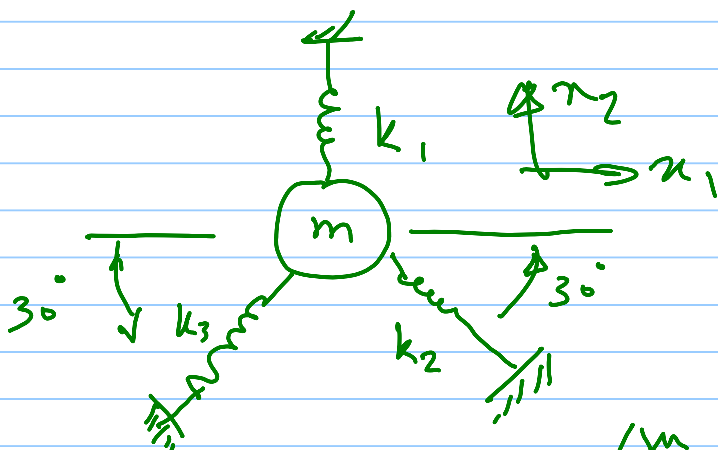
فرکانس‌های طبیعی تکراری — Repeated Natural Frequencies

در برخی موارد ممکن است که فرکانس‌های طبیعی تکراری باشند. این امر در سازه‌های متقارن شرایط تیر با مقطع دایره رخ می‌دهد.

در این حالت شکل مود مربوطه به فرکانس‌های متقارن چگونه است؟ آیا همه شکل مودها هم یکی هستند؟
اگر اینطور باشد، پایه برای تعیین رفتار سیستم تشکیل نخواهد شد.

اجازه بدهید با یک مثال مسئله را بررسی کنیم:



از نوشتن معادلات حرکت خواهیم داشت:

$$\underline{\underline{m}}\,\underline{\ddot{x}} + \underline{\underline{k}}\,\underline{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4}(k_2+k_3) & \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3-k_2) \\ \frac{\sqrt{3}}{4}(k_3-k_2) & k_1+\frac{1}{4}(k_2+k_3) \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در صورتیکه $k_2=k_3$ باشد ماتریس K بصورت قطری در می‌آید و سیستم بصورت غیرکوپله (Decoupled) می‌شود. در این صورت
از جاگذاری تغییرمکان در معادله حرکت

$$(\underline{K}-\lambda\underline{m})\underline{X}=0 \Rightarrow \det(\underline{K}-\lambda\underline{m})=0$$

$$* \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k_2-\omega^2 m & 0 \\ 0 & k_1+\frac{1}{2}k_2-\omega^2 m \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}k_2-\omega^2 m\right)\left(k_1+\frac{1}{2}k_2-\omega^2 m\right)=0$$

$$\omega_1^2=\frac{3}{2}\frac{k_2}{m} \qquad \omega_2^2=\frac{k_1}{m}+\frac{k_2}{2m}$$

با بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی می‌توان شکل مودها را از جاگذاری این فرکانس‌ها در معادله بالا بدست آورد:

$$\lambda=\lambda_1=\frac{3}{2}\frac{k_2}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_1-k_2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=0 \Rightarrow 0x_1+(k_1-k_2)x_2=0 \Rightarrow x_2=0$$

بنابراین شکل مود اول:

$$\underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

برای شکل مود دوم هم:

$$\lambda=\lambda_2=\frac{k_1}{m}+\frac{k_2}{2m} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1-k_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow (k_1-k_2)x_1-0x_2=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$\underline{\Phi}_2=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\x_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\underline{\Phi}_2=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}$$

همانطور که ملاحظه می‌گردد دو شکل مود نسبت به ماتریس جرم بر هم عمودند:

$$\underline{\Phi}_1^T\,\underline{\underline{m}}\,\underline{\Phi}_2=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}=0$$

این مورد نشان می‌دهد که در صورتی که $k_2=k_3$ باشد جابجایی‌های x_1 و x_2 از هم مستقل هستند.

حال فرض کنید که $k_1\to k_2$: در این صورت در نهایت فرکانس‌های طبیعی یکی می‌شوند. یعنی فرکانس‌های طبیعی تکرار می‌گردند.

اما شکل مودهای نشان داده شده در بالا علارغم آنکه اختلاف k_1 و k_2 خیلی کوچک باشد شکل مودهای سیستم ثابت می‌مانند.

اما اگر $k_2=k_1$ گردد ماتریس فرکانس در رابطه * به صورت زیر در می‌آید.

$$\lambda=\lambda_1=\frac{3}{2}\frac{k_2}{m} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

در این صورت هر مقداری را می‌توان برای x_1 و x_2 در نظر گرفت.

یعنی آیا می‌توان هر دو بردار دلخواه را به عنوان شکل مود گرفت؟

اما می‌دانیم که شکل مودها می‌بایست مستقل باشند تا بتوان ترکیبی از آنها را به عنوان جواب در نظر گرفت.

بنابراین در این شرایط هر دو بردار مستقل خطی را می‌توان به عنوان شکل مود در نظر گرفت.

- همچنین منطقی است (اما نه اجباری) که همانند حالت قبل ($k_1\neq k_2$) از شکل مودهای آنها استفاده کرد.
- اما می‌توانستیم از هر دو بردار مستقل خطی دیگر مانند

$$\underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix} \quad \text{و} \quad \underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

نیز استفاده کنیم.

استقلال خطی:

$$\alpha_1\underline{\phi}_1+\alpha_2\underline{\phi}_2=0$$

$$\alpha_1\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}+\alpha_2\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}$$

- اما می‌توانیم شرایط دیگری را نیز اعمال کنیم.

می‌توان شرط گذاشت که رابطه $\underline{\phi}_i^T m \underline{\phi}_j=0$ که رابطه اساس ارتوگونالیتی شکل مودهاست برقرار باشد (دقت داریم که این رابطه به عبارت $(\omega_j^2-\omega_i^2)(\underline{\phi}_i^T m \underline{\phi}_j)=0$ بود که خارج از استثنای ωها برقرار است).

- اما اجازه بدهید این شرط را که $\underline{\phi}_1$ و $\underline{\phi}_2$ نسبت به ماتریس جرم نرم محدود شوند را اعمال کنیم.

- این کار یک معادله اضافی به جای معادلات مربوط به $\det(\underline{k}-\lambda\underline{m})=0$ می‌دهد.

مثال: فرض کنید که مود اول را به صورت دلخواه $\underline{\phi}_1=\begin{Bmatrix}1\\2\end{Bmatrix}$ انتخاب کرده و بخواهیم مود دوم را بدست آوریم. در این صورت $\underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}$ می‌باشد:

$$\underline{\phi}_1^T\underline{m}\,\underline{\phi}_2=[1\quad 2]\begin{pmatrix}m&0\\0&m\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}=0$$

$$[m\quad 2m]\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}=m(\phi_1+2\phi_2)=0$$

$$\Rightarrow\quad \phi_2=-\frac{1}{2}\phi_1$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}\phi_1\\\phi_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_1\\-\frac{1}{2}\phi_1\end{Bmatrix}=\phi_1\begin{Bmatrix}1\\-1/2\end{Bmatrix}\Rightarrow \underline{\phi}_2=\begin{Bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{Bmatrix} \text{ یا } \begin{Bmatrix}2\\-1\end{Bmatrix}$$

از این پروسه به عنوان یک روش می‌توان استفاده نمود.

- رنک یک معادله مقدار ویژه به تعداد دفعاتی که فرکانس طبیعی تکرار می‌گردد کاهش می‌یابد. بنابراین اگر ω_j تکرار نشده باشد رنک $(\underline{k}-\underline{m}\omega_j^2)$ برابر $n-1$ است و این بدان معنی است که یک عضو بردار $\underline{\phi}_j$ دلخواه است.

- اگر فرکانس طبیعی به تعداد p بار به عنوان ریشه معادله مشخصه ظاهر گردد یعنی $\omega_j=\omega_{j+1}=\dots=\omega_{j+p-1}$ باشد، رنک $(\underline{k}-\underline{m}\omega_j^2)$ برابر $n-p$ خواهد بود و $\underline{\phi}_j$ به تعداد p عضو اختیاری خواهد داشت.

- در این صورت شرایط اضافی را به مسئله تحمیل کرده که مودهای مربوط به فرکانس‌های تکراری نسبت به هم ارتوگونال باشند (به مانند فرکانس‌های غیر تکراری). یعنی:

$$\underline{\phi}_j^T\underline{m}\,\underline{\phi}_{j+1}=\underline{\phi}_j^T\underline{m}\,\underline{\phi}_{j+2}=\dots=\underline{\phi}_j^T\underline{m}\,\underline{\phi}_{j+p-1}=0$$

- تکنیکی برای اعمال این روش بنام Gram-Schmidt Orthogonalization
معروف می‌باشد که به تدریج شیفت هر کدام بردارهای شکل مود را می‌سازد.

مثلاً فرض کنید $p=3$ باشد. بردارهای $\underline{\phi}'_j$ ، $\underline{\phi}'_{j+1}$ و $\underline{\phi}'_{j+2}$ را می‌سازیم:

$$\underline{\phi}'_j = \underline{\phi}_j$$

$$\underline{\phi}'_{j+1} = \underline{\phi}_{j+1} + \alpha_{11}\underline{\phi}'_j$$

$$\underline{\phi}'_{j+2} = \underline{\phi}_{j+2} + \alpha_{21}\underline{\phi}'_j + \alpha_{22}\underline{\phi}'_{j+1}$$

$\underline{\phi}_j$ ، $\underline{\phi}_{j+1}$ و $\underline{\phi}_{j+2}$ شکل مودهای هستند که با استفاده از خاصیت استقلال خطی شکل مودها بدست آمده‌اند ولی خاصیت تعامد بودن نسبت به $\underline{\underline{m}}$ را ندارند.

خواص تعامد بودن را به ترتیب بدست می‌آوریم:

$$** \quad \underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+1} = \underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+1} + \alpha_{11}\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{11} = -\frac{\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+1}}{\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j}$$

حال که مودهای $\underline{\phi}'_j$ و $\underline{\phi}'_{j+1}$ معلوم شده‌اند، شرط تعامد بودن $\underline{\phi}'_{j+2}$ برای این دو مود اعمال می‌شود:

$$\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+2} = \underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\left(\underline{\phi}_{j+2} + \alpha_{21}\underline{\phi}'_j + \alpha_{22}\underline{\phi}'_{j+1}\right)$$

$$= \underline{\phi}'_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+2} + \alpha_{21}\underline{\phi}'_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j + \alpha_{22}\cancel{\underline{\phi}'_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+1}} = 0$$

از **

$$\Rightarrow \alpha_{21} = -\frac{\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+2}}{\underline{\phi}'^T_j \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_j}$$

همچنین:

$$\underline{\phi}'^T_{j+1} \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+2} = \underline{\phi}'^T_{j+1} \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_{j+2} + \alpha_{22}\underline{\phi}'^T_{j+1} \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}'_{j+1} = 0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\alpha_{22} = -\frac{\phi_{j+1}'^{T}\, \underline{m}\, \phi_{j+2}}{\phi_{j+1}'^{T}\, \underline{m}\, \phi_j'}$$

دقت کنید که صورت و مخرج این کسر عدد هستند. این پروسه برای هر تعداد از ریشه‌های تکراری قابل گسترش است. هنگامی که بردارهای جدید محاسبه شدند جایگزین بردارهای قبلی ϕ می‌گردند.

مثال: مطلوبست تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل بردارهای سیستم زیر:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با حل $\det(\underline{k} - \lambda \underline{m}) = 0$ خواهیم داشت:

$$8\lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow -2(\lambda - 4)\lambda^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0$$

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 0$$

$$\lambda_3 = 4 \Rightarrow \omega_3 = 2$$

بنابراین یک ریشه تکراری در جواب است.

برای فرکانس طبیعی سوم شکل مود به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\lambda_3 = 4 \quad \Rightarrow (\underline{k} - \lambda \underline{m})\underline{x} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3&-2&1\\-2&-4&-2\\1&-2&-3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \\ \\ \end{array}\left\{\begin{array}{l}-2x_1-2x_2+x_3=0\\ -2x_1-4x_2-2x_3=0\\ \hline -8x_1-8x_2=0\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x_2 = -x_1$$

از معادله سوم $\Rightarrow x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - 2(-x_1) - 3x_3 = 0$

$$\Rightarrow x_3 = x_1$$

$$\underline{X}_3 = \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}x_1\\-x_1\\x_1\end{Bmatrix} = \cancel{x_1}\begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{X}_3 = \begin{Bmatrix}1\\-1\\1\end{Bmatrix}$$

با نرمال کردن آن نسبت به ماتریس جرم :

$$\underline{x}_3^T \underline{\underline{m}}\, \underline{x}_3 = 4 \Rightarrow \underline{\phi}_3 = \frac{\underline{x}_3}{\sqrt{4}} = \begin{Bmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{Bmatrix}$$

دو مقدار اول λ یکی شد.

$$\lambda_1 = 0$$

$$(\underline{\underline{k}} - \lambda_1 \underline{\underline{m}})\underline{x}_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

معادله اول :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

دیده می‌شود که معادله دوم و سوم هم ضرایبی از این معادله هستند. بنابراین در اینجا یک معادله و سه مجهول داریم (دقت دارید رنک ماتریس ضرائب یک است).
بنابراین دو متغیر دلخواه خواهیم داشت.

اگر قرار دهیم $x_3 = 1$ و $x_2 = 0$ بنابراین:

$$x_1 - 2(0) + (1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$\mathbf{X}_1 = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

با نرمال کردن آن نسبت به ماتریس جرم:

$$\mathbf{X}_1^T \mathbf{M} \mathbf{X}_1 = 2 \Rightarrow \boldsymbol{\phi}_1 = \frac{\mathbf{X}_1}{\sqrt{2}} = \begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}$$

برای مود دوم هم به همین ترتیب مانند مود اول می‌رسیم. در این صورت اگر متغیرها را به صورت زیر انتخاب کنیم:

$x_2 = 1$ و $x_3 = 0$

$$x_1 - 2(1) + 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

$$\mathbf{X}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

این شکل مود در حالت کلی خاصیت ارتگونالیتی نسبت به ماتریس جرم را ارضا نمی‌کند.

$$\mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_1 = -\sqrt{2} \neq 0$$

$$\mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_3 = 0$$

برای داشتن خاصیت ارتگونالیتی مود دوم، قرار میدهیم:

$$\boldsymbol{\phi}_2 = \mathbf{X}_2 + \alpha \boldsymbol{\phi}_1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_1 = \mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_1 + \alpha \overbrace{\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_1}^{m_1} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{m_1} \mathbf{X}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_1$$

$$m_1 = \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_1 = 1$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \sqrt{2}\begin{Bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

با نرمال کردن آن :

$$\underline{\phi}_2^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\phi}_2 = 4$$

$$\Rightarrow \underline{\phi}_2 = \frac{\underline{\phi}_2}{\sqrt{4}} = \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

بنابراین ماتریس مودال عبارت است از :

$$\underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

البته بهتر است جای ستون اول و دوم عوض شود.

در این صورت :

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{m}}\, \underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$