهای آن می‌توان به کابل های حفاری، کرین‌ها (جرثقیل‌ها)، پل‌ها و ... اشاره کرد.

یک کابل می‌تواند ارتعاشات عرضی در راستای عمود بر محورش داشته باشد. می‌تواند تحت تاثیر نیروی عرضی نیز باشد. مثلا بار نقطه‌ای (می‌تواند یک پرنده باشد و یا برفی روی کابل راپوشانده و... باشد.)

کابل‌ها می‌توانند دارای سطح مقطع ثابت یا متغیر باشند و از آنجایی که باید تحت کشش باشند لازم است که از یک طرف گرفته شده و از انتهای دیگر کشیده شوند.

معادلات حاکم بر کابل‌ها



فرض‌های استفاده شده در بدست آوردن معادلات حاکم:

- جرم واحد طول کابل ثابت در نظر گرفته می شود.
- مقدار کشش کابل T متغیر در نظر گرفته می شود.
- جابجایی ها کوچک در نظر گرفته می شود.

یک المان به اندازه‌ی dx مطابق شکل جدا کرده و قانون دوم نیوتن را در راستای حرکت y می‌نویسیم:

$$\sum F_y = dma = dm\ddot{y}$$

$$\Rightarrow \left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)\sin(\theta + \frac{\partial \theta}{\partial x}dx) + (-T\ \sin\theta) + fdx = \rho dx\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

که در آن ρ جرم واحد طول و $f(x,t)$ نیرو بر واحد طول می‌باشد.

از آنجایی که زوایا کوچک هستند بنابراین $\sin\theta \approx \theta$ در نظر می گیریم. بنابراین:

$$(T+\frac{\partial T}{\partial x}dx)(\theta+\frac{\partial \theta}{\partial x}dx)-T\theta+fdx=\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\cancel{T\theta}+\theta\frac{\partial T}{\partial x}dx+T\frac{\partial \theta}{\partial x}dx+\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x}dx^2-\cancel{T\theta}+fdx=\rho dx\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

این قسمت کوچک درجه ۲

پس از ساده سازی داریم:

$$T\frac{\partial \theta}{\partial x}+\theta\frac{\partial T}{\partial x}+f=\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad \Rightarrow \frac{\partial (T.\theta)}{\partial x}+f=\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

با توجه به اینکه داریم:

$$\theta=\frac{\partial y}{\partial x}$$

بنابراین معادله ارتعاش اجباری نخ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial y}{\partial x})+f=\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

با فرض اینکه مقدار T ثابت باشد، معادله ارتعاش اجباری نخ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+f=\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

در صورت وجود نداشتن f ارتعاش آزاد نخ (f=0) به صورت زیر حاصل می شود:

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

بنابراین:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

و یا:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

که در آن c سرعت انتشار موج در کابل می باشد و برابر است با:

$$c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

می بینیم که این معادله تبدیل به معادله‌ی هذلولی یا بهتر بگوییم تبدیل به معادله‌ی موج شد.

برای حل این معادله موج از روش جداسازی متغیرها استفاده می کنیم:

$$y(x,t)=X(x).F(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2X}{dx^2}\cdot F=X''\cdot F$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=X\,\frac{d^2F}{dt^2}=X\cdot\ddot{F}$$

با جایگذاری در معادله ارتعاشی کابل‌ها داریم:

$$\frac{d^2X}{dx^2}\cdot F=\frac{1}{c^2}X\cdot\frac{d^2F}{dt^2}$$

تابعیت در حرف ب XF

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{F}\frac{1}{c^2}\frac{d^2F}{dt^2}$$

با توجه به اینکه دو طرف تساوی مستقل از هم هستند، برای اینکه تساوی آن‌ها برقرار باشد باید برابر با یک مقدار ثابت باشند.

همچنین برای اینکه حرکت تکرار شونده باشد آن مقدار ثابت باید منفی باشد. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\frac{1}{F}\frac{1}{c^2}\frac{d^2F}{dt^2}=-\frac{\omega^2}{c^2}$$

از اینجا دو معادله دیفرانسیل مرتبه دو، یکی بر حسب مکان و دیگری بر حسب زمان بدست می آید:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{X}\dfrac{d^2X}{dx^2}=-\dfrac{\omega^2}{c^2}\\[2mm]\dfrac{1}{F}\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2F}{dt^2}=-\dfrac{\omega^2}{c^2}\end{cases}\qquad\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d^2X}{dx^2}+\dfrac{\omega^2}{c^2}X=0\\[2mm]\dfrac{d^2F}{dt^2}+\omega^2F=0\end{cases}$$

پاسخ این معادلات عبارت است از:

$$\begin{cases}X(x)=A\cos(\frac{\omega}{c}x)+B\sin(\frac{\omega}{c}x)\\ F(t)=C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t)\end{cases}$$

مسئله اول دارای دو شرط مرزی در دو انتهای کابل است.

شرایط مرزی با در نظر گرفتن کابل دو سر ثابت داریم:

$$y(0,t)=y(\ell,t)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y(0,t)=X(0)F(t)=0\Rightarrow X(0)=0\\ y(\ell,t)=X(\ell)F(t)=0\Rightarrow X(\ell)=0\end{cases}$$

با اعمال شرایط مرزی داریم:

$$X(0)=0\quad\Rightarrow\quad A\,\overset{1}{\cancel{\cos(0)}}+B\,\overset{0}{\cancel{\sin(0)}}=0\quad\Rightarrow A=0$$

$$X(\ell)=0\quad\Rightarrow B\sin(\frac{\omega}{c}\ell)=0=\sin(n\pi)\quad\Rightarrow\frac{\omega}{c}\ell=n\pi\quad,n=1,2,\ldots$$

بنابراین معادله ی فرکانسی به صورت زیر می شود:

$$\frac{\omega_n}{c}\ell = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$$

در نتیجه فرکانس طبیعی:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{\ell}, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty$$

و یا:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{\ell}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \infty$$

این ωای که بدست می آید، فرکانس‌های طبیعی کابل هستند که می بینید تابعی از پارامترهای سیستم می باشند. در سیستم‌های چند درجه آزادی هر موقع زمان را کنار می گذاشتیم شکل مود را بدست می آوردیم. حالا هم همین طور با حذف کردن زمان شکل مود آن نیز به صورت زیر می شود:

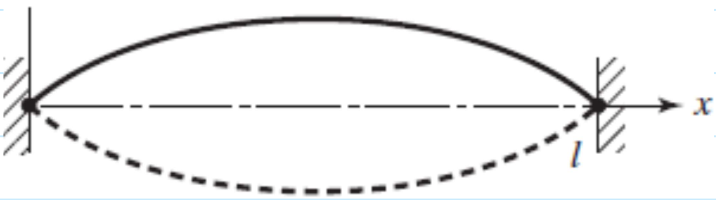
$$X(x) = B\sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) \quad \Rightarrow X(x) = B\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$$

با در نظر گرفتن $B=1$ داریم:

$$X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad n = 1, 2, \ldots, \infty$$

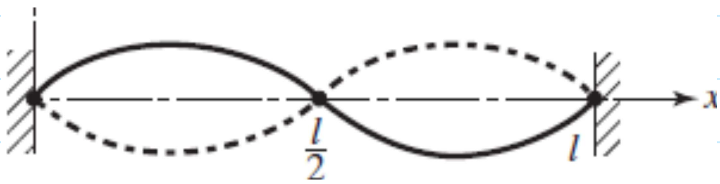
با تغییر n شکل مودهای مختلف بدست می آید:

مود اول: $n=1$



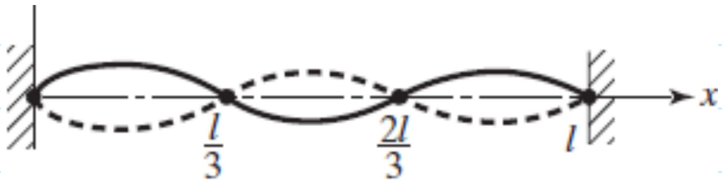
$$X(x) = \sin\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)$$

مود دوم: $n=2$



$$X(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{\ell}x\right)$$

مود سوم: n=3



$$X(x)=\sin(\frac{3\pi}{\ell}x)$$

دقت داریم که با تغییر شرایط مرزی شکل مودها نیز تغییر خواهند کرد. حال اگر به n عدد دهیم به ازای هر n یک جواب داریم. پس بینهایت جواب داریم که جواب نهایی ترکیب خطی از این جواب‌هاست. از ضرب $X(x)$ در $F(t)$ خواهیم داشت:

$$y(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cos\omega_n t+D_n\sin\omega_n t)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

این معادله با فرض دو سر ثابت بودن کابل بدست آمده است.

تا زمانی که به دنبال وضعیت قرارگیری درجات نسبت به هم (شکل مودها) و فرکانس‌های طبیعی هستیم از شرایط مرزی استفاده می کنیم، اما برای یافتن ضرایب مجهول رابطه بالا از شرایط اولیه استفاده می کنیم. شرایط اولیه را می توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$y(x,0)=f(x),\quad \dot{y}(x,0)=g(x)$$

با اعمال شریط اولیه اول (جابجایی کابل در لحظه صفر) و استفاده از خاصیت ارتوگونالیتی توابع سینوسی داریم:

$$y(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\cancelto{1}{\cos(0)}+D_n\cancelto{0}{\sin(0)})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

از ضرب دو طرف عبارت در $\sin m\pi x/l$ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(\frac{m\pi}{\ell}x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)=f(x)\sin(\frac{m\pi}{\ell}x)$$

حال با انتگرال گیری دو طرف از 0 تا l:

$$\int_0^{\ell}f(x)\sin(\frac{m\pi}{\ell}x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\ell}C_n\sin(\frac{m\pi}{\ell}x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx$$

با توجه به خاصیت ارتوگونالیتی تابع سینوس، تمامی جملات سمت راست این رابطه غیر از حالتی که $m=n$ صفر می شوند. بنابراین:

$$C_n\frac{\ell}{2}=\int_0^{\ell}f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx\qquad\Rightarrow C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx$$

در صورتیکه همین کار را برای شرط اولیه دیگر انجام دهیم:

$$\dot{y}(x,0)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(-C_n\cancelto{0}{\sin(0)}+D_n\cancelto{1}{\cos(0)})\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

بنابراین پاسخ مسئله بدست می آید.

$$D_n=\frac{2}{\ell\omega_n}\int_0^{\ell}g(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)dx$$

اینجا هم مثل قبل پاسخ ترکیبی از شکل مودها شد. همان بحثی که در سیستم‌های چند درجه آزادی داشتیم.

شرایط مرزی به دو دسته تقسیم می شوند:

شرایط مرزی سینماتیکی (Drichlet , Kinematic B.C , Geometric)

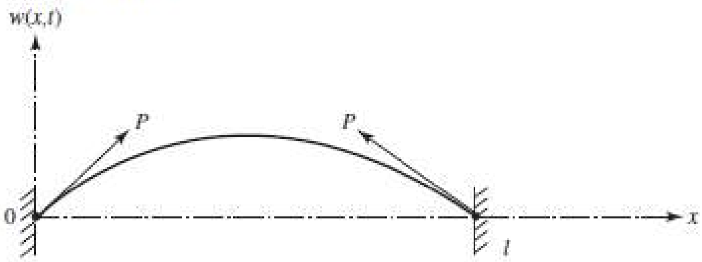
شرایط مرزی نیرویی(Force , Dynamic , Kinetic)

در زیر برخی شرایط مرزی متعارف و غیر متعارف دیده می شود:

Boundary conditions of a string.

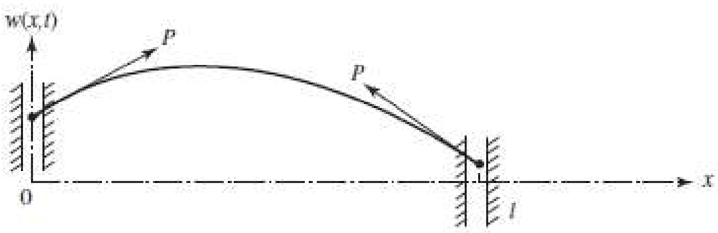
Support conditions of the string	Boundary conditions to be satisfied

1. Both ends fixed



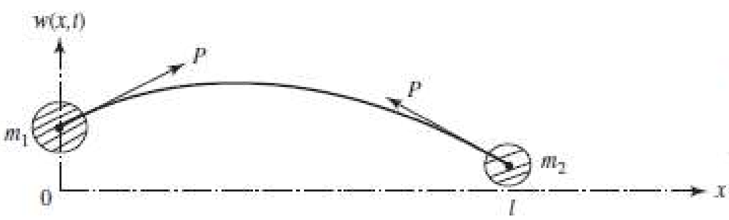
$$w(0,t)=0$$
$$w(l,t)=0$$

2. Both ends free



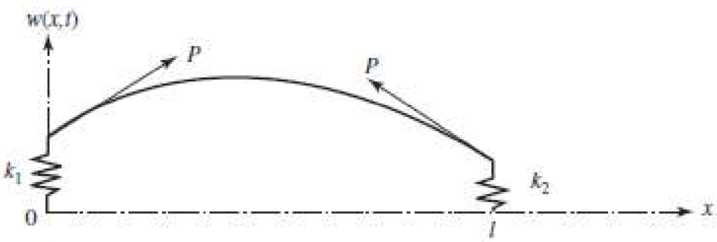
$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)=0$$
$$\frac{\partial w}{\partial l}(l,t)=0$$

3. Both ends attached with masses



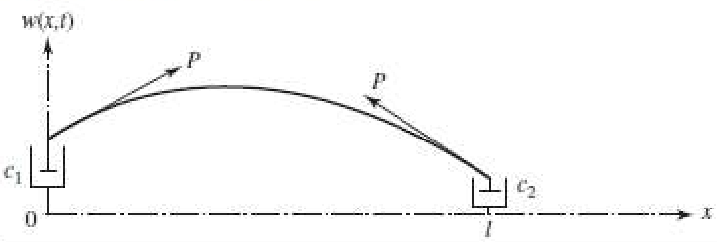
$$m_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)$$
$$-m_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(l,t)$$

4. Both ends attached with springs



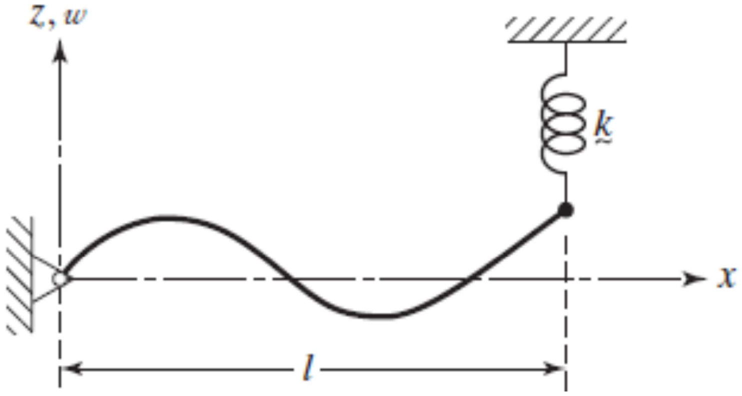
$$k_1 w(0,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)$$
$$-k_2 w(l,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(l,t)$$

5. Both ends attached with dampers

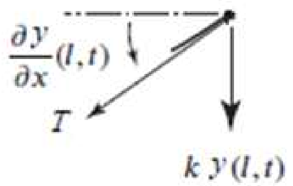


$$c_1\frac{\partial w}{\partial t}(0,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)$$
$$-c_2\frac{\partial w}{\partial t}(l,t)=P\frac{\partial w}{\partial x}(l,t)$$

برای مثال کابل زیر را در نظر بگیرید:



شرط مرزی سمت چپ، شرط مرزی متعارف تکیه گاه ثابت است که قبلاً بررسی شد. اما شرط مرزی سمت راست شرط مرزی نامتعارف تکیه گاه فنری است. دیاگرام آزاد برای المان کوچک این تکیه گاه عبارت است از:



از نوشتن قانون دوم نیوتن برای المان کوچک این تکیه گاه:

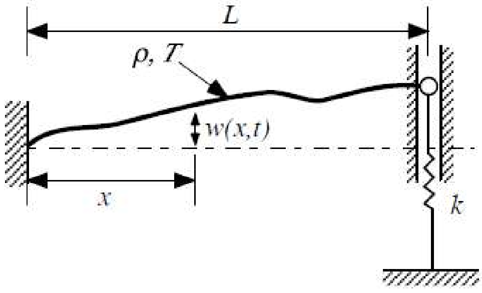
$$\sum F_y = dm\, \ddot{y}$$

با توجه به کوچک بودن المان $dm \approx 0$:

$$-T\,\frac{\partial y}{\partial x}(\ell,t) - ky\,(\ell,t) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x}(\ell,t) = -\frac{k}{T}\,y\,(\ell,t)$$

String vibration problem with one end constrained by a spring: A string vibration problem is shown in Figure 1. One end (boundary) of the string is fixed and the other end (boundary) is connected to a spring constrained to move vertically.

Assume that the string has uniform mass density, $\rho(x) = \rho$, and constant tension, $T(x) = T$.



(a) Formulate the eigenvalue problem for the vibration analysis of this string system with proper boundary conditions.

(b) Solve the eigenvalue problem. Assume that $\frac{T}{kL} = 8 \times 10^{-3}$.

(c) Find the first three natural frequencies and normalized modes of vibration, if $\frac{T}{kL} = 8 \times 10^{-3}$.

(d) When the spring becomes stiffer, show that the natural frequencies will approach those of the string with both ends fixed.

(e) Will the natural frequencies increase or decrease with a more compliant spring, say 100 more compliant to render $\frac{T}{kL} = 0.8$. Does the results make sense? Why?

(f) What will happen when the spring disappear ($k \to 0$)?

Since $T(x) = T = \text{const}$ and $\rho(x) = \rho = \text{const}$, we can write the equation of motion in equation as:

$$T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

The boundary conditions are

$$x = 0: \quad W(0) = 0$$

$$x = L: \quad T(x)\frac{dW(x)}{dx} + kW(x) = 0$$

where $\beta^2 = \omega^2\frac{\rho}{T}$. The general solution for $W(x)$ is

$$W(x) = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x$$

From the first boundary condition, $C_1 = 0$. Thus, $W(x) = C_2 \sin\beta x$. The second boundary condition at $x = L$ renders the following frequency equation:

$$x = 0 \quad \Rightarrow X = 0 \quad \Rightarrow A = 0 \quad \Rightarrow X(x) = B\sin(\frac{\omega}{c}x)$$

$$x = L \quad \Rightarrow TX'(L)F(t) = -kX(L)F(t)$$

$$TB\frac{\omega}{c}\cos(\frac{\omega}{c}L)+kB\sin(\frac{\omega}{c}L) \quad \Rightarrow \tan(\beta L)+\frac{T}{k\ell}\beta L=0, \quad \beta=\frac{\omega}{c}$$

$$\tan(\beta L)+0.008\beta L=0$$

when $\frac{T}{kL}=8\times10^{-3}$.

This Equation can be solved numerically to find

$$(\beta L)_r = 3.1336, 6.2752, 9.4168, \cdots$$

where $r=1,2,3,\cdots$. The eigenfunctions are

$$W_r(x)=C_2\sin\beta_r x$$

(c) From Equation (7), we find the first three natural frequencies

$$\omega_1 = 3.1336\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}, \quad \omega_2 = 6.2752\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}, \quad \omega_3 = 9.4168\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$$

By normalizing the eigenfunctions so that $\int_0^L \rho(C_2\sin\beta_r x)^2dx=1$, we can find the coefficient

$$C_2=\sqrt{\frac{2}{\rho L}}$$

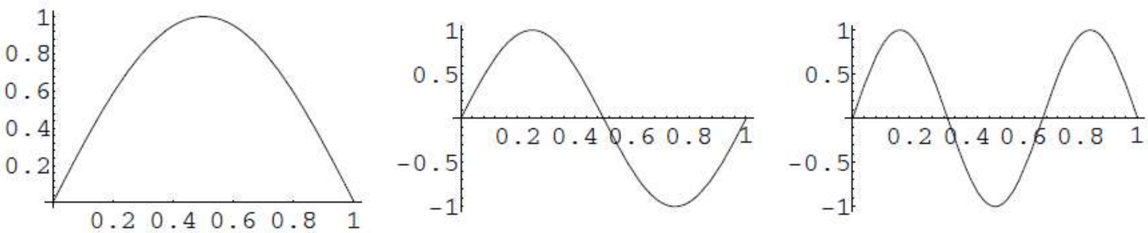
Hence, the normalized modes are

$$W_r(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho L}}\sin(\beta_r L\cdot\frac{x}{L})$$

Summarizing the results, we have the first three natural frequencies and their corresponding normalized modes for the system:

$$\omega_1 = 3.1336\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}} \qquad W_1(x)=1.4124\sqrt{\frac{1}{\rho L}}\sin(3.1336\frac{x}{L})$$
$$\omega_2 = 6.2752\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}} \qquad W_2(x)=1.4133\sqrt{\frac{1}{\rho L}}\sin(6.2752\frac{x}{L})$$
$$\omega_3 = 9.4168\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}} \qquad W_3(x)=1.4136\sqrt{\frac{1}{\rho L}}\sin(9.4168\frac{x}{L})$$

The natural frequencies are very close to those of the strings with both ends fixed.



(d) When the spring is stiffer, the term $\frac{T}{kL}$ becomes smaller and renders natural frequencies that approach the natural frequencies of strings with both ends fixed.

	String in this problem ($\frac{T}{kL} = 0.008$)	*String with both ends fixed*
ω_1	$3.1336\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$
ω_2	$6.2752\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$2\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$
ω_3	$9.4168\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$3\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$

(e) When the spring is made 100 times more compliant, i.e., $\frac{T}{kL} = 0.8$, the natural frequencies become smaller. This is because the constraint at the right end becomes less than rigid.

	String in this problem ($\frac{T}{kL} = 0.8$)	*String with both ends fixed*
ω_1	$2.4669\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$
ω_2	$5.6084\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$2\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$
ω_3	$8.7500\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$3\pi\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$

(f) When the spring is made very compliant, i.e., $\frac{T}{kL} \to \infty$, the natural frequencies will approach the case when one end is free. The following table is a comparison between the case of $\frac{T}{kL} = 9$ and that

	String in this problem ($\frac{T}{kL} = 9$)	*String with one end move freely in vertical*
ω_1	$1.6815\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$
ω_2	$4.8231\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$\frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$
ω_3	$7.9646\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$	$\frac{5\pi}{2}\sqrt{\frac{T}{\rho L^2}}$