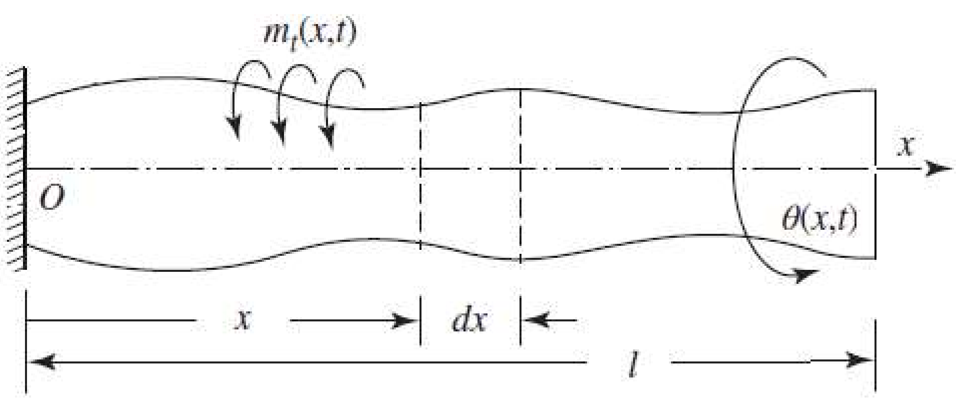
ارتعاشات پیچشی میله‌ها Torsional Vibrations of Rods

ارتعاشات پیچشی یکی از انواع ارتعاشاتی است که زیاد با آن سر و کار داریم. راه اصلی انتقال قدرت در دستگاه های صنعتی استفاده از محورهای دوار است (توربین، کمپرسور و ...). بنابراین ارتعاشات پیچشی بسیار مهم می‌شود. می‌توان حرکت ارتعاشی ماشین های دوار را ترکیبی از دو حرکت دورانی و حرکت ارتعاش پیچشی در نظر گرفت (استفاده از اصل سوپرپوزیشن). توجه داشته باشید که این ارتعاشات پیچشی گاهی در جهت دوران است و گاهی در خلاف جهت دوران، بنابراین سیستم دورانی در عین حرکت ارتعاش نیز دارد.

میله باریکی به طول L و جرم مخصوص ρ (x) با مقطع متغیر را که تحت گشتاور خارجی $m_t(x,t)$ بر واحد طول است را در نظر بگیرید. در اثر اعمال گشتاور تغییر فرم زاویه ای $\theta(x,t)$ رخ می دهد.



فرضیات:

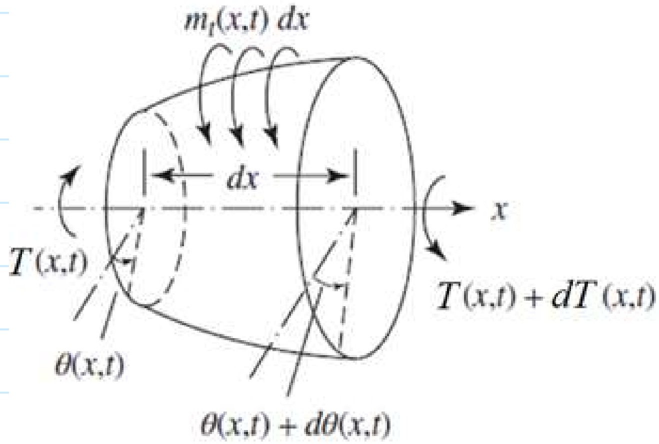
- میله دارای خاصیت الاستیک است.
- جابجایی زاویه‌ها در حد کوچک است.
- نسبت طول به قطر زیاد است.

در اثر کوپل موجود در میله، در هر نقطه آن تغییر مکان زاویه ای نسبت به طرف دیگر خواهیم داشت.

همانگونه که شکل نشان می دهد، دوران میله تابعی از x و t است و چون در طول میله بینهایت المان می‌توان تعریف نمود، بی‌نهایت درجه آزادی خواهیم داشت. از مقاومت مصالح می دانیم که گشتاور اعمالی به میله متناسب با تغییرات دوران در طول آن است:

$$T \approx \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \Rightarrow T = GJ\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

که G مدول پیچشی و J ممان قطبی سطح است.



از نوشتن قانون دوم نیوتن به فرم حرکت دورانی برای المان مورد نظر:

$$\sum T = dI \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{T} + \frac{\partial T}{\partial x}dx - \cancel{T} + m_t(x,t)dx = dI \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

در این رابطه dI ممان اینرسی جرمی المان به طول dx است که برای مقطع دایره ای برابر است با:

$$dI = \int_0^r \rho(2\pi r)r^2 dr dx = 2\pi dx \rho \int_0^r r^3 dr$$

$$= \frac{1}{2}\pi r^4 \rho dx$$

$$= \rho J dx \qquad , J = \frac{1}{2}\pi r^4$$

با ساده کردن رابطه بالا:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + m_t(x,t) = \rho J \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

همچنین با بیان کوپل بر حسب دوران:

$$\frac{\partial}{\partial x}(GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}) + m_t(x,t) = \rho J \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

این معادله ارتعاشات پیچشی اجباری میله می باشد. در صورتیکه G و J ثابت باشند و ارتعاشات آزاد مطرح باشد(m_t=0):

$$G\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \qquad \Rightarrow \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$$

که همان معادله موج است که برای ارتعاشات عرضی کابل و طولی میله بدست آمد. در این معادله:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

که c سرعت انتشار موج پیچشی بوده و واحد آن در سیستم متریک m/s می‌باشد.

حال برای حل این معادله از روش جدا سازی متغیرها استفاده می شود که در آن $\theta(x,t)=\Theta(x).F(t)$:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{d^2\Theta}{dx^2}\cdot F = \Theta''.F$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = \Theta\frac{d^2F}{dt^2} = \Theta.\ddot{F}$$

با قرار دادن در معادله دیفرانسیل حرکت:

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d^2F}{dt^2} \qquad \Rightarrow F\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{1}{c^2}\Theta\frac{d^2F}{dt^2}$$

از تقسیم دو طرف معادله بر ΘF:

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{dx^2} = \frac{1}{F}\frac{1}{c^2}\frac{d^2F}{dt^2}$$

سمت راست تابعی از متغیر مستقل زمان است و تغییرات آن اثری بر سمت چپ که تابعی از متغیر مستقل مکان می باشد ندارد، بنابراین با توجه به اینکه دو طرف تساوی مستقل از هم هستند برای اینکه تساوی آن‌ها برقرار باشد باید برابر با یک مقدار ثابت باشند.

همچنین برای اینکه حرکت تکرار شونده باشد آن مقدار ثابت باید منفی باشد. در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{dx^2}=\frac{1}{F}\frac{1}{c^2}\frac{d^2F}{dt^2}=-\frac{\omega^2}{c^2}$$

از اینجا دو معادله دیفرانسیل مرتبه دو، یکی بر حسب مکان و دیگری بر حسب زمان بدست می آید:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Theta}\dfrac{d^2\Theta}{dx^2}=-\dfrac{\omega^2}{c^2}\\ \dfrac{1}{F}\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2F}{dt^2}=-\dfrac{\omega^2}{c^2}\end{cases}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2\Theta}{dx^2}+\dfrac{\omega^2}{c^2}\Theta=0\\ \dfrac{d^2F}{dt^2}+\omega^2F=0\end{cases}$$

پاسخ این معادلات عبارت است از:

$$\begin{cases}\Theta(x)=A\cos(\dfrac{\omega}{c}x)+B\sin(\dfrac{\omega}{c}x)\\ F(t)=C\cos(\omega t)+D\sin(\omega t)\end{cases}$$

مسئله اول دارای دو شرط مرزی در دو انتهای میله است. مسئله دوم نیز دارای دو شرط اولیه در زمان صفر می باشد.

شرایط مرزی به دو دسته تقسیم می شوند:

- شرایط مرزی سینماتیکی (Drichlet , Kinematic B.C , Geometric)
- شرایط مرزی نیرویی (Neumann, Force , Dynamic , Kinetic)

مثلاً برای تکیه گاه ثابت مقدار θ صفر است، ویا در انتهای آزاد میله کوپل پیچشی و یا مشتق θ صفر است.

این شرایط به صورت شرایط متعارف و غیر متعارف مطرح می شوند. شکل بعدی این شرایط را برای دو طرف میله نشان می دهد:

Boundary condition	At left end ($x = 0$)	At right end ($x = l$)
Fixed end	$x = 0$ $\quad \theta(0, t) = 0$	$x = l$ $\quad \theta(l, t) = 0$
Free end	$x = 0$ $\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}(0, t) = 0$	$x = l$ $\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}(l, t) = 0$
End torsional spring (spring constant = k_t)	k_t $\quad x = 0$ $\quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(0, t) = k_t\theta(0, t)$	k_t $\quad x = l$ $\quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(l, t) = -k_t\theta(l, t)$
End torsional damper (damping constant = c_t)	c_t $\quad x = 0$ $\quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(0, t) = c_t\frac{\partial\theta}{\partial t}(0, t)$	c_t $\quad x = l$ $\quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(l, t) = -c_t\frac{\partial\theta}{\partial t}(l, t)$
End inertia (inertia = J_0)	J_0 $\quad x = 0$ $\quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(0, t) = J_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(0, t)$	J_0 $\quad x = l$ $\quad GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(l, t) = -J_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(l, t)$

در ادامه مثال هایی از ارتعاشات آزاد پیچشی میله ها ارائه می شود:

مثال ۱: ارتعاشات آزاد میله‌ای که از یک طرف ثابت و از طرف دیگر آزاد است.

در اینصورت در تکیه گاه ثابت:

$$\theta(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \Theta(0) = 0 \quad \Rightarrow A\cos\cancel{0} + B\sin\cancel{0} = 0 \quad \Rightarrow A = 0$$

در سر آزاد میله:

$$T(\ell,t) = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow GJ\frac{\partial\Theta(\ell)}{\partial x}F = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial\Theta}{\partial x}(\ell) = 0$$

با گرفتن مشتق و قرار دادن در شرط مرزی:

$$B\frac{\omega}{c}\cos(\frac{\omega}{c}\ell) = 0 \quad \Rightarrow \cos(\frac{\omega}{c}\ell) = 0 = \cos(\frac{2n-1}{2}\pi), \quad n = 1,\infty$$

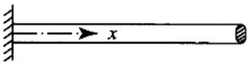
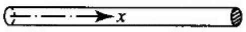
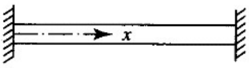
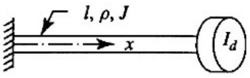
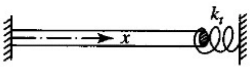
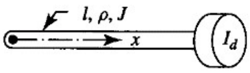
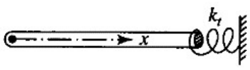
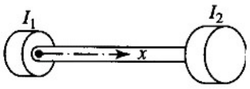
از این رابطه دیده می شود که می توان بینهایت مقدار برای فرکانس طبیعی بدست آورد.

$$\omega_n = (\frac{2n-1}{2})\frac{\pi c}{\ell}, \quad n = 1,\infty$$

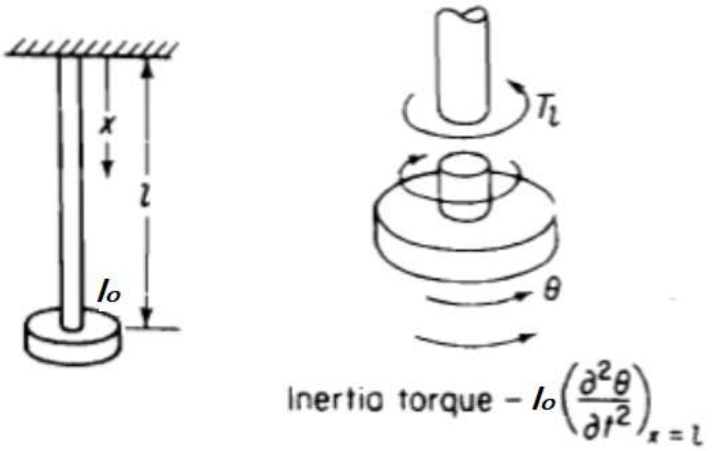
شکل مودهای ارتعاشات پیچشی نیز عبارتند از:

$$\Theta_n(x) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

در جدول شکل بعد مقادیر شرایط مرزی، معادله فرکانسی، شکل مود و فرکانسهای طبیعی برای میله ای با انواع مختلف شرایط مرزی ارائه شده است:

End conditions of shaft	Boundary conditions	Frequency equation	Mode shape (normal function)	Natural frequencies
1. Fixed–free 	$\theta(0,t)=0$ $\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=0$	$\cos\frac{\omega l}{c}=0$	$\Theta_n(x)=C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$	$\omega_n=\frac{(2n+1)\pi c}{2l}$, $n=0,1,2,\ldots$
2. Free–free 	$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)=0$ $\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$\Theta_n(x)=C_n\cos\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$, $n=0,1,2,\ldots$
3. Fixed–fixed 	$\theta(0,t)=0$ $\theta(l,t)=0$	$\sin\frac{\omega l}{c}=0$	$\Theta_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi x}{l}$	$\omega_n=\frac{n\pi c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
4. Fixed–disk 	$\theta(0,t)=0$ $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=-I_d\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(l,t)$	$\alpha\tan\alpha=\beta$ $\alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\beta=\frac{\rho Jl}{I_d}$	$\Theta_n(x)=C_n\sin\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
5. Fixed–torsional spring 	$\theta(0,t)=0$ $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=-k_t\theta(l,t)$	$\alpha\tan\alpha=-\beta$ $\alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\beta=\frac{\omega^2\rho Jl}{k_t}$	$\Theta_n(x)=C_n\sin\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
6. Free–disk 	$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)=0$ $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=-I_d\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(l,t)$	$\alpha\cot\alpha=-\beta$ $\alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\beta=\frac{\rho Jl}{I_d}$	$\Theta_n(x)=C_n\cos\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
7. Free–torsional spring 	$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)=0$ $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=-k_t\theta(l,t)$	$\alpha\cot\alpha=\beta$ $\alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\beta=\frac{\omega^2\rho Jl}{k_t}$	$\Theta_n(x)=C_n\cos\frac{\omega_n x}{c}$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$
8. Disk–disk 	$GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t)=I_1\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(0,t)$ $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}(l,t)=-I_2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(l,t)$	$\tan\alpha=\frac{\alpha(\beta_1+\beta_2)}{(\alpha^2-\beta_1\beta_2)}$ $\alpha=\frac{\omega l}{c}$ $\beta_1=\frac{I_0}{I_1}=\frac{\rho Jl}{I_1}$ $\beta_2=\frac{I_0}{I_2}=\frac{\rho Jl}{I_2}$	$\Theta_n(x)=C_n\left(\cos\frac{\alpha_n x}{l}-\frac{\alpha_n}{\beta_1}\sin\frac{\alpha_n x}{l}\right)$	$\omega_n=\frac{\alpha_n c}{l}$, $n=1,2,3,\ldots$

مثال ۲: مثال قبل کمی از واقعیت به دور است. مثلاً در مورد لوله های حفاری چاه های نفت، لوله های انتهایی سنگین بوده (و یا جرم مته در انتها قرار دارد) و می بایست اینرسی آنها را در نظر گرفت. اگر شکل میله به فرم زیر به صورتی که در انتها جسمی با مقداری ممان اینرسی جرمی مثلاً I_o قرار گرفته باشد:



شرط ثابت بودن ابتدای میله مانند مثال قبل است. برای شرط انتهای میله، دیاگرام جسم آزاد انتهای میله در شکل نشان داده شده است.

$$\sum T = I_0\ddot{\theta} \Rightarrow -T_\ell = I_0\ddot{\theta} \quad \Rightarrow GJ_p\frac{\partial\theta}{\partial x}(\ell,t) = -I_0\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}(\ell,t)$$

اگر پاسخ مکانی کلی را در این معادله قرار داده و با توجه به آنکه پاسخ تابع زمانی F تابعی هارمونیک است، لذا:

$$GJ_p\frac{\partial\theta}{\partial x}(\ell,t) = -I_0(-\omega^2\theta(\ell,t)) = I_0\omega^2\theta(\ell,t)$$

$$\Rightarrow \quad GJ_pF\frac{\partial\Theta(\ell)}{\partial x} = I_0\omega^2F\Theta(\ell)$$

که J_p ممان اینرسی قطبی میله (لوله) است. از قرار دادن پاسخ Θ در این معادله:

$$GJ_p(\frac{\omega}{c})\cos(\frac{\omega\ell}{c}) = I_0\omega^2\sin(\frac{\omega\ell}{c})$$

$$\tan(\frac{\omega\ell}{c}) = \frac{GJ_p}{I_0\omega c} \quad \Rightarrow \tan(\frac{\omega\ell}{c}) = \frac{\rho c^2J_p}{I_0\omega c}\times\frac{\ell}{\ell}$$

بنابراین:

$$\tan(\frac{\omega\ell}{c}) = \frac{\rho J_p\ell}{I_0}\times\frac{c}{\omega\ell}$$

در صورتیکه $\beta=\omega l/c$:

$$\tan(\beta) = \frac{\rho J_p\ell}{I_0}\frac{1}{\beta} \quad \Rightarrow \beta\tan(\beta) = \frac{\rho J_p\ell}{I_0} = \frac{I_p}{I_0}$$

مثلاً اگر رشته حفاری در نظر گرفته شود که طول لوله های حفاری (Drill Pipes) 5000 ft، و طول لوله‌های وزنه (Drill Collars) 120 ft باشد، و مشخصات این لوله‌ها به شرح زیر باشند:

$$D.P:\begin{cases} O.D = 4\frac{1}{2}'' \\ I.D = 3.83'' \end{cases}, D.C:\begin{cases} O.D = 7\frac{3}{8}'' \\ I.D = 2'' \end{cases}$$

که هر دو از جنس فولاد هستند. در اینصورت مقادیر I_p و Io عبارتند از:

$$\left.\begin{array}{l} D.P: \ell = 5000',\ J_p = 0.00094 ft^4,\ I_p = \rho \ell J_p = 71.4 lb.ft.s^2 \\ D.C: \ell = 120', \qquad\qquad\qquad\qquad\quad I_o = 29.3 lb.ft.s^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{I_p}{I_o} = 2.44$$

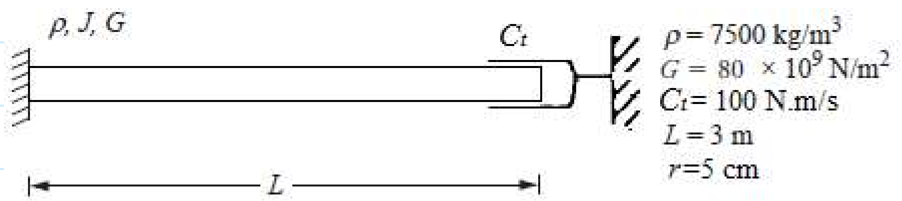
از جاگذاری در معادله فرکانسی و حل آن:

$$\beta \tan\beta = 2.44 \Rightarrow \quad \beta_1 = 1.135, \quad \beta_2 = 3.722$$

سپس می توان فرکانسهای طبیعی پیچشی را بدست آورد:

$$\beta = \frac{\omega \ell}{c} = \omega \ell \sqrt{\frac{\rho}{G}} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 2.41^{rad/s} = 0.384 Hz \\ \omega_2 = 7.93^{rad/s} = 1.26 Hz \end{cases}$$

مثال ۳: مطلوبست تعیین معادله فرکانسی برای ارتعاشات پیچشی میله ای که یک طرف آن ثابت است و در طرف دیگر آن دمپر پیچشی مطابق شکل قرار گرفته است. سپس، سه فرکانس طبیعی اول را بیابید.



در اینجا به علت آنکه سیستم استهلاک دارد، پاسخ زمانی به صورت در نظر گرفته می شود که موهومی دارای قسمتی حقیقی است. با در نظر گرفتن پاسخ بفرم: $\theta(x,t)=\Theta(x)e^{rt}$ و قرار دادن در معادله پیچش میله، معادله زیر برای Θ بدست می آید:

$$\Theta'' - \frac{r^2}{c^2}\Theta = 0$$

حل عمومی این معادله عبارت است از:

$$\Theta(x)=A\ e^{rx/c}+B\ e^{-rx/c}$$

شرایط مرزی عبارتند از:

$$\theta(0,t) = 0 \Rightarrow \Theta(0) = A + B = 0$$

$$GJ\frac{\partial \theta(l,t)}{\partial x} = -C_t \frac{\partial \theta(l,t)}{\partial t} \quad \Rightarrow \Theta'(l) = -\frac{rC_t}{GJ}\Theta(l)$$

از جاگذاری شرط دوم:

$$\Rightarrow \quad Ae^{\frac{rl}{c}}(\frac{cC_t}{GJ}+1) + Be^{-\frac{rl}{c}}(\frac{cC_t}{GJ}-1) = 0$$

با قرار دادن شرایط مرزی و $\gamma=rl/c$ و $a=cC_t/GJ$ یک دستگاه معادلات همگن بدست می آید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{\gamma}(a+1) & e^{-\gamma}(a-1) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

شرط وجود جواب غیر بدیهی صفر شدن دترمینان است، در نتیجه:

$$e^{-\gamma}(a-1) - e^{\gamma}(a+1) = 0 \quad \Rightarrow e^{2\gamma} = \frac{a-1}{a+1}$$

با در نظرگرفتن $\gamma=\alpha+j\beta$ مقادیر α و β عبارتند از:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{a-1}{a+1}\right|, \beta_n = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)\pi}{2} & 0 \le a < 1 \\ n\pi & a > 1 \end{cases} \quad n = 1,\infty$$

بنابراین:

$$\omega_n = \begin{cases} \dfrac{(2n-1)\pi c}{2l} & 0 \le a < 1 \\ \dfrac{n\pi c}{l} & a > 1 \end{cases} \quad n = 1,\infty$$

با توجه به داده های مسئله:

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = 9.817\times10^{-6} m^4, c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3265.986 m/s \quad \Rightarrow a = \frac{cC_t}{GJ} = 0.4158$$

در جدول زیر فرکانسهای طبیعی محاسبه شده و با مقادیر بدست آمده از نرم افزار ANSYS مقایسه شده اند:

ANSYS (Hz)	تحلیلی (Hz)
272.17	272.17
816.57	816.50
1361.20	1360.83