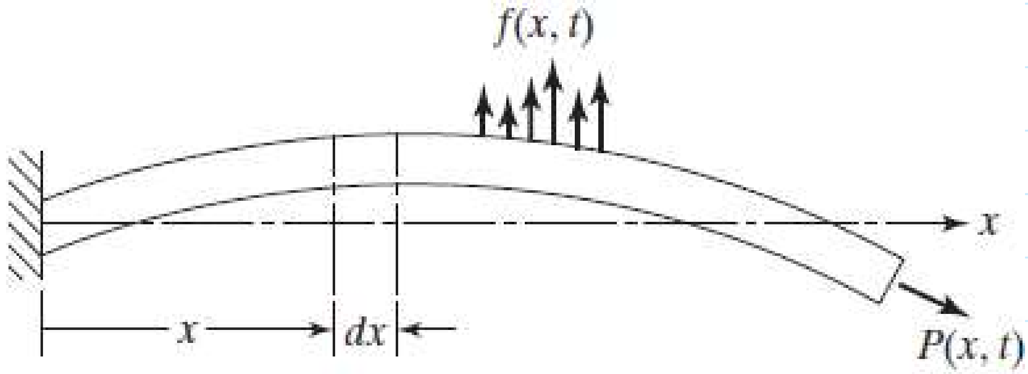
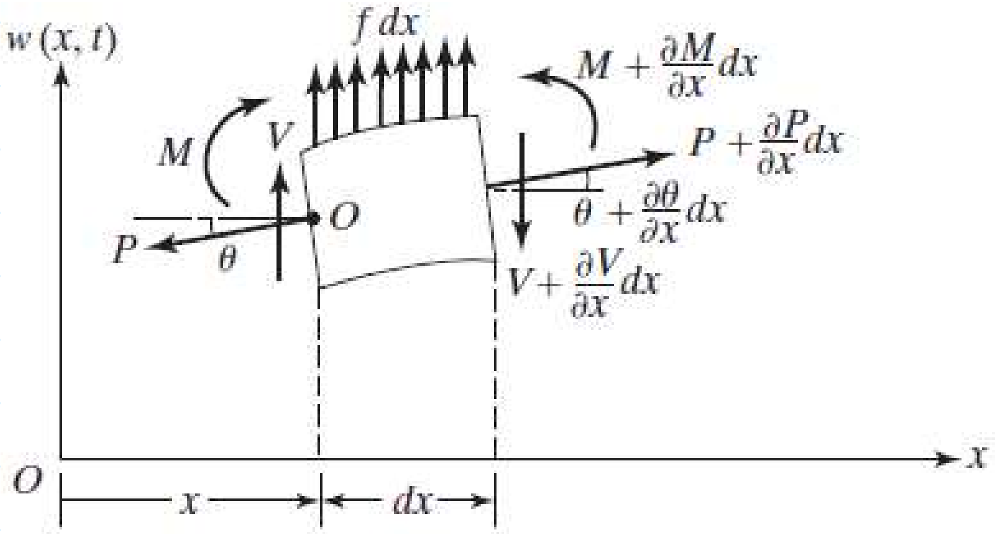
# ارتعاشات عرضی آزاد تیر تحت بار محوری

در بسیاری مواقع تیرها علاوه بر بار عرضی تحت اثر بار محوری نیز می باشند. مثلا تیر ستون ها را در نظر بگیرید که تحت بار فشاری هستند، و یا رشته های حفاری که تحت بارهای ناشی از اندرکنش خمشی و محوری و یا بار ناشی از حرکت محوری مته هستند. این در بسیاری از سیستمهای دیگر از جمله توربین ها، پمپ ها، چرخ دنده ها و گیربکس ها و غیره نیز رخ می دهد. لذا در نظر گرفتن بار محوری در تیرها اهمیت زیادی را پیدا می کند. . برای بررسی ارتعاشات عرضی تیرها تحت بار محوری، تیری را که علاوه بر بار عرضی تحت بار محوری نیز است را در نظر بگیرید:




شکل (۱): تیر تحت بار عرضی و محوری.

المانی از تیر مانند شکل(۲) را در نظر بگیرید:




شکل(۲) المان در نظر گرفته شده برای تیر تحت بار محوری

تغییرات نیروهای محوری و برشی و همچنین گشتاور خمشی در شکل نشان داده شده است. علاوه بر این، نیروی محوری در این شکل کششی (مثبت) در نظر گرفته شده است. معادله حرکت در راستای قائم عبارت است از:

$$+\uparrow \sum F_y = dm\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

$$V - P\theta + f(x,t)dx - (V + dV) + (P + dP)(\theta + d\theta) = \rho A(x)dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

با ساده سازی و تقسیم دو طرف معادله بر طول المان، معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(P\theta)+f=\rho\,A(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

چون تیر نازک فرض شده است، ممان اینرسی $I \approx 0$ در نظر گرفته می‌شود. بنابراین معادله حرکت زیر را نیز می‌توان نوشت:

$$+\circlearrowleft \sum M_G = 0$$

$$-M-V\,\frac{dx}{2}-(V+dV)\,\frac{dx}{2}+M+dM=0$$

$$-V\,dx+dM=0\;\rightarrow\qquad V=\frac{dM}{dx}$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه قبل می‌توان نوشت:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)+f(x,t)=\rho\,A(x)\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

از آنجا که برای تیری با خیز کم $M=EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ است، می‌توان با قرار دادن آن در رابطه بالا به رابطه زیر رسید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\rho\,A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=f(x,t)$$

این معادله دیفرانسیل ارتعاشات اجباری تیر تحت نیروی محوری است. در صورتی که مقادیر $P$، $\rho$، $I$ و $E$ ثابت باشند، و نیروی خارجی $f(x,t)$ صفر باشد، معادله ارتعاشات آزاد به فرم زیر بدست می آید:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-P\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

برای حل کردن این معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی، می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده نمود. به عبارت دیگر می‌توان ترم‌های زمانی و مکانی را جدای از هم در نظر گرفت:

$$w(x,t)=X(x)\,T(t)$$

با جایگذاری رابطه بالا در معادله دیفرانسیل می‌توان نوشت:

$$EI\,T\frac{d^4 X}{dx^4}-PT\frac{d^2 X}{dx^2}+\rho A\,X\frac{d^2 T}{dt^2}=0$$

با تقسیم رابطه بالا بر $XT$ می‌توان آن را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{\rho A}\left(EI\frac{1}{X}\frac{d^4 X}{dx^4}-P\frac{1}{X}\,\frac{d^2 X}{dx^2}\right)=-\frac{1}{T}\frac{d^2 T}{dt^2}=\omega^2$$

سمت چپ تابعی از متغیر مستقل مکان و سمت راست تابعی از متغیر مستقل زمان است. تغییرات متغیر مکان اثری بر سمت راست نداشته و متقابلاً تغییرات متغیر زمان اثری بر سمت چپ ندارد. در نتیجه این عبارات می بایست که برابر مقدار ثابتی باشند. این مقدار ثابت در اینجا با $\omega^2$ نشان داده شده است. در نتیجه دو معادله زیر به دست می آید:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \\ EI\dfrac{d^4X}{dx^4} - P\dfrac{d^2X}{dx^2} + \rho A\omega^2\, X = 0 \end{cases}$$

جواب معادله دیفرانسیل اول که معادله ای با شرایط اولیه می باشد قسمت زمانی پاسخ تیر را به بصورت زیر می‌دهد:

$$T(t) = A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)$$

پاسخ معادله دوم که معادله دیفرانسیل مرتبه چهار با شرایط مرزی می باشد را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$X(x) = X_0\, e^{\alpha x}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل و تقسیم آن بر $EI$ می‌توان نوشت:

$$\left(\alpha^4 - \frac{P}{EI}\alpha^2 - \frac{\rho A}{EI}\omega^2\right)X_0 e^{\alpha x} = 0$$

از آنجا که $X_0$ و $e^{\alpha x}$ صفر نمی باشند، می‌توان معادله مشخصه را بصورت زیر نوشت:

$$\alpha^4 - \frac{P}{EI}\alpha^2 - \frac{\rho A}{EI}\omega^2 = 0$$

با حل معادله مشخصه می‌توان جواب‌های زیر را بدست آورد:

$$\alpha_1^2 = \frac{P}{2EI} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho A\omega^2}{EI}}$$

$$\alpha_2^2 = \frac{P}{2EI} - \sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2 + \frac{\rho A\omega^2}{EI}}$$

از آنجا که در $\alpha_2^2$ جمله درون رادیکال از جمله اول بزرگتر است، لذا مقدار $\alpha_2^2$ منفی شده و در نهایت می‌توان پاسخ مکانی را بصورت زیر نوشت:

$$X(x) = B_1\cosh\alpha_1 x + B_2\sinh\alpha_1 x + B_3\cos\alpha_2 x + B_4\sin\alpha_2 x$$

ثابت‌های $B_4$ ,$B_3$ ,$B_2$ ,$B_1$ به مانند قبل از شرایط مرزی تیر بدست می‌آیند.

برای مثال اگر تیر دو سر مفصل باشد و تحت نیروی فشاری محوری قرار داشته باشد. شرایط مرزی تیر دو سر مفصل ایجاب می‌کند که:

$$at\ x=0\ \rightarrow\ w(0,t)=0\ ,EI\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=0$$

$$at\ x=L\ \rightarrow\ w(L,t)=0\ ,EI\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2}=0$$

به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$X(0)=0\ ,X(L)=0$$

$$\frac{d^2X(0)}{dx^2}=0\ ,\frac{d^2X(L)}{dx^2}=0$$

از شرایط مرزی در $x=0$ نتیجه می‌شود که:

$$\mathrm{B}_1=B_3=0$$

همچنین با استفاده از شرایط مرزی در $x=L$ می‌توان معادله فرکانسی تیر را بصورت زیر بدست آورد:

$$\sinh\alpha_1 L\times\sin\alpha_2 L=0$$

از آنجا که $\sinh\alpha_1 L\neq 0$ است، می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha_2 L=0=\sin n\pi\ \rightarrow\qquad \alpha_2=\frac{n\pi}{L}\ ,\qquad n=1,\infty$$

با جایگذاری مقدار بدست آمده برای $\alpha_2$ در رابطه آن می‌توان نوشت:

$$\alpha_2^2=\frac{P}{2EI}-\sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2+\frac{\rho A\omega^2}{EI}}=-\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

از این رابطه می توان $\omega_n$ را بدست آورد:

$$\omega_n^2=\frac{EI}{\rho A}\left(\left(\frac{P}{2EI}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)^2-\left(\frac{P}{2EI}\right)^2\right)$$

$$=\frac{EI}{\rho A}\left(\left(\frac{P}{2EI}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}-\frac{P}{2EI}\right)\times\left(\frac{P}{2EI}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}+\frac{P}{2EI}\right)\right)$$

$$=\frac{EI}{\rho A}\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\left(\frac{P}{EI}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)$$

در نتیجه:

$$\omega_n = n\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{n^2+\frac{PL^2}{\pi^2 EI}}$$

اگر $P=0$ باشد، جمله دوم زیر آخرین رادیکال صفر شده و عبارت حاصل دقیقاً همان رابطه ای است که قبلاً برای فرکانس طبیعی تیر دو سر مفصل بدست آمد.

اما در غیر اینصورت و اگر نیروی محوری کششی باشد، از رابطه بالا دیده می شود که وجود آن باعث افزایش فرکانس طبیعی تیر می گردد. به عبارت دیگر نیروی محوری کششی باعث افزایش سختی تیر می گردد.

شکل مودهای تیر نیز از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$X_n(x) = sin\alpha_2 x = \sin\frac{n\pi}{L}x$$

اگر $EI=0$ باشد، یعنی سختی خمشی صفر گردد:

$$\omega_n = n\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{n^2+\frac{PL^2}{\pi^2 EI}} = n^2\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}+\frac{PL^2}{\rho A\pi^2}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{P}{\rho A}}$$

که همان عبارتی است که برای کابل بدست آمد.

در صورتیکه رابطه $\omega_n$ به صورت زیر نوشته شود:

$$\omega_n = n\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{n^2+\frac{PL^2}{\pi^2 EI}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{EI}{\rho A}\right)+\frac{P}{\rho A}}$$

$$= \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{P}{\rho A}(1+n^2\pi^2\left(\frac{EI}{PL^2}\right)}$$

اگر $R = \frac{EI}{PL^2}$ باشد، در نتیجه:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{P}{\rho A}(1+n^2\pi^2 R)}$$

برای $R$ های خیلی کوچک ($EI<<PL^2$) دیده می شود که کشش نیروی اصلی است و تیر مانند کابل عمل می کند.

برای $R$ های خیلی بزرگ ($R\to\infty$) سختی نیروی اصلی است و تیر مانند حالتی است که نیروی محوری نباشد.

برای مقادیر متوسط $R$ دیده می شود که مودهای بالاتر توسط سختی کنترل می شوند (به علت وجود جمله $n^2$).

از مقاومت مصالح به یاد دارید هنگامی که تیر تحت تأثیر نیروی فشاری قرار می گرفت مسئله کمانش پیش می آمد. نیروی کمانش از رابطه اویلر به صورت:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

محاسبه می شود. این مقدار کمترین مقدار بار کمانش تیر دو سر مفصل بوده که در مود اول بار کمانش رخ می دهد. در صورتیکه نیروی محوری فشاری باشد، از جاگذاری رابطه بار کمانش در معادله فرکانسی:

$$\omega_n = n\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{n^2+\frac{PL^2}{\pi^2 EI}} = n\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{n^2+\frac{(-P)}{P_{cr}}}$$

در نتیجه:

$$\omega_n = n\frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\sqrt{n^2-\frac{P}{P_{cr}}}$$

از رابطه فوق دیده می شود، در صورتیکه بار محوری فشاری باشد سبب کاهش سختی تیر شده و فرکانس طبیعی آن کاهش می یابد. در صورت افزایش مقدار بار فشاری تا بار کمانش تیر، فرکانس طبیعی تیر می تواند تا مقدار صفر نیز کاهش یابد. این نکته در کار با سیستم هایی که تحت بار فشاری هستند، مانند رشته های حفاری از اهمیت زیادی برخوردار است.

به همین ترتیب در صورتیکه بار کششی باشد، سبب افزایش سختی سیستم شده و فرکانس طبیعی آن افزایش می یابد. مثلاً در توربین ها، اثر دوران بر روی پره ها سبب ایجاد نیروی کششی شده و فرکانس های طبیعی را افزایش می دهد.