روش دانکرلی

Dunkerley's Method

در بررسی سیستم‌های ارتعاشی حل رایلی را داشتیم که از کسر رایلی برای بدست آوردن حد بالای فرکانس طبیعی استفاده می‌شد. روش دیگر برای بررسی تقریبی سیستم‌های ارتعاشی روش دانکرلی است که به کمک آن می‌توان محدوده پایین فرکانس طبیعی را پیدا نمود.

معادله دیفرانسیل حرکت سیستم چند درجه آزادی را در نظر بگیرید:

$$\underline{m}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{k}\,\underline{x} = 0 \qquad (1)$$

از پیش ضرب در $\underline{k}^{-1}$ خواهیم داشت:

$$\underline{k}^{-1}\underline{m}\,\ddot{\underline{x}} + \underline{x} = 0$$

با در نظر گرفتن پاسخ هارمونیک $\ddot{\underline{x}} = -\omega^2 \underline{x}$ و در نظر گرفتن:

$$\underline{G} = \underline{k}^{-1}\underline{m} \quad , \quad \underline{A} = \underline{k}^{-1}$$

خواهیم داشت:

$$\left(\underline{G} - \frac{1}{\omega^2}\underline{I}\right)x = 0 \qquad (2)$$

دقت کنید که ماتریس G از ضرب ماتریس نرمی در ماتریس جرم بدست می‌آید.

مثلاً برای یک سیستم سه درجه آزادی:

$$\underline{A} = \underline{k}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{m} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

در نتیجه:

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} a_{11}m_1 & a_{12}m_2 & a_{13}m_3 \\ a_{21}m_1 & a_{22}m_2 & a_{23}m_3 \\ a_{31}m_1 & a_{32}m_2 & a_{33}m_3 \end{pmatrix}$$

از قرار دادن در (2) و برابر صفر قرار دادن دترمینان حاصل:

$$\mathrm{Det}\left(\underline{G} - \frac{1}{\omega^2}\underline{I}\right) = 0$$

$$
Det\begin{pmatrix} a_{11}m_1-\frac{1}{\omega^2} & a_{12}m_2 & a_{13}m_3 \\ a_{21}m_1 & a_{22}m_2-\frac{1}{\omega^2} & a_{23}m_3 \\ a_{31}m_1 & a_{32}m_2 & a_{33}m_3-\frac{1}{\omega^2} \end{pmatrix}=0
$$

از بسط دترمینان :

$$
\left[m_1m_2m_3\left(a_{11}a_{22}a_{33}+2a_{21}a_{13}a_{23}-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{21}^2-a_{11}a_{23}^2\right)\right]\omega^6
$$
$$
-\left[m_1m_2\left(a_{22}a_{11}-a_{21}^2\right)+m_1m_3\left(a_{33}\cdot a_{11}-a_{13}^2\right)+m_2m_3\left(a_{22}a_{33}-a_{23}^2\right)\right]\omega^4
$$
$$
+\left(a_{11}m_1+a_{22}m_2+a_{33}m_3\right)\omega^2-1=0 \qquad (3)
$$

رابطه بالا یک معادله درجه ۳ برحسب ω^2 می‌باشد که دارای ریشه‌های ω_1^2 ، ω_2^2 و ω_3^2 است داریم:

(صت ۱ :

$$
Det=(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)(\omega^2-\omega_3^2)=0 \qquad (4)
$$

از بسط این رابطه :

$$
\omega^6-(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)\omega^4+(\omega_1^2\omega_2^2+\omega_2^2\omega_3^2+\omega_1^2\omega_3^2)\omega^2-\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2=0 \qquad (5)
$$

از آنجا که معادلات 3 و 5 یکی هستند برای آنکه ضریب درجه صفر آنها یکی باشد، 5 را بر $\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2$ تقسیم می‌کنیم تا ضریب درجه صفر هر دو یکی گردد.

سپس از برابر قرار دادن ضریب ω^2 در معادله خواهیم داشت :

$$
\frac{\omega_1^2\omega_2^2+\omega_2^2\omega_3^2+\omega_1^2\omega_3^2}{\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2}=a_{11}m_1+a_{22}m_2+a_{33}m_3 \qquad (6)
$$

سمت راست رابطه (6) مجموع عناصر قطر اصلی ماتریس G (Trace G) است. با ساده کردن

رابطه (6)

$$
\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}+\frac{1}{\omega_3^2}=a_{11}m_1+a_{22}m_2+a_{33}m_3
$$

در حالت کلی:

$$
\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{1}{\omega_2^2}+\cdots+\frac{1}{\omega_n^2}=a_{11}m_1+a_{22}m_2+\cdots+a_{nn}m_n \qquad (7)
$$

اما می‌دانیم که از میان فرکانس‌های طبیعی، ω_1 از همه کوچکتر است و در نتیجه:

$$\frac{1}{\omega_1} > \frac{1}{\omega_2} > \cdots > \frac{1}{\omega_n}$$

اما توان دوم رابطه بالا خیلی بزرگتر است:

$$\frac{1}{\omega_1^2} >> \frac{1}{\omega_2^2} >> \cdots >> \frac{1}{\omega_n^2}$$

بنابراین با حذف جملات دوم به بعد سمت چپ رابطه (7)، با تقریب می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\omega_1^2} \simeq a_{11}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{nn}m_n \qquad (8)$$

این رابطه، همان رابطه دانکرلی معروف است. a_{ii} جابجایی در نقطه i ناشی از بار واحد در نقطه i در حالیکه بقیه بارها صفر است، می‌باشد.

در رابطه دانکرلی با حذف سایر فرکانس‌ها، در حقیقت مقدار $\frac{1}{\omega_1^2}$ را بزرگتر از مقدار واقعی آن محاسبه کرده‌ایم و ω^2 را یا ω را کوچکتر از مقدار واقعی آن محاسبه کرده‌ایم. بنابراین این رابطه حد پایینی را برای فرکانس طبیعی اصلی می‌دهد.

معکوس ضریب a_{ii}، ضریب سختی نظیر k_{ii} است که $a_{ii} = \frac{1}{k_{ii}}$

اگر حالتی را در نظر بگیریم که فقط جرم m_i موجود باشد فرکانس طبیعی عبارت است از:

$$\omega_{ii} = \sqrt{\frac{k_{ii}}{m_i}}$$

بنابراین صورت دیگر رابطه (7) عبارت است از:

$$\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{m_1}{k_{11}} + \frac{m_2}{k_{22}} + \cdots + \frac{m_{n}}{k_{nn}}$$

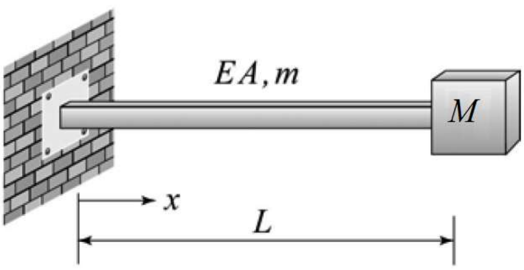
$$= \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \cdots + \frac{1}{\omega_{nn}^2} \qquad (9)$$

سمت چپ رابطه (۹) دارای یک اندیس بوده و نشان دهنده فرکانس های طبیعی سیستم است.

سمت راست، فرکانس های سیستم در حالتی است که هر کدام از جرم ها را به تنهایی اثر داده باشیم.

با این ترتیب می توان رابطه دانکرلی را به صورت زیر نیز نوشت:

$$\frac{1}{\omega_1^2} \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega_{ii}^2} \qquad (10)$$



مثال: مطلوبست تعیین فرکانس طبیعی اصلی تیر یکسره گیردار با جرم یکنواخت m بر واحد طول که یک جرم متمرکز $M = ml$ به انتهای آزاد آن وصل شده باشد.

در صورتیکه تیر به تنهایی باشد، از حل تحلیلی فرکانس طبیعی اول برابر است با: $\omega_{11} = 3.515\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$

دقت کنید که در این رابطه جرم M در نظر گرفته نشده است. همچنین در صورتیکه تیر بدون جرم بوده و جرم متمرکز M به آن وصل باشد، مقدار ω_{22} عبارت است از:

$$\omega_{22}^2 = \frac{K_b}{M} \quad , \quad K_b = \frac{3EI}{l^3} \quad \Rightarrow \omega_{22} = \sqrt{\frac{\frac{3EI}{l^3}}{ml}} = \sqrt{3}\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

در نتیجه با داشتن هر دو جرم:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} = \frac{ml^4}{12.7EI} + \frac{ml^4}{3EI} = 0.412\frac{ml^4}{EI}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 1.56\sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

سوال: در ضمن اندازه گیری ارتعاشات بال هواپیما مشاهده شد که فرکانس طبیعی آن وقتی که به بال جرم مربوط به توسط سازه با وزن $1.5 \, lbf$ متصل گردد، برابر $30 \, Hz$ است. با اضافه نمودن وزنه اضافه $1.5 \, lbf$، فرکانس طبیعی سیستم کاهش یافته و به $24 \, Hz$ می‌رسد. مطلوب است محاسبه فرکانس طبیعی بال.

در صورتی که فرکانس طبیعی بال هواپیما f_{11} هرتز باشد: $\omega_{11} = 2\pi f_{11}$

در این صورت:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + a_{22} m_2$$

که فرکانس طبیعی اصلی مربوط به بال و جرم اضافه m_2 باشد و ω_{22} فرکانس طبیعی مربوط به تنها جرم اضافه است. از نوشتن این رابطه برای آزمایش اول:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2\pi(30))^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + a_{22}\left(\frac{1.5}{32.2}\right)$$

برای رابطه دوم:

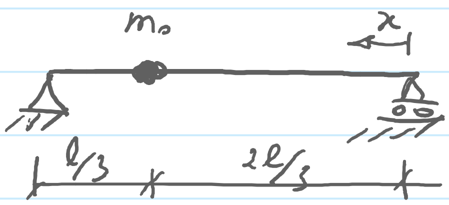
$$\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{(2\pi(24))^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + a_{22}\left(\frac{1.5+1.5}{32.2}\right)$$

با حل دو معادله و دو مجهول بالا:

$$\omega_{11} = 284.63 \, rad/s = 45.3 \, Hz$$

$$k_{22} = \frac{1}{a_{22}} = 2952 \, lbf/ft$$

مثال: فرکانس طبیعی یک تیر یکنواخت به جرم m که دو سر مفصل می‌باشد، با اضافه نمودن جرم m_0 در فاصله $\frac{1}{3}$ طول تیر چه مقدار می‌باشد.



با نوشتن رابطه دانکرلی:

$$\frac{1}{\omega_1^2}=\frac{1}{\omega_{11}^2}+\frac{1}{\omega_{22}^2}$$

ω_1 فرکانس تیر با همراه بودن جرم m_0، ω_{11} فرکانس طبیعی تیر بدون جرم m_0 و ω_{22} فرکانس طبیعی تیر بدون جرم با داشتن جرم m_0 می‌باشند.

$$\frac{1}{\omega_1^2}=\frac{\omega_{11}^2+\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2\,\omega_{22}^2} \Rightarrow \left(\frac{\omega_1}{\omega_{11}}\right)^2=\frac{\omega_{22}^2}{\omega_{11}^2+\omega_{22}^2}=\frac{1}{1+\frac{\omega_{11}^2}{\omega_{22}^2}}$$

همچنین:

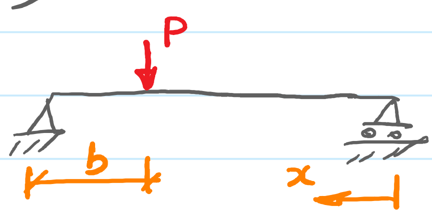
$$\frac{1}{\omega_{22}^2}=a_{22}m_0$$

که a_{22} خیز تیر در نقطه $x=\frac{2}{3}l$ (محل m_0) ناشی از بار واحد می‌باشد. بنابراین:

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_{11}}\right)^2=\frac{1}{1+a_{22}m_0\omega_{11}^2} \quad \text{و} \quad \omega_{11}=\pi^2\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}$$

از مقاومت مصالح برای تیر دو سر مفصل تحت بار متمرکز P داریم:

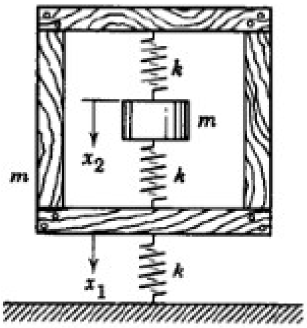
$$y=\frac{Pbx}{6EIl}(l^2-b^2-x^2)$$



$$a_{22}=y=\frac{(1)(\frac{l}{3})(\frac{2l}{3})}{6EIl}\left(l^2-\frac{l^2}{9}-\frac{4l^2}{9}\right)=\frac{4l^3}{243EI}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_{11}}\right)^2=\frac{1}{1+\left(\frac{4l^{\cancel{3}}}{243\cancel{EI}}\right)m_0\left(\pi^4\frac{\cancel{EI}}{m\cancel{l^3}}\right)}=\frac{1}{1+\frac{4\pi^4}{243}\frac{m_0}{m}}=\frac{1}{1+1.6\frac{m_0}{m}}$$



مثال: سیستم شکل مقابل مدل ساده شده‌ی اجسام شکسته را نشان می‌دهد.

الف- فرکانس طبیعی اول سیستم را با استفاده از روش رایلی با شکل مود $\begin{Bmatrix}1\\1.5\end{Bmatrix}$ بیابید.

ب- فرکانس طبیعی اول سیستم را با استفاده از روش دانکرلی بیابید.

الف- انرژی جنبشی سیستم عبارت است از:

$$T=\frac{1}{2}m\dot{x}_1^2+\frac{1}{2}m\dot{x}_2^2=\frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)$$

انرژی پتانسیل:

$$V=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2+\frac{1}{2}k(x_2-x_1)^2$$

با در نظر گرفتن $\underline{X}=(X_1\ X_2)^T\ ,\ \underline{x}=\underline{X}e^{j\omega t}$

$$T_{max}=V_{max}$$

$$\Rightarrow\quad \cancel{\tfrac{1}{2}}m\omega_1^2(X_1^2+X_2^2)=\cancel{\tfrac{1}{2}}kX_1^2+\cancel{\tfrac{1}{2}}(2k)(X_2-X_1)^2$$

$$\omega_1^2=\frac{kX_1^2+2k(X_2-X_1)^2}{m(X_1^2+X_2^2)}$$

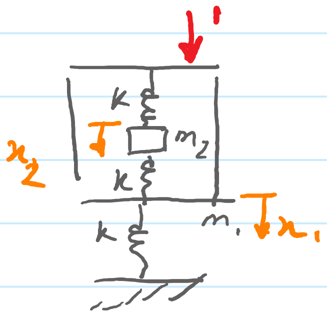
با در نظر گرفتن $\underline{X}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\\1.5\end{Bmatrix}$

$$\omega_1^2=\frac{k(1^2+2(1.5-1)^2)}{m(1^2+1.5^2)}=\frac{k(1+0.5)}{m(1+2.25)}=\frac{\frac{3}{2}k}{\frac{13}{4}m}=\frac{6}{13}\frac{k}{m}=0.462\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_1=\omega_1'=0.68\sqrt{\frac{k}{m}}$$

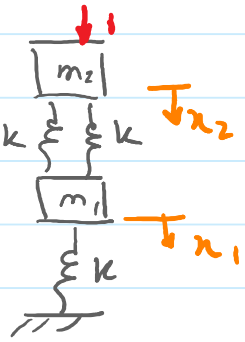
ب- روش دانکرلی: ابتدا ضرائب a_{11} و a_{22} را برای قرار دادن در رابطه دانکرلی می‌یابیم:

با اعمال بار واحد به m_1:



$$a_{11} = \frac{1}{k} \quad , \quad a_{21} = \frac{1}{k}$$

با اعمال بار واحد به m_2:



$$a_{22} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} = \frac{3}{2k}$$

از رابطه دانکرلی:

$$\frac{1}{\omega_1^2} = a_{11} m_1 + a_{22} m_2$$

$$= \frac{m}{k} + \frac{3}{2}\frac{m}{k} = \frac{5}{2}\frac{m}{k}$$

بنابراین:

$$\omega_1^2 = 0.4\frac{k}{m} \Rightarrow \omega_1 = \omega_1'' = 0.632\sqrt{\frac{k}{m}}$$

از روش تحلیلی خواهیم داشت:

$$\omega_1 = 0.662\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1'' < \omega_1 < \omega_1'$$