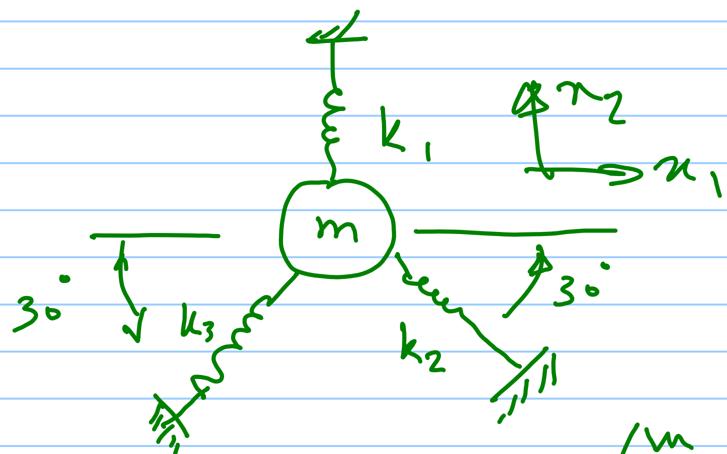
فرکانس‌های طبیعی تکراری — Repeated Natural Frequencies

در برخی موارد ممکن است که فرکانس‌های طبیعی تکراری باشند. این امر در سازه‌های متقارن شرایط یکسان یا تقریباً
داریم رخ می‌دهد.
در این حالت شکل مود مربوط به فرکانس‌های متناظر چگونه است؟ آیا همه شکل مودها هم یکی هستند؟
اگر اینطور باشد، پایه برای تعیین رفتار سیستم تشکیل نخواهد شد.
ابتدا به وسیله یک مثال مسئله را بررسی کنیم:



از نوشتن معادلات حرکت خواهیم داشت:

$$\underline{m}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{\underline{k}}\,\underline{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(k_2+k_3) & \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3-k_2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3-k_2) & k_1+\frac{1}{4}(k_2+k_3) \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در صورتیکه $k_2=k_3$ باشد ماتریس K بصورت قطری درمی‌آید و سیستم بصورت غیرکوپله (Decoupled) می‌شود. در این صورت
از جایگذاری تغییرمکان در معادله داریم

$$(\underline{K}-\lambda\underline{m})\underline{X}=0 \Rightarrow \det(\underline{K}-\lambda\underline{m})=0$$

$$* \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k_2-\omega^2 m & 0 \\ 0 & k_1+\frac{1}{2}k_2-\omega^2 m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}k_2-\omega^2 m\right)\left(k_1+\frac{1}{2}k_2-\omega^2 m\right)=0$$

$$\omega_1^2=\frac{3}{2}\frac{k_2}{m} \qquad \omega_2^2=\frac{k_1}{m}+\frac{k_2}{2m}$$

با بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی می‌توان شکل مودها را از جایگذاری این فرکانس‌ها در معادله بالا بدست آورد:

$$\lambda=\lambda_1=\frac{3}{2}\frac{k_2}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1-k_2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=0 \Rightarrow 0X_1+(k_1-k_2)X_2=0 \Rightarrow X_2=0$$

بنابراین شکل مود اول:

$$\underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای شکل مود دوم هم:

$$\lambda=\lambda_2=\frac{k_1}{m}+\frac{k_2}{2m} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1-k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (k_1-k_2)X_1-0X_2=0 \Rightarrow X_1=0$$

$$\underline{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\Phi}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

همانطور که دیده می‌شود دو شکل مود نسبت به ماتریس جرم بر هم عمودند:

$$\underline{\Phi}_1^T \underline{\underline{m}} \, \underline{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$$

این مورد نشان می‌دهد که در صورتی که $k_2 = k_3$ باشد جابجایی‌های x_1 و x_2 از هم مستقل هستند.

حال فرض کنید که $k_1 \to k_2$: در این صورت در نهایت فرکانس‌های طبیعی یکی می‌شوند یعنی فرکانس‌های طبیعی تکرار می‌گردند.

اما شکل مودهای نشان داده شده در بالا علی‌رغم آنکه اختلاف k_1 و k_2 چقدر کوچک باشد شکل مودی سیستم ثابت می‌مانند.

اما اگر $k_2=k_1$ گردد ماتریس فوق در رابطه * به صورت زیر در می‌آید.

$$\lambda=\lambda_1=\frac{3}{2}\frac{k_2}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

در این صورت هر مقداری را می‌توان برای x_1 و x_2 در نظر گرفت.

یعنی آیا می‌توان هر دو بردار دلخواه را به عنوان شکل مود گرفت؟

اما می‌دانیم که شکل مودها می‌بایست مستقل باشند تا بتوان ترکیبی از آنها را به عنوان جواب در نظر گرفت.

بنابراین در این شرایط هر دو بردار مستقل خطی را می‌توان به عنوان شکل مود در نظر گرفت.

- همچنین منطقی است (اما نه اجباری) که همانند حالت قبل $(k_1\neq k_2)$ از شکل مودهای آن استفاده کرد.
- اما می‌توانستیم از هر دو بردار مستقل خطی دیگر مانند

$$\phi_1=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad \phi_2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

نیز استفاده کنیم.

استقلال خطی:

$$\alpha_1\phi_1+\alpha_2\phi_2=0$$

$$\alpha_1\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}+\alpha_2\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}$$

- اما می‌توانیم شرایط دیگری را نیز اعمال کنیم.

می‌توان شرط گذاشت که رابطه $\phi_i^T m \phi_j=0$ که رابطه اساسی ارتوگونالیتی شکل مودها بود برقرار باشد (دقت داریم که این رابطه قبلاً به صورت $\phi_i^T m \phi_j (\omega_i^2-\omega_j^2)$ بود که فارغ از انتخاب ϕها برقرار است).

- اما اجازه داریم این شرط را که ϕ_1 و ϕ_2 نسبت به ماتریس جرم بر هم عمودند را اعمال کنیم.

- این کار یک معادله اضافی به جای معادلات مربوط به $\det(\underline{K}-\lambda\underline{M})=0$ می‌دهد.

مثلاً فرض کنید که مود اول را به صورت دلخواه $\underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}$ انتخاب کرده و می‌خواهیم مود دوم را بدست آوریم. در این صورت $\underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}$ می‌نویسیم:

$$\underline{\phi}_1^T\underline{M}\underline{\phi}_2=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}m & 0\\0 & m\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}=0$$

$$\begin{bmatrix}m & 2m\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}=m(\phi_1+2\phi_2)=0$$

$$\Rightarrow \quad \phi_2=-\frac{1}{2}\phi_1$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_1\\-\frac{1}{2}\phi_1\end{Bmatrix}=\phi_1\begin{Bmatrix}1\\-1/2\end{Bmatrix}\Rightarrow \underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{Bmatrix} \text{ یا } \begin{Bmatrix}2\\-1\end{Bmatrix}$$

از این روند به عنوان یک روش [illegible] استفاده نمود.

- رنک یک معادله مقدار ویژه به تعداد دفعاتی که فرکانس طبیعی تکرار می‌گردد کاهش می‌یابد. بنابراین اگر ریشه تکرار نشده باشد رنک $(\underline{K}-\underline{M}\omega_j^2)$ برابر $n-1$ است و این به آن معنی است که یک عضو بردار $\underline{\phi}_j$ دلخواه است.

- اگر فرکانس طبیعی به تعداد P بار به عنوان ریشه معادله مشخصه ظاهر گردد، یعنی $\omega_j=\omega_{j+1}=\dots=\omega_{j+p-1}$ ریشه باشد، رنک $(\underline{K}-\underline{M}\omega_j^2)$ برابر $n-P$ خواهد بود و $\underline{\phi}_j$ به تعداد P عضو اختیاری خواهد داشت.

- در این صورت شرایط اضافی را به مسئله تحمیل کرده که مودهای مربوط به فرکانس‌های تکراری نسبت به هم ارتوگونال باشند (به مانند فرکانس‌های غیر تکراری). یعنی:

$$\underline{\phi}_j^T\underline{M}\underline{\phi}_{j+1}=\underline{\phi}_j^T\underline{M}\underline{\phi}_{j+2}=\dots=\underline{\phi}_j^T\underline{M}\underline{\phi}_{j+p-1}=0$$

- تکنیکی برای اعمال این روش به نام Gram-Schmidt Orthogonalization معروف می‌باشد که به تدریج پشت سر هم بردارهای شکل مود را می‌سازد.

مثلاً فرض کنید $p=3$ باشد. بردارهای $\underline{\phi}'_j$ ، $\underline{\phi}'_{j+1}$ و $\underline{\phi}'_{j+2}$ را می‌سازیم:

$\underline{\phi}_j$ ، $\underline{\phi}_{j+1}$ و $\underline{\phi}_{j+2}$ شکل بردارهایی هستند که با استفاده از خاصیت استقلال خطی شکل مودها بدست آمده‌اند ولی خاصیت تعامد بودن نسبت به $\underline{\underline{m}}$ ندارند.

$$\underline{\phi}'_j = \underline{\phi}_j$$

$$\underline{\phi}'_{j+1} = \underline{\phi}_{j+1} + \alpha_{11}\underline{\phi}'_j$$

$$\underline{\phi}'_{j+2} = \underline{\phi}_{j+2} + \alpha_{21}\underline{\phi}'_j + \alpha_{22}\underline{\phi}'_{j+1}$$

ضرائب بالا را به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$* \quad \underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+1} = \underline{\phi}'_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+1} + \alpha_{11}\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{11} = -\frac{\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+1}}{\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j}$$

حال که بردارهای $\underline{\phi}'_j$ و $\underline{\phi}'_{j+1}$ معلوم شده‌اند، شرط تعامد بودن $\underline{\phi}'_{j+2}$ با این دو بردار اعمال می‌شود:

$$\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+2} = \underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\left(\underline{\phi}_{j+2} + \alpha_{21}\underline{\phi}'_j + \alpha_{22}\underline{\phi}'_{j+1}\right)$$

$$= \underline{\phi}'_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+2} + \alpha_{21}\underline{\phi}'_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j + \alpha_{22}\cancel{\underline{\phi}'_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+1}} = 0 \quad \text{از } *$$

$$\Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+2}}{\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j}$$

همچنین:

$$\underline{\phi}'^T_{j+1} \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+2} = \underline{\phi}'^T_{j+1} \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+2} + \alpha_{22}\underline{\phi}'^T_{j+1} \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j = 0$$

که نتیجه می‌دهد :

$$\alpha_{22} = - \frac{\underline{\phi}_{j+1}^{T}\, \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+2}}{\underline{\phi}_{j+1}^{T}\, \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j}}$$

دقت کنید که صورت و مخرج این کسر عدد هستند. این پروسه برای هر تعداد از ریشه‌های تکراری قابل گسترش است. هنگامی که بردارهای جدید محاسبه شدند جایگزین بردارهای قبلی ϕ می‌گردند.

مثال: مطلوبست تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل بردارهای سیستم زیر:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با حل $\det(\underline{\underline{k}} - \lambda \underline{\underline{m}}) = 0$ خواهیم داشت:

$$8\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow -2(\lambda - 4)\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 0$$

$$\lambda_3 = 4 \Rightarrow \omega_3 = 2$$

بنابراین یک ریشه تکراری موجود است.

برای فرکانس طبیعی سوم شکل مود بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\lambda_3 = 4 \Rightarrow (\underline{\underline{k}} - \lambda \underline{\underline{m}})\underline{x} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\,(-2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0) \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ \hline -8x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = -x_1 \leftarrow$$

از معادله سوم $\Rightarrow x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 2(-x_1) - 3x_3 = 0$

$$\Rightarrow x_3 = x_1 \leftarrow$$

$$\underline{X}_3 = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \cancel{x_1}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

با نرمال کردن آن نسبت به ماتریس جرم :

$$\underline{X}_3^T \underline{\underline{m}}\, \underline{X}_3 = 4 \Rightarrow \underline{\phi}_3 = \frac{\underline{X}_3}{\sqrt{4}} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

دو مقدار اول λ یکی است.

$$\lambda_1 = 0$$

$$(\underline{\underline{k}} - \lambda_1 \underline{\underline{m}})\,\underline{X}_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

معادله اول :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

دیده می‌شود که معادله دوم و سوم هم ضرایبی از این معادله هستند. بنابراین ما تنها یک معادله و سه مجهول داریم (دقت دارید رنک ماتریس ضرایب یک است).

بنابراین دو متغیر دلخواه خواهیم داشت.

اگر قرار دهیم $x_3 = 1$ و $x_2 = 0$ نتیجتاً:

$$x_1 - 2(0) + (1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$\underline{x}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

با نرمال کردن آن نسبت به ماتریس جرم:

$$\underline{x}_1^T \underline{\underline{m}}\, \underline{x}_1 = 2 \Rightarrow \underline{\phi}_1 = \frac{\underline{x}_1}{\sqrt{2}} = \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

برای مود دوم هم به همین ترتیب مانند مود اول می‌رسیم. در این صورت اگر متغیرها را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$$x_2 = 1 \quad \text{و} \quad x_3 = 0$$

$$x_1 - 2(1) + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\underline{x}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

این شکل مود در حالت کلی خاصیت ارتوگونالیتی نسبت به ماتریس جرم را ارضا نمی‌کند.

$$\underline{x}_2^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_1 = -\sqrt{2} \neq 0$$

$$\underline{x}_2^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_3 = 0$$

برای داشتن خاصیت ارتوگونالیتی مود دوم، قرار می‌دهیم:

$$\underline{\phi}_2 = \underline{x}_2 + \alpha \underline{\phi}_1$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_2^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_1 = \underline{x}_2^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_1 + \alpha \overbrace{\underline{\phi}_1^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_1}^{m_1} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{m_1} \underline{x}_2^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_1$$

$$m_1 = \underline{\phi}_1^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_1 = 1$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sqrt{2}\begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

با نرمال کردن آن :

$$\underline{\phi}_2^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_2 = 4$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_2 = \frac{\phi_2}{\sqrt{4}} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

بنابراین ماتریس مودال عبارت است از :

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

البته بهتر است جای ستون اول و دوم عوض شود.

در این صورت :

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$