



## ارتعاشات عرضی آزاد تیر اویلر-برنولی

### Free Transverse Vibrations of Euler-Bernoulli Beam

تیرها سازه‌های مکانیکی هستند که می‌توانند بار عرضی و خمشی را تحمل کنند. تیرها معمولاً عضوهایی با طول زیاد، مستقیم و منشوری هستند. در بیشتر موارد، بارها عمود بر محور تیر وارد می‌شوند که این بارگذاری عرضی تنها باعث ایجاد خمش و برش در تیر می‌شود. وقتی بارها با محور تیر زاویه راست یا قائم تشکیل نمی‌دهند، علاوه بر خمش و برش، نیروهای محوری نیز در تیر ایجاد می‌شود.

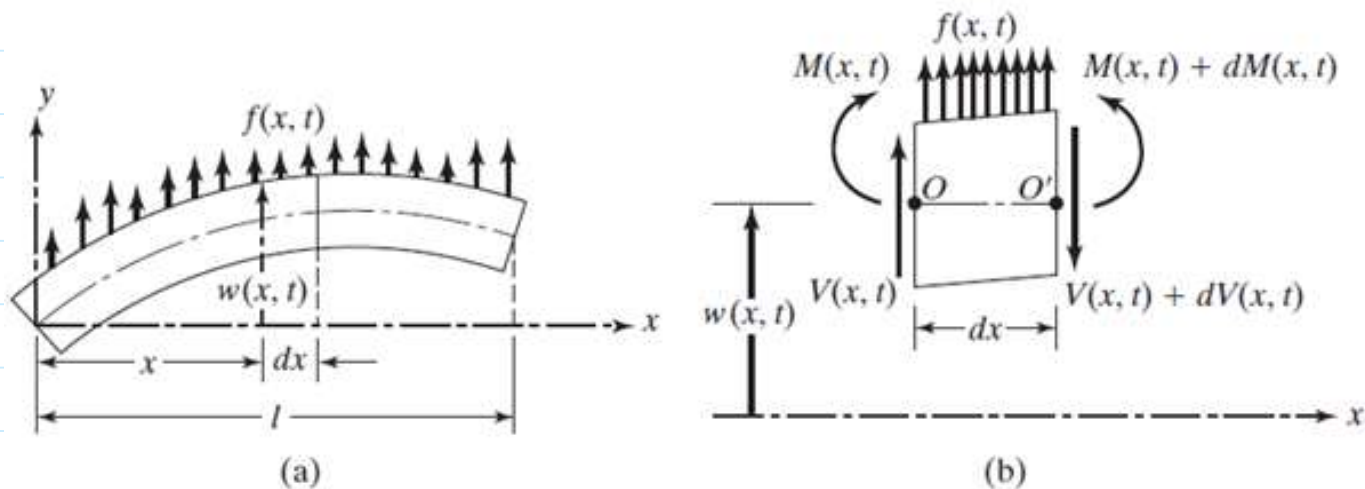
در اینجا ارتعاشات عرضی تیرها با فرضیات خمش ساده تیرها بررسی می‌شود. فرضیات اصلی نظریه خیز کوچک و یا آنچه نظریه کلاسیک نامیده می‌شود، برای تیرهای نازک، الاستیک، همگن و همسانگرد مبتنی بر هندسه تغییر شکل است. این فرضیات را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

- ارتعاشات در صفحه قائم در نظر گرفته می‌شود و عمق تیر واحد فرض می‌شود.
- نیروی محوری در امتداد تیر وجود ندارد.
- صفحه X-Y صفحه اصلی تیر است و صفحه باقی می‌ماند.
- ماده الاستیک خطی است.
- خیز سطح میانی در مقایسه با ضخامت تیر کوچک است. بنابراین شیب سطح خیزدار بسیار کوچک و مقدار مجذور شیب، در مقایسه با واحد، قابل صرف نظر است.
- صفحه میانی (تار خنثی) بعد از خمش بدون کرنش باقی می‌ماند.
- مقاطع مسطح که در ابتدا عمود بر صفحه میانی بوده‌اند، پس از خمش، مسطح و عمود بر این صفحه باقی می‌مانند. این بدان معناست که از کرنش‌های برشی می‌توان صرف نظر کرد. بنابراین، خیز ورق در اصل مربوط به کرنش‌های خمشی است. بر این اساس استنتاج می‌شود که کرنش عمودی ناشی از بارگذاری جانبی را می‌توان حذف نمود.
- تنش‌های  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  در مقایسه با  $\sigma_z$  ناچیز هستند.
- اینرسی دورانی ناچیز فرض می‌شود.

به تیرهایی با این فرضیات، تیر اویلر-برنولی و یا تیر نازک (Thin Beam) گفته می‌شود. دقت کنید که یکی از مشکلات اصلی تئوری تیر اویلر-برنولی در آن است که علاوه بر وجود نیروی برشی، تغییر فرم برشی وجود ندارد. در اینجا معادلات ارتعاشات عرضی تیر بررسی می‌گردد.

تیری را مطابق شکل در نظر بگیرید که تحت باری عرضی به مقدار  $f(x,t)$  بر واحد طول تیر می‌باشد. در صورتیکه المانی از تیر به طول  $dx$  مطابق شکل در نظر گرفته شود، دارای جابجایی عرضی است. از آنجا که جسم خاصیت الاستیک داشته و بینهایت المان در طول تیر وجود دارد، و جابجایی هر کدام با دیگری متفاوت است، بنابراین بینهایت درجه آزادی در طول آن وجود دارد.

دیاگرام آزاد المان تیر در شکل (۱) نشان داده شده است. ممان خمشی،  $M(s,t)$ ، نیروی برشی،  $V(x,t)$ ، سطح مقطع  $A(x)$  و  $\rho$  جرم مخصوص تیر است.



شکل (۱): شکل تیر و المان در نظر گرفته شده برای آن.

معادله حرکت در راستای  $y$  بصورت زیر است:

$$+\uparrow \sum F_y = dm \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}$$

$$V + f(x,t) dx - (V + dV) = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

با ساده سازی، معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$-\frac{\partial V}{\partial x} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

چون تیر نازک فرض شده است، ممان اینرسی دورانی  $I \approx 0$  در نظر گرفته می شود. بنابراین معادله حرکت زیر را نیز می توان نوشت:

$$\curvearrowright \sum M_G = 0$$

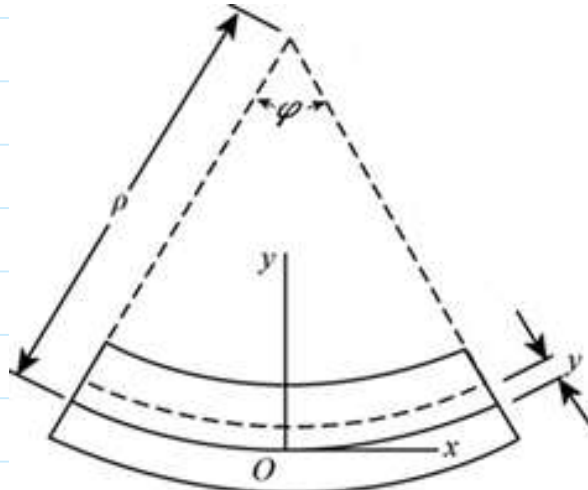
بنابراین:

$$-M - V \frac{dx}{2} - (V + dV) \frac{dx}{2} + (M + dM) = 0 \rightarrow V = \frac{dM}{dx}$$

با جایگذاری در رابطه قبل می توان نوشت:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

برای تیر تحت خمش ساده می‌توان با توجه به شکل (۲) رابطه زیر را برای کرنش محوری در نظر گرفت:



شکل (۲) خمش ساده تیر

المانی به زاویه  $\Delta\varphi$  در موقعیت  $y$  در نظر گرفته شده و کرنش طولی آن محاسبه می‌گردد. کرنش عبارت است از تغییر طول المان به طول اولیه آن. طول اولیه و یا طول تا خنثی المان برابر  $\Delta s = \rho \Delta\varphi$  و تغییر طول المان برابر  $\Delta u = -y \Delta\varphi$  است، بنابراین کرنش عبارت است از:

$$\epsilon_x = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{-y \Delta\varphi}{\Delta s} = -y \frac{d\varphi}{ds} = -y \frac{d\varphi}{\rho d\varphi} = -\frac{y}{\rho}$$

از طرفی از روابط مقاومت مصالح:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \sigma_x = -\frac{My}{I} \end{array} \right\} \rightarrow \epsilon_x = -\frac{My}{EI}$$

بنابراین از تساوی این دو رابطه:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

همچنین می‌توان از ریاضیات رابطه زیر را برای انحنای نوشت:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}{\left(1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

در صورتیکه شیب  $\frac{\partial w}{\partial x}$  کوچک باشد می‌توان از عبارت  $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$  صرف‌نظر کرد، بطوریکه  $\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  خواهد بود. بنابراین:

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل حرکت می توان نوشت:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

در نهایت معادله ارتعاشات عرضی اجباری تیر اویلر-برنولی بصورت زیر بدست خواهد بود:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x, t)$$

دیده می شود که معادله ارتعاشات اجباری تیر با معادلات موجی که قبلاً برای کابل و میله بدست آمد متفاوت بوده و از مرتبه چهارم است.

اگر فرض شود که  $E$  و  $I$ ،  $A$  ثابت باشند و  $f(x, t) = 0$  شود، می توان معادله ارتعاشات عرضی آزاد تیر را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

و یا:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, a^4 = \frac{\rho A}{EI}$$

برای حل کردن این معادله دیفرانسیل می توان از روش جداسازی متغیرها استفاده نمود. با تعریف:

$$w(x, t) = X(x) T(t)$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل، می توان نوشت:

$$T \frac{d^4 X}{dx^4} + a^4 X \frac{d^2 T}{dt^2} = 0 \rightarrow \frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} = -a^4 \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \beta^4$$

سمت چپ تابعی از متغیر مستقل مکان و سمت راست تابعی از متغیر مستقل زمان است. تغییرات متغیر مکان اثری بر سمت راست نداشته و متقابلاً تغییرات متغیر زمان اثری بر سمت چپ ندارد. در نتیجه این عبارات می بایست که برابر مقدار ثابتی باشند. به عبارت دیگر، می توان به معادلات زیر رسید

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \\ \frac{d^4 X}{dx^4} - \beta^4 X = 0 \end{cases}$$

که در آن  $\omega = \frac{\beta^2}{a^2}$ .

جواب معادله دیفرانسیل اول که معادله ای با شرایط اولیه می باشد قسمت زمانی پاسخ تیر را به صورت زیر می دهد:

$$T(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)$$

پاسخ معادله دوم که معادله دیفرانسیل مرتبه چهار با شرایط مرزی می باشد را می توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$X(x) = X_0 e^{rx}$$

با جایگذاری در معادله دیفرانسیل می توان نوشت:

$$r^4 X_0 e^{rx} - \beta^4 X_0 e^{rx} = 0 \rightarrow (r^4 - \beta^4) X_0 e^{rx} = 0$$

به عبارت دیگر می توان معادله مشخصه و جواب های آن را بصورت زیر نوشت:

$$r^4 - \beta^4 = 0 \rightarrow r = \pm \beta, r = \pm j\beta$$

بدین ترتیب جواب معادله دیفرانسیل مکانی بصورت زیر خواهد بود:

$$X(x) = C_1 e^{j\beta x} + C_2 e^{-j\beta x} + C_3 e^{\beta x} + C_4 e^{-\beta x}$$

از روابط ریاضی زیر می توان استفاده نمود و جواب معادله دیفرانسیل را بازنویسی کرد:

$$\sinh \beta x = \frac{1}{2} (e^{\beta x} - e^{-\beta x})$$

$$\cosh \beta x = \frac{1}{2} (e^{\beta x} + e^{-\beta x})$$

$$e^{j\beta x} = \cos \beta x \pm j \sin \beta x$$

در نهایت می توان پاسخ مکانی را بصورت ترکیب خطی از از پاسخ های بدست آمده نوشت:

$$X(x) = B_1 \cosh \beta x + B_2 \sinh \beta x + B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x$$

که در آن:

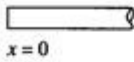


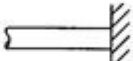



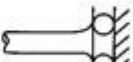
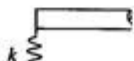







$$\beta^4 = a^4 \omega^2 \rightarrow \omega_n^2 = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

ثابت های  $B_1, B_2, B_3, B_4$  از شرایط مرزی تیر بدست می آیند. همانگونه که دیده می شود تعداد شرایط مرزی در هر انتها برای تیر دو می باشد.

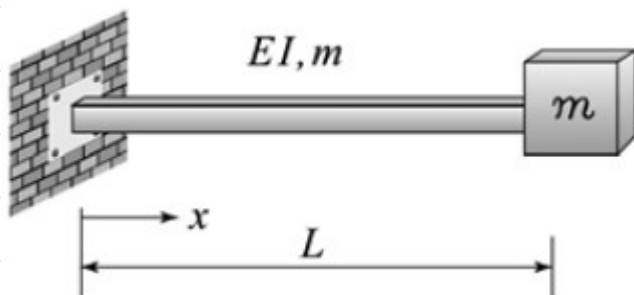
مثلاً برای تیر با لبه گیردار این شرایط جابجایی و شیب صفر است.

جدولی که در ادامه ارائه شده است، شرایط مرزی متعارف و غیر متعارف را برای تیرها نشان می دهد:

Boundary Conditions of a Beams†

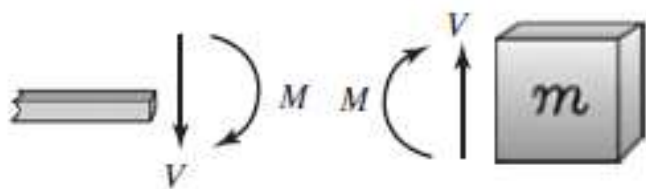
Boundary condition	At left end ( $x = 0$ )	At right end ( $x = l$ )
1. Free end (bending moment = 0, shear force = 0)	 $x = 0$	 $x = l$
	$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = 0$	$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = 0$
2. Fixed end (deflection = 0, slope = 0)	 $x = 0$	 $x = l$
	$w(0, t) = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$	$w(l, t) = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0$
3. Simply supported end (deflection = 0, bending moment = 0)	 $x = 0$	 $x = l$
	$w(0, t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$	$w(l, t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$
4. Sliding end (slope = 0, shear force = 0)	 $x = 0$	 $x = l$
	$\frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial x}(l, t) = 0$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = 0$
5. End spring (spring constant = $k$ )	 $x = 0$	 $x = l$
	$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -kw(0, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$	$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = kw(l, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$
6. End damper (damping constant = $\zeta$ )	 $x = 0$	 $x = l$
	$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -\zeta \frac{\partial w}{\partial t}(0, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$	$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = \zeta \frac{\partial w}{\partial t}(l, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$
7. End mass (mass = $m$ with negligible moment of inertia)	 $x = 0$	 $x = l$
	$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, t) = 0$	$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l, t)$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$ $EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(l, t) = 0$
8. End mass with moment of inertia (mass = $m$ , moment of inertia = $J_0$ )	 $x = 0$	 $x = l$
	$-J_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}(0, t)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(0,t)} = -m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(0, t)$	$J_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}(l, t)$ $\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big _{(l,t)} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(l, t)$

مثلاً برای تیری که در انتها جرم متمرکز  $m$  مطابق شکل دارد.



شکل (۳) تیر یک سر گیردار با جرمی در انتها.

از رسم دیاگرام جرم آزاد انتهای تیر:



شکل (۴) دیاگرام جسم آزاد تیر یک سر گیردار با جرمی در انتها.

از نوشتن قانون دوم نیوتن برای جرم  $m$ :

$$+\uparrow \sum F_y = m \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=L} \rightarrow V(L, t) = m \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=L}$$

از آنجا که  $V = \frac{dM}{dx}$  و  $M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$  است:

$$V = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

بنابراین:

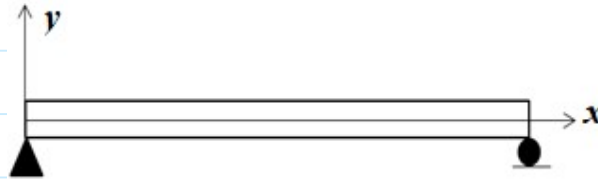
$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right|_{x=L} = m \left. \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=L}$$

همچنین از نوشتن قانون دوم نیوتن به فرم حرکت دورانی برای جرم  $m$ :

$$\sum M_G = 0 \rightarrow M(L, t) = 0 \rightarrow \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0$$

## مثال: تیر دو سر مفصل

هندسه تیر در شکل (۵) نشان داده شده است. شرایط مرزی این تیر را می‌توان بصورت زیر نوشت:



شکل (۵): نمای هندسی تیر دو سر مفصل.

$$\text{at } x = 0 \rightarrow w(0,t) = 0, EI \frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{at } x = L \rightarrow w(L,t) = 0, EI \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0$$

این شرایط مربوط به جابجایی و ممان صفر در دو انتها است. از آنجا که این شرایط تابعی از زمان نیستند، آنها را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$X(0) = 0, X(L) = 0$$

$$\frac{d^2 X(0)}{dx^2} = 0, \frac{d^2 X(L)}{dx^2} = 0$$

همانطور که دیده می‌شود در اینجا به مشتق دوم پاسخ مکانی نیاز است. با در نظر گرفتن پاسخ  $X$ ، مشتقات آنرا می‌توان بدست آورد.

$$X(x) = B_1 \cosh \beta x + B_2 \sinh \beta x + B_3 \cos \beta x + B_4 \sin \beta x$$

$$X'(x) = \beta (B_1 \sinh \beta x + B_2 \cosh \beta x - B_3 \sin \beta x + B_4 \cos \beta x)$$

$$X''(x) = \beta^2 (B_1 \cosh \beta x + B_2 \sinh \beta x - B_3 \cos \beta x - B_4 \sin \beta x)$$

مثلاً با جاگذاری لبه صفر در  $X$ :

$$X(0) = B_1 \cosh 0 + B_2 \sinh 0 + B_3 \cos 0 + B_4 \sin 0$$

$$X(0) = B_1 + B_3$$

با جایگذاری پاسخ در شرایط مرزی می‌توان به دستگاه معادلات زیر رسید:

$$B_1 + B_3 = 0$$

$$B_1 \cosh \beta L + B_2 \sinh \beta L + B_3 \cos \beta L + B_4 \sin \beta L = 0$$

$$B_1 - B_3 = 0$$

$$B_1 \cosh \beta L + B_2 \sinh \beta L - B_3 \cos \beta L - B_4 \sin \beta L = 0$$

از معادله اول و سوم این دستگاه معادلات می‌توان گفت که:

$$B_1 = B_3 = 0$$



با اعمال این مقادیر در رابطه قبلی، دستگاه معادلات بالا به دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sinh \beta L & \sin \beta L \\ \sinh \beta L & -\sin \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای اینکه دستگاه معادلات بالا جواب غیربدیهی داشته باشد، دترمینان ضرایب می‌بایست صفر شود:

$$2 \sin \beta L \sinh \beta L = 0 \rightarrow \sin \beta L = 0 = \sin n\pi$$

$$\rightarrow \beta_n = \frac{n\pi}{L}, n = 1, \infty$$

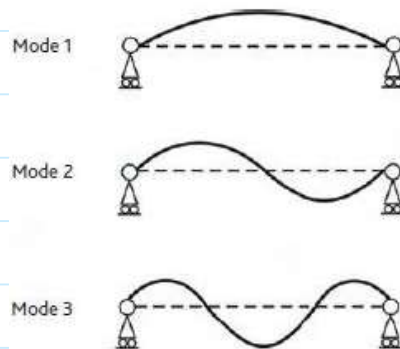
همچنین از این رابطه  $B_2=0$  بدست می‌آید. بنابراین معادله مشخصه فرکانسی تیر بصورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

شکل مودهای تیر نیز از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x$$

در شکل (۶) سه شکل مود اول تیر دو سر مفصل نشان داده شده است.



شکل (۶): سه شکل مود اول تیر دو سر مفصل.

در حالت کلی از آنجا که سمت راست معادلات شرایط مرزی صفر است، می‌توان دترمینان ماتریس ضرایب این معادلات را برابر صفر قرار داد:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cosh \beta L & \sinh \beta L & \cos \beta L & \sin \beta L \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cosh \beta L & \sinh \beta L & -\cos \beta L & -\sin \beta L \end{vmatrix} = 0$$

که منجر به همان جوابها می‌شود.

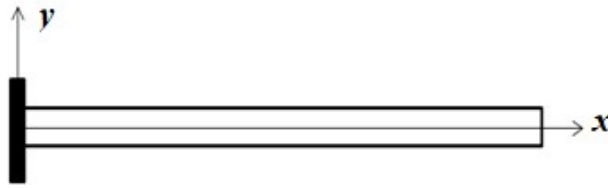
پاسخ نهایی سیستم، بصورت ترکیب خطی از شکل مودها می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cos \omega_n t + F_n \sin \omega_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

در این رابطه  $F_n = A_2 B_4$  و  $E_n = A_1 B_4$  است. از قرار دادن شرایط اولیه به مانند مسائل کابل و میله پاسخ تیر بدست می‌آید.

## تیر یک سر گیردار

هندسه تیر در شکل (۷) نشان داده شده است. شرایط مرزی این تیر را می‌توان بصورت زیر نوشت:



شکل (۷): نمای هندسی تیر یک سر گیردار.

$$\text{at } x = 0 \rightarrow w(0,t) = 0, \frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = 0$$

$$\text{at } x = L \rightarrow EI \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} \right) = 0$$

به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$X(0) = 0, \frac{dX(0)}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2 X(L)}{dx^2} = 0, \frac{d^3 X(L)}{dx^3} = 0$$

با جایگذاری پاسخ مکانی در شرایط مرزی می‌توان به دستگاه معادلات زیر رسید:

$$B_1 + B_3 = 0$$

$$B_1 \cosh \beta L + B_2 \sinh \beta L - B_3 \cos \beta L - B_4 \sin \beta L = 0$$

$$B_2 + B_4 = 0$$

$$B_1 \sinh \beta L + B_2 \cosh \beta L + B_3 \sin \beta L - B_4 \cos \beta L = 0$$

از معادله اول و سوم این دستگاه معادلات می‌توان گفت که:

$$B_3 = -B_1$$

$$B_4 = -B_2$$

با اعمال این روابط در معادلات دوم و چهارم قبلی، دستگاه معادلات بالا به دستگاه دو معادله و دو مجهول زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \cosh \beta L + \cos \beta L & \sinh \beta L + \sin \beta L \\ \sinh \beta L - \sin \beta L & \cosh \beta L + \cos \beta L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

برای اینکه دستگاه معادلات بالا جواب غیربدیهی داشته باشد، باید دترمینان ضرایب صفر شود:

$$1 + \cosh \beta L \cos \beta L = 0$$

معادله بالا، معادله فرکانسی تیر یک سر گیردار است. با حل معادله بالا می‌توان ریشه‌های زیر را بدست آورد:

$$\beta_n L = \{\beta_1 L, \beta_2 L, \beta_3 L, \beta_4 L, \dots\}$$

$$\beta_1 L = 1.875104, \beta_2 L = 4.694091$$

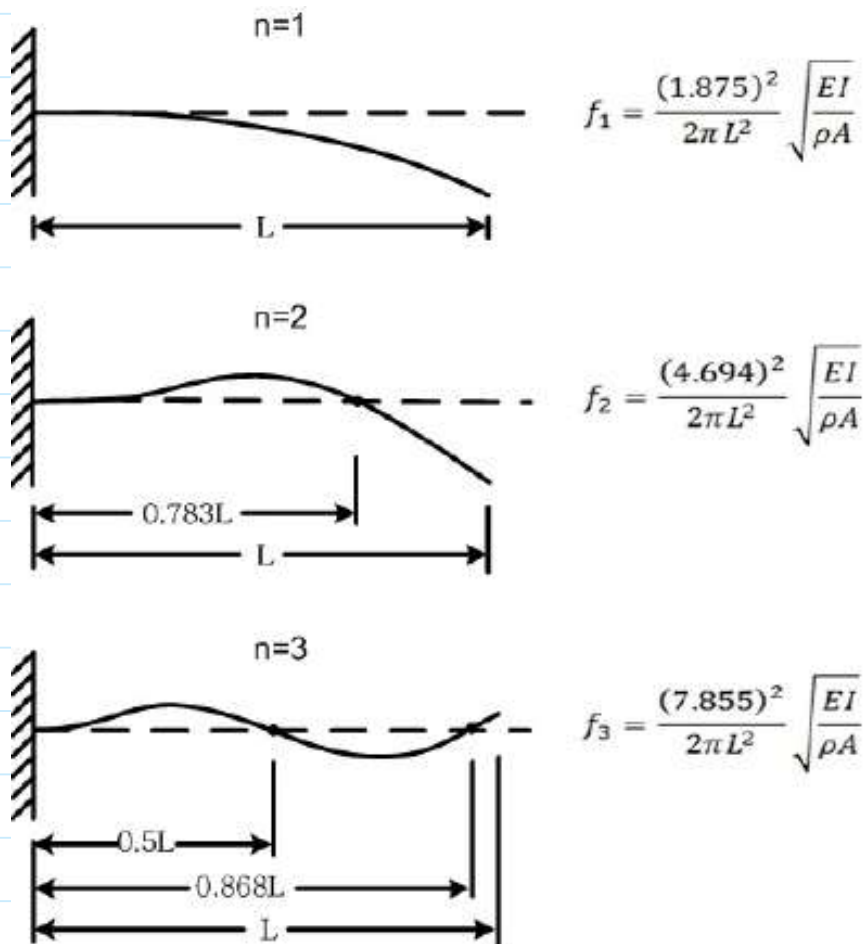
$$\beta_3 L = 7.854757, \beta_4 L = 10.995541$$

شکل مودهای تیر نیز از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$X(x) = C_n (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x - K_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x))$$


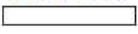
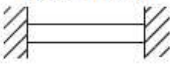
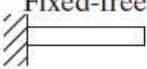
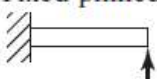

$$K_n = \frac{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L}{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L}$$

سه شکل مود اول تیر یک سر گیردار به همراه محل گره‌ها و فرکانس طبیعی (بر حسب هرتز) در شکل (۸) نشان داده شده است.



شکل (۸): سه شکل مود اول تیر یک سر گیردار.

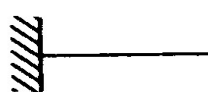




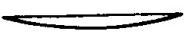

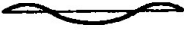
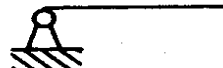
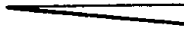




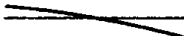

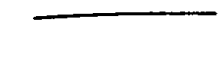



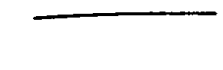
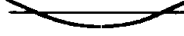






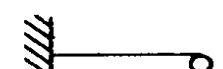


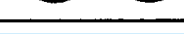
در شکل (۹) معادله فرکانسی، شکل مودها و مقادیر  $\beta l$  ها برای تیرها با شرایط مرزی متعارف نشان داده شده است.

End Conditions of Beam	Frequency Equation	Mode Shape (Normal Function)	Value of $\beta_n l$
Pinned-pinned 	$\sin \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x]$	$\beta_1 l = \pi$ $\beta_2 l = 2\pi$ $\beta_3 l = 3\pi$ $\beta_4 l = 4\pi$
Free-free 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x + \sinh \beta_n x$ $+ \alpha_n (\cos \beta_n x + \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cosh \beta_n l - \cos \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$ ( $\beta l = 0$ for rigid-body mode)
Fixed-fixed 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = 1$	$W_n(x) = C_n [\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x$ $+ \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left( \frac{\sinh \beta_n l - \sin \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 4.730041$ $\beta_2 l = 7.853205$ $\beta_3 l = 10.995608$ $\beta_4 l = 14.137165$
Fixed-free 	$\cos \beta_n l \cdot \cosh \beta_n l = -1$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x$ $- \alpha_n (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l + \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l + \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 1.875104$ $\beta_2 l = 4.694091$ $\beta_3 l = 7.854757$ $\beta_4 l = 10.995541$
Fixed-pinned 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x$ $+ \alpha_n (\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x)]$ where $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l - \sinh \beta_n l}{\cos \beta_n l - \cosh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$
Pinned-free 	$\tan \beta_n l - \tanh \beta_n l = 0$	$W_n(x) = C_n [\sin \beta_n x + \alpha_n \sinh \beta_n x]$ where $\alpha_n = \left( \frac{\sin \beta_n l}{\sinh \beta_n l} \right)$	$\beta_1 l = 3.926602$ $\beta_2 l = 7.068583$ $\beta_3 l = 10.210176$ $\beta_4 l = 13.351768$ ( $\beta l = 0$ for rigid-body mode)

شکل (۹): تیر با شرایط متعارف.

در شکل (۱۰) چند شکل مود اول این تیرها نمایش داده شده است.

$$\omega = \frac{(\beta l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad Y(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x$$

Beam	Natural Modes	$\beta l$	$(\beta l)^2$
		1.875	3.52
		4.694	22.03
		7.855	61.70
		3.141	9.87 = $\pi^2$
		6.283	39.5 = $4\pi^2$
		9.425	88.9 = $9\pi^2$
		0	0
		3.927	15.42
		7.069	50.0
		10.21	104.3
		0	0
		2.362	5.59
		5.493	30.2
		8.64	74.6
		0	0
		0	0
		4.73	22.40
		7.853	61.6
		10.996	120.9
		4.73	22.4
		7.853	61.6
		10.996	120.9
		3.927	15.42
		7.069	50.0

شکل (۱۰): چند شکل مود اول تیرهای متعارف