روش مودهای فرض شده — The assumed modes method

روش رایلی-ریتز — Rayleigh-Ritz Method

همانطور که در روش رایلی دیده شد این روش، یک سیستم پیوسته را با یک درجه آزادی به وسیله در نظر گرفتن یک شکل تغییر فرم خاص تقریب می زند.

یک راه گسترش این روش آن است که چند شکل تغییر فرم یا شکل مود و یا مود ریتز در نظر گرفت. در این صورت یک سیستم پیوسته به صورت یک سیستم چند درجه آزادی کاهش می یابد. تعداد درجات آزادی برابر تعداد مودهای ریتز است. در این صورت روش تعمیم روش مودهای فرض شده و یا روش رایلی-ریتز معروف است. البته این دو روش یک فرق کوچکی با هم دارند. روش رایلی-ریتز معمولاً برای بدست آوردن فرکانس های طبیعی بکار می رود و بنابراین برای حل مسئله مقدار مشخصه بکار می رود، ولی روش مودهای فرض شده برای ارتعاشات اجباری بکار می رود.

در اینجا ابتدا روش مودهای فرض شده را ذکر کرده و سپس روش رایلی-ریتز توضیح داده می شود.

تصور کنید یک تیر با جرم واحد طول m و سختی EI را در نظر بگیرید که به دنبال ارتعاشات خمشی آن هستیم. خیز تیر به فرم زیر تقریب زده می شود:

$$w(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(x)\,q_i(t)=\psi^T q$$

که $\psi_i(x)$ شکل مودهای فرض شده و $q_i(t)$ مختصات عمومی هستند.

انتخاب شکل مودها و یا توابع تقریب براین اساس است که این توابع شرایط مرزی هندسی را ارضا کنند.

برای محاسبه انرژی‌های کرنشی و جنبشی سیستم نیاز به مشتق‌های $\frac{d^2w}{dx^2}$ و $\frac{dw}{dt}$ است.

انرژی پتانسیل برای ارتعاش تیر شامل انرژی کرنشی U_s و پتانسیل نیروی خارجی W است.

انرژی کرنشی برابر است با:

$$U_s = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx$$

اما:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2\psi_i}{dx^2} q_i(t) = \underline{B}^T \underset{\sim}{q} \quad , \quad \underline{B}^T = \left(\frac{d^2w_1}{dx^2} \; \frac{d^2w_2}{dx^2} \cdots \frac{d^2w_n}{dx^2}\right)$$

بنابراین:

$$\left(\frac{d^2w(x,t)}{dx^2}\right)^2 = (\underline{B}^T\underline{q})^2 = (\underline{B}^T\underline{q})^T(\underline{B}^T\underline{q}) = \underline{q}^T\underline{B}\,\underline{B}^T\underline{q}$$

در نتیجه:

$$U_s = \frac{1}{2}\underline{q}^T\int_0^l EI\,\underline{B}\,\underline{B}^T dx\,\underset{\sim}{q} = \frac{1}{2}\underline{q}^T\underline{\underline{k}}\,\underline{q}$$

که $\underline{k}$ ماتریس سختی است:

$$\underline{\underline{k}} = \int_0^l EI\,\underline{B}\,\underline{B}^T dx$$

همچنین در مورد شکل توزیع بار گسترده به فرم $p(x,t)$ باشد، پتانسیل نیروی خارجی:

$$W = \int_0^l p(x,t)\,w(x,t) = \int_0^l p\,\underline{\psi}^T dx\,\underset{\sim}{q} = \underline{f}^T\underset{\sim}{q}$$

که $\underline{f}$ بردار بار است:

$$\underline{f} = \int_0^l p\,\underline{\psi}\,dx$$

در نتیجه انرژی پتانسیل برابر است با:

$$U = U_s - W = \frac{1}{2}\underline{q}^T\underline{\underline{k}}\,\underline{q} - \underline{f}^T\underline{q}$$

انرژی جنبشی هم برابر است با:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m\left(\frac{dw(x,t)}{dt}\right)^2 dx$$

که مشتق سرعت برابر است با:

$$\frac{dw(x,t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\psi_i(x)\frac{dq_i}{dt} = \underline{\psi}^T\dot{\underline{q}}$$

که در آن :

$$\dot{\underline{q}} = \left(\frac{dq_1}{dt}\ \ \frac{dq_2}{dt}\ \cdots\ \frac{dq_n}{dt}\right)^T$$

مجذور سرعت w به فرم ماتریسی عبارت است از :

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = (\underline{\psi}^T \dot{\underline{q}})^2 = (\underline{\psi}^T \dot{\underline{q}})^T \underline{\psi}^T \dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}^T \underline{\psi}\,\underline{\psi}^T \dot{\underline{q}}$$

از جاگذاری در انرژی جنبشی :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \int_0^l m \underline{\psi}\,\underline{\psi}^T dx\, \dot{\underline{q}} = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{m}}\, \dot{\underline{q}}$$

که $\underline{\underline{m}}$ ماتریس جرم برابر است با :

$$\underline{\underline{m}} = \int_0^l m \underline{\psi}\,\underline{\psi}^T dx$$

از جاگذاری در معادله بقای انرژی مکانیکی :

$$\frac{d}{dt}(T+U) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{m}}\, \dot{\underline{q}} + \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{q} - \underline{f}^T \underline{q}\right) = 0$$

جمله اول با در نظر گرفتن تقارن ماتریس جرم عبارت است از :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{m}}\, \dot{\underline{q}}\right) = \frac{1}{2} \ddot{\underline{q}}^T \underline{\underline{m}}\, \dot{\underline{q}} + \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{m}}\, \ddot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{m}}\, \ddot{\underline{q}}$$

همین طریق جمله دوم :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{q}\right) = \dot{\underline{q}}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{q}$$

و جمله سوم :

$$\frac{d}{dt}(\underline{f}^T \underline{q}) = \underline{f}^T \dot{\underline{q}} = \dot{\underline{q}}^T \underline{f}$$

از قرار دادن در رابطه بالا :

$$\dot{\underline{q}}^T (\underline{\underline{m}}\, \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{k}}\, \underline{q} - \underline{f}) = 0$$

بنابراین :

$$\underline{\underline{m}}\, \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{k}}\, \underline{q} = \underline{f}$$

می‌توان جملات انرژی را در رابطه لاگرانژ قرار داد. در این صورت با محاسبه نیروی عمومی از طریق کار مجازی :

$$W = \underline{f}^T \underline{q} \Rightarrow \delta W = \underline{f}^T \delta \underline{q} = \underline{Q}^T \delta \underline{q}$$

$$\Rightarrow \underline{Q} = \underline{f}$$

از قرار دادن در معادله لاگرانژ:

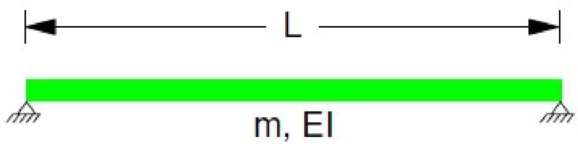
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{q}}} = \underline{\underline{m}}\, \dot{\underline{q}} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{q}}}\right) = \underline{\underline{m}}\, \ddot{\underline{q}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \underline{q}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \underline{q}} = \underline{\underline{k}}\, \underline{q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\underline{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \underline{q}} + \frac{\partial U}{\partial \underline{q}} = \underline{Q} \Rightarrow \underline{\underline{m}}\, \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{k}}\, \underline{q} = \underline{f}$$

با حل معادلات دیفرانسیل بالا $\underline{q}$ به دست آمده و از پیش در شکل برداری فرض شده $\underline{q}$ پاسخ
سیستم به دست می‌آید.

مثال: برای تیر یکنواخت دو سر مفصل روبرو با استفاده از شکل مودهای زیر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای اول و دوم را به دست آورید.



$$\psi_1(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} \quad , \quad \psi_2(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{x}{l}$$

دقت کنید که شکل مودهای انتخاب شده شرایط مرزی هندسی یعنی صفر بودن در دو انتهای تیر را ارضا می‌کنند. با در نظر گرفتن:

$$w = \underline{\psi}^T \underline{q}$$

که شکل مودها و مشتقات آن:

$$\underline{\psi} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{x}{l} \end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{d\underline{\psi}}{dx} = \begin{Bmatrix} \frac{2x}{l^2} - \frac{1}{l} \\ \frac{3x^2}{l^3} - \frac{1}{l} \end{Bmatrix} \quad , \quad \frac{d^2\underline{\psi}}{dx^2} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{l^2} \\ \frac{6x}{l^3} \end{Bmatrix} = \underline{B}$$

با این بردارها، ماتریس‌های جرم و سختی عبارتند از:

$$\underline{\underline{m}} = \int_0^l m \underline{\psi}\,\underline{\psi}^T dx = \int_0^l m \begin{Bmatrix} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{x}{l} \end{Bmatrix} \left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} \quad \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{x}{l} \right] dx$$

$$= \int_0^l m \begin{pmatrix} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l}\right)^2 & \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l}\right)\left(\frac{x^3}{l^3} - \frac{x}{l}\right) \\ \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{x}{l}\right)\left(\frac{x^3}{l^3} - \frac{x}{l}\right) & \left(\frac{x^3}{l^3} - \frac{x}{l}\right)^2 \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \frac{ml}{30} & \frac{ml}{20} \\ \frac{ml}{20} & \frac{8ml}{105} \end{pmatrix}$$

$$\underline{k} = \int_0^l EI\, \underline{B}\,\underline{B}^T dx = \int_0^l EI \begin{Bmatrix} \frac{2}{l^2} \\ \frac{6x}{l^3} \end{Bmatrix} \left[\frac{2}{l^2} \quad \frac{6x}{l^3} \right] dx$$

$$= \int_0^l EI \begin{pmatrix} \frac{4}{l^4} & \frac{12x}{l^5} \\ \frac{12x}{l^5} & \frac{36x^2}{l^6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^3} \\ \frac{6EI}{l^3} & \frac{12EI}{l^3} \end{pmatrix}$$

با توجه به عدم حضور نیروی خارجی از قرار دادن در معادلات حرکت

$$\underline{m}\,\ddot{\underline{q}} + \underline{k}\,\underline{q} = 0$$

با در نظر گرفتن پاسخ به فرم :

$$\underset{\sim}{q} = \underset{\sim}{Y} e^{i\omega t}$$

و قرار دادن در معادلهٔ حرکت و ساده کردن :

$$-\omega^2 \underset{\approx}{m} \underset{\sim}{Y} + \underset{\approx}{k} \underset{\sim}{Y} = 0 \quad \Rightarrow (\underset{\approx}{k} - \lambda \underset{\approx}{m}) \underset{\sim}{Y} = 0$$

برای داشتن جواب غیر بدیهی :

$$\det(\underset{\approx}{k} - \lambda \underset{\approx}{m}) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 l^2}{25200} \lambda^2 - \frac{11 m EI}{105 l^2} \lambda + \frac{12 (EI)^2}{l^6} = 0$$

از حل این معادله :

$$\lambda_1 = \frac{120 EI}{m l^4} \Rightarrow \omega_1 = 10.9544 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$

$$\lambda_2 = \frac{2520 EI}{m l^4} \Rightarrow \omega_2 = 50.1996 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$$

با مقایسه با جواب‌های تحلیلی :

$$\omega_{1ex} = 9.8696 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad , \quad \epsilon = 10.99\%$$

$$\omega_{2ex} = 39.4784 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}} \quad , \quad \epsilon = 27.15\%$$

همانطور که دیده می‌شود از روش مودهای فرضی هم می‌توان فرکانس‌های طبیعی را محاسبه نمود.

علاوه بر این دیده می‌شود که دقت روش در فرکانس اول از کلیه مودهای بالاتر است.

شکل مودهای سیستم دو درجه آزادی که قرار دادن λ_1 و λ_2 در دستگاه همگن بالا به دست می‌آید :

$$\underset{\sim}{Y}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \underset{\sim}{Y}_2 = \begin{Bmatrix} -3/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

از ضرب این شکل مودها در شکل مودهای فرض شده، شکل مودهای تیر به دست می‌آید :

$$\underset{\sim}{\Phi}_1 = \underset{\sim}{\Psi}^T \underset{\sim}{Y}_1$$

در نتیجه :

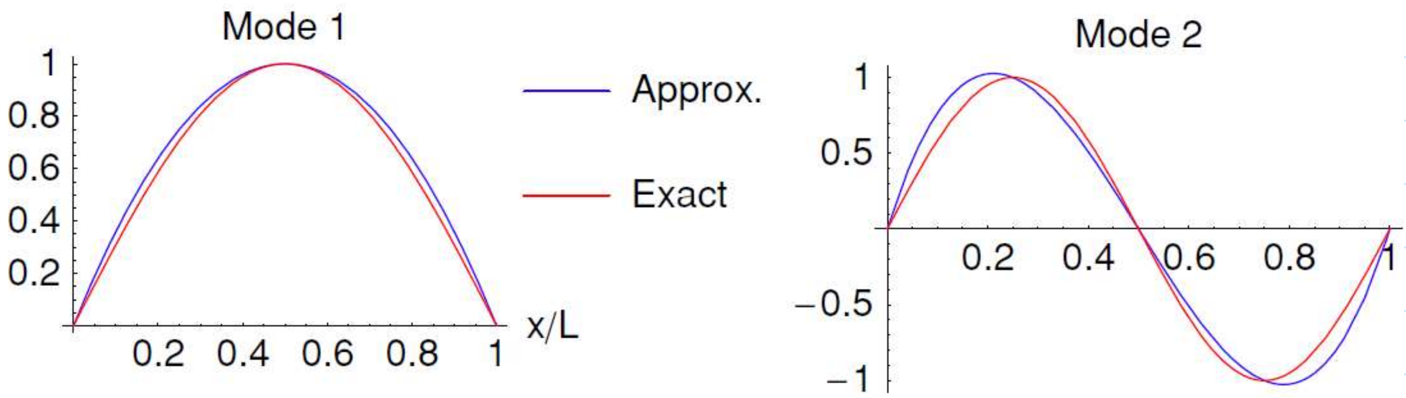
$$\underline{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{x}{l} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l}$$

$$\underline{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{x}{l} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} = \left(\frac{x}{l}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)$$

در شکل زیر شکل مودهای تقریبی بالا با شکل مودهای نرمال شده تحلیلی مقایسه شده اند.

شکل مودهای تحلیلی اول و دوم تیر دو سر مفصل عبارتند از: $\sin\frac{\pi x}{l}$ و $\sin\frac{2\pi x}{l}$

دیده می‌شود که شکل مودها قابل قبول هستند.



روش رایلی-ریتز — Rayleigh-Ritz method

همانطور که گفته شد این روش ادامه روش رایلی است. در این روش یک سری فرم‌های مختلف برای تابع تغییر شکل با ضرایبی که تابع زمان نیستند در نظر گرفته می‌شود. این ضرایب را طوری می‌توان در نظر گرفت که فرکانس‌های طبیعی حداقل مقدار خود را داشته باشند.

مثلاً برای تیر در این روش خواهیم داشت:

$$y(x,t) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x) + \cdots + c_n \phi_n(x)$$

که در آن $\phi_i(x)$ تابعی است که شرایط هندسی مرزی را ارضا می‌کند و c_i ضرایب نامعین (Undetermined Coefficient) و یا همان مختصات تعمیمی هستند

$$y = \underline{\phi}^T \underline{c}$$

مثلاً برای یک تیر، انرژی کرنشی ماکزیمم عبارت است از:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\, y''^2\, dx$$

$$y''^2 = (\underline{\phi}''^T \underline{c})^2 = (\underline{\phi}''^T \underline{c})^T (\underline{\phi}''^T \underline{c}) = \underline{c}^T \underline{\phi}'' \underline{\phi}''^T \underline{c}$$

بنابراین:

$$U_{max} = \frac{1}{2} \underline{c}^T \int_0^l EI\, \underline{\phi}'' \underline{\phi}''^T dx\, \underline{c} = \frac{1}{2} \underline{c}^T \underline{\underline{k}}\, \underline{c}$$

که ماتریس سختی $\underline{\underline{k}}$ عبارت است از:

$$k_{ij} = \int_0^l EI\, \phi_i'' \phi_j''\, dx$$

بنابراین:

$$U_{max} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j k_{ij} c_i c_j$$

همچنین انرژی جنبشی ماکزیمم برابر است با:

$$T_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l m \dot{y}^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^l m\, \omega^2 \underline{c}^T \underline{\phi}\, \underline{\phi}^T \underline{c}\, dx = \frac{1}{2}\omega^2 \underline{c}^T \underline{\underline{m}}\, \underline{c}$$

که در آن:

$$m_{ij}=\int_0^l m\,\phi_i\,\phi_j\,dx$$

بنابراین:

$$T_{max}=\frac{1}{2}\left(\sum_i\sum_j m_{ij}\,c_i c_j\right)\omega^2=\omega^2 T^*_{max}$$

به همین ترتیب عبارات گفته شده بالا برای دیگر مسائل ارتعاشی می‌توان پیدا کرد. بطور مثال برای میله تغییر مکان محوری u را داریم که:

$$u(x,t)=\underline{\phi}^T\underline{c}$$

و

$$U_{max}=\frac{1}{2}\int_0^l P\,du=\frac{1}{2}\int_0^l \sigma A\,\epsilon\,dx=\frac{1}{2}\int_0^l EA\frac{du}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

مشابه با حالت قبل انرژی پتانسیل ماکزیمم و انرژی جنبشی ماکزیمم محاسبه شده و:

$$K_{ij}=\int_0^l EA\,\phi_i'\,\phi_j'\,dx\quad,\quad m_{ij}=\int_0^l m\,\phi_i\,\phi_j\,dx$$

حال برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی از رابطه کسر رایلی استفاده می‌کنیم:

$$\omega^2=\frac{U_{max}}{T^*_{max}}$$

جابجایی‌های انتخاب شده محدودیت‌هایی را به سیستم اعمال کرده و سبب افزایش سختی آن می‌شود، و بنابراین فرکانس‌ها افزایش می‌یابند. از آنجا که این جابجایی‌ها تابعی از ضرایب c_i هستند، بنابراین ω^2 در رابطه بالا تابعی از این ضرایب می‌گردد.

درصورتیکه با تغییر این ضرایب ω^2 مینیمم گردد، فرکانس‌های طبیعی بدست می‌آیند. بنابراین:

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial c_i}=\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{U_{max}}{T^*_{max}}\right)=0$$

بنابراین:

$$\frac{\partial}{\partial c_i}\left(\frac{U_{max}}{T^*_{max}}\right)=\frac{\frac{\partial U_{max}}{\partial c_i}T^*_{max}-\frac{\partial T^*_{max}}{\partial c_i}U_{max}}{{T^*_{max}}^2}=0$$

$$=\frac{1}{T^*_{max}}\left[\frac{\partial U_{max}}{\partial c_i}-\frac{\partial T^*_{max}}{\partial c_i}\overbrace{\frac{U_{max}}{T^*_{max}}}^{\omega^2}\right]=0$$

اما:

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial c_i}=\sum_{j=1}^{n}c_j k_{ij} \quad \text{و} \quad \frac{\partial T^*_{max}}{\partial c_i}=\sum_{j=1}^{n}c_j m_{ij}$$

با جایگذاری در رابطه بالا:

$$\frac{1}{T^*_{max}}\left[\sum_j c_j k_{ij}-\sum_j c_j m_{ij}\cdot\omega^2\right]=0$$

و یا:

$$\sum_{j=1}^{n}c_j k_{ij}=\omega^2\sum_{j=1}^{n}c_j m_{ij}$$

با بسط آن:

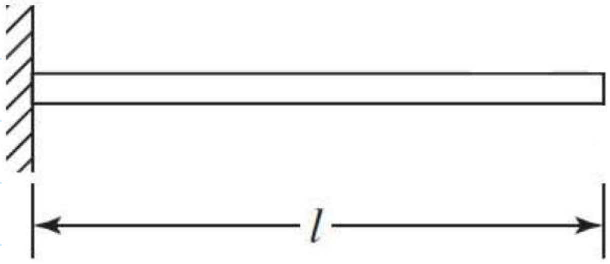
$$c_1(k_{i1}-\omega^2 m_{i1})+c_2(k_{i2}-\omega^2 m_{i2})+\dots+c_n(k_{in}-\omega^2 m_{in})=0$$

$i=1,2,\dots,n$

بنابراین n معادله مشابه بالا خواهیم داشت که صفر بشوند از:

$$\begin{pmatrix} k_{11}-\omega^2 m_{11} & k_{12}-\omega^2 m_{12} & \cdots & k_{1n}-\omega^2 m_{1n} \\ k_{21}-\omega^2 m_{21} & k_{22}-\omega^2 m_{22} & \cdots & k_{2n}-\omega^2 m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{n1}-\omega^2 m_{n1} & k_{n2}-\omega^2 m_{n2} & \cdots & k_{nn}-\omega^2 m_{nn} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

شرط وجود جواب غیر بدیهی صفر شدن دترمینان ضرایب است که یک معادله درجه n برحسب ω^2 است، که حل آن n فرکانس طبیعی و n شکل مود را می‌دهد.



مثال: مطلوب است تعیین فرکانس های طبیعی اول و دوم تیر یکسرگیردار یکنواخت با فرض:

$$y(x,t)=a_1x^2+a_2x^3$$

از آنجایی که شکل مودهای $f_1=x^2$ و $f_2=x^3$ دیده می‌شود که این توابع شرایط مرزی هندسی را ارضا می‌کنند زیرا در $x=0$ جابجایی و شیب آنها صفر می‌شوند.

$$U_{max}=\frac{1}{2}EI\int_0^l y''^2dx=\frac{1}{2}EI\int_0^l(2a_1+6a_2x)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}EI\left(4a_1^2l+12a_1a_2l^2+12a_2^2l^3\right)$$

در نتیجه:

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial a_1}=EI(4a_1l+6a_2l^2)=\sum_{j=1}^{2}k_{1j}a_j=k_{11}a_1+k_{12}a_2$$

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial a_2}=EI(6a_1l^2+12a_2l^3)=\sum_{j=1}^{2}k_{2j}a_j=k_{21}a_1+k_{22}a_2$$

$$\Rightarrow k_{11}=4EIl\ ,\ k_{12}=k_{21}=6EIl^2\ ,\ k_{22}=12EIl^3$$

از روش ماتریسی نیز می‌توانستیم k را بدست بیاوریم:

$$\underline{\underline{k}}=EI\int_0^l \underline{B}\,\underline{B}^T dx\quad,\quad \underline{B}=\frac{d^2y}{dx^2}=\begin{Bmatrix}2\\6x\end{Bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\underline{\underline{k}}=EI\int_0^l\begin{Bmatrix}2\\6x\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}2&6x\end{pmatrix}dx=EI\int_0^l\begin{pmatrix}4&12x\\12x&36x^2\end{pmatrix}dx=EI\begin{pmatrix}4l&6l^2\\6l^2&12l^3\end{pmatrix}$$

که همان مقادیر را می‌دهد.

به همین ترتیب از T^*_{max}:

$$T^*_{max}=\frac{1}{2}m\int_0^l y^2dx=\frac{1}{2}m\int_0^l(a_1x^2+a_2x^3)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}m\left(a_1^2\frac{l^5}{5}+2a_1a_2\frac{l^6}{6}+a_2^2\frac{l^7}{7}\right)$$

$$\frac{\partial T^*_{max}}{\partial a_1} = \frac{1}{2} m \left(2a_1 \frac{l^5}{5} + 2a_2 \frac{l^6}{6}\right) = \sum_{j=1}^{2} m_{1j} a_j = m_{11} a_1 + m_{12} a_2$$

$$\frac{\partial T^*_{max}}{\partial a_2} = \frac{1}{2} m \left(2a_1 \frac{l^6}{6} + 2a_2 \frac{l^7}{7}\right) = \sum_{j=1}^{2} m_{2j} a_j = m_{21} a_1 + m_{22} a_2$$

بنابراین :

$$m_{11} = \frac{ml^5}{5}, \quad m_{12} = m_{21} = \frac{ml^6}{6}, \quad m_{22} = \frac{ml^7}{7}$$

و یا از طریق ماتریس :

$$\underline{\underline{m}} = \int_0^l m \underline{\phi}\, \underline{\phi}^T dx = \int_0^l m \begin{Bmatrix} x^2 \\ x^3 \end{Bmatrix} (x^2 \;\; x^3)\, dx = m \int_0^l \begin{pmatrix} x^4 & x^5 \\ x^5 & x^6 \end{pmatrix} dx = m \begin{pmatrix} l^5/5 & l^6/6 \\ l^6/6 & l^7/7 \end{pmatrix}$$

که همان مقادیر ویژه می‌باشد. از جایگذاری در رابطه : $\sum_{j=1}^{2} a_j k_{ij} = \omega^2 \sum_{j=1}^{2} a_j m_{ij}$ و برابر صفر قرار دادن دترمینان داریم :

$$\det \begin{pmatrix} 4EIl - \omega^2 m l^5/5 & 6EIl^2 - \omega^2 m l^6/6 \\ 6EIl^2 - \omega^2 m l^6/6 & 12EIl^3 - \omega^2 m l^7/7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^4 - 1224 \left(\frac{EI}{ml^4}\right) \omega^2 + 15120 \left(\frac{EI}{ml^4}\right)^2 = 0$$

$$\omega_1 = 3.533 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}, \quad \omega_2 = 34.81 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

مقادیر دقیق فرکانس‌های طبیعی اول و دوم عبارتند از :

$$\omega_1 = 3.516 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}, \quad \omega_2 = 22.03 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

همانطور که دیده می‌شود دقت فرکانس طبیعی اول محاسبه شده از روش R-R خیلی بالاست در حالی که فرکانس‌های بالاتر دقت کمتری دارند.

با قرار دادن ω_1 و ω_2 در معادلات روش R-R شکل مودها بدست می‌آیند:

$$\omega=\omega_1 \Rightarrow c_2 = 0.3836\, c_1 \Rightarrow \underline{c}_1 = \begin{Bmatrix}1\\ 0.3836\end{Bmatrix}$$ شکل مود اول

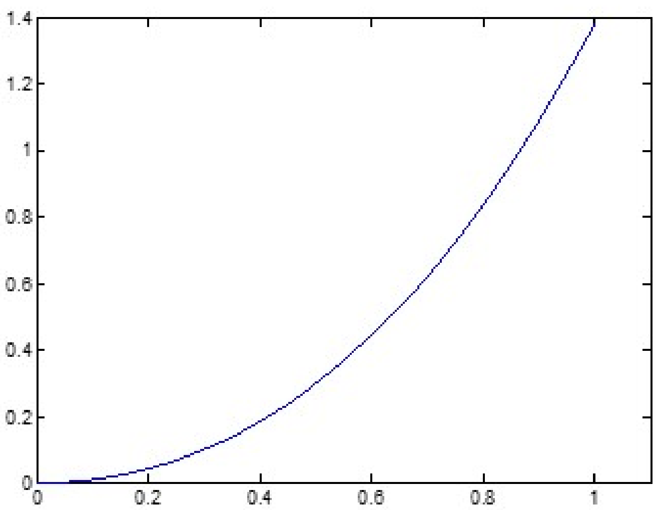
$$\omega=\omega_2 \Rightarrow c_2 = -1.2163\, c_1 \Rightarrow \underline{c}_2 = \begin{Bmatrix}1\\ -1.2163\end{Bmatrix}$$ شکل مود دوم

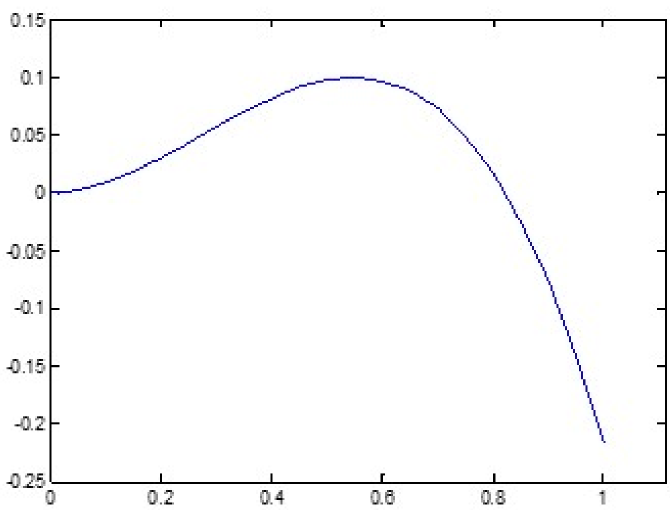
بنابراین شکل مودهای اول و دوم تیر عبارتند از:

$$y_1(x) = \underline{\phi}^T \underline{c}_1 = (x^2 \; x^3)\begin{Bmatrix}1\\ 0.3836\end{Bmatrix} = x^2 + 0.3836\,x^3$$ شکل مود اول تیر

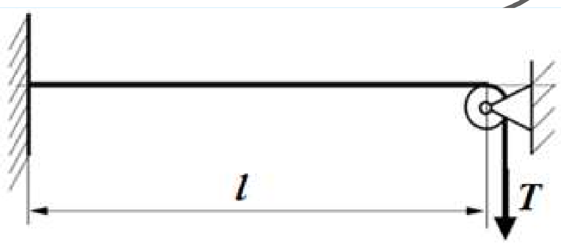
$$y_2(x) = \underline{\phi}^T \underline{c}_2 = (x^2 \; x^3)\begin{Bmatrix}1\\ -1.2163\end{Bmatrix} = x^2 - 1.2163\,x^3$$ شکل مود دوم تیر

این شکل مودها در زیر رسم شده‌اند:





مثال: مطلوبست تعیین فرکانس های طبیعی و شکل مودهای اول و دوم برای ارتعاش عرضی کابل با



استفاده از روش رایلی-ریتز و به کمک شکل مودهای:

$$\phi_1 = x(1-x) \quad , \quad \phi_2 = x^2(1-x)^2$$

خیز کابل برابر است با:

$$W(x,t) = c_1 x(l-x) + c_2 x^2 (l-x)^2$$

انرژی کرنشی ماکزیمم کابل با کشش T عبارت است از:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l T\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx = \frac{1}{2} T \int_0^l \left[c_1(l-2x) + c_2(2l^2x + 4x^3 - 6lx^2)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} T \left(\frac{1}{3} c_1^2 l^3 + \frac{2}{105} c_2^2 l^7 + \frac{2}{15} c_1 c_2 l^5\right)$$

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial c_1} = T\left(\frac{1}{3} c_1 l^3 + \frac{1}{15} c_2 l^5\right) = k_{11} c_1 + k_{12} c_2$$

$$\frac{\partial U_{max}}{\partial c_2} = T\left(\frac{2}{105} c_2 l^7 + \frac{1}{15} c_1 l^5\right) = k_{21} c_1 + k_{22} c_2$$

$$\Rightarrow \underline{k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} l^3 & \frac{1}{15} l^5 \\ \frac{1}{15} l^5 & \frac{2}{105} l^7 \end{pmatrix} T$$

$$T^*_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l \rho W^2 dx = \frac{1}{2}\rho \int_0^l \left[c_1 x(l-x) + c_2 x^2 (l-x)^2\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{2}\rho\left[\frac{1}{30} c_1^2 l^5 + \frac{1}{630} c_2^2 l^9 + \frac{1}{70} c_1 c_2 l^7\right]$$

$$\frac{\partial T^*_{max}}{\partial c_1} = \rho\left(\frac{1}{30} c_1 l^5 + \frac{1}{140} c_2 l^7\right) = m_{11} c_1 + m_{12} c_2$$

$$\frac{\partial T^*_{max}}{\partial c_2} = \rho\left(\frac{1}{630} c_2 l^9 + \frac{1}{140} c_1 l^7\right) = m_{21} c_1 + m_{22} c_2$$

$$\Rightarrow \underline{m} = \rho \begin{pmatrix} \frac{1}{30} l^5 & \frac{1}{140} l^7 \\ \frac{1}{140} l^7 & \frac{1}{630} l^9 \end{pmatrix}$$

در نتیجه:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3} T l^3 - \frac{1}{30}\rho l^5 \omega^2\right) c_1 + \left(\frac{1}{15} T l^5 - \frac{1}{140}\rho l^7 \omega^2\right) c_2 = 0 \\ \left(\frac{1}{15} T l^5 - \frac{1}{140}\rho l^7 \omega^2\right) c_1 + \left(\frac{2}{105} T l^7 - \frac{1}{630}\rho l^9 \omega^2\right) c_2 = 0 \end{cases}$$

شرط وجود جواب غیربدیهی صفر شدن دترمینان ضرائب است:

$$\left(\frac{T}{3}l^3-\frac{\rho}{30}l^5\omega^2\right)\left(\frac{2T}{105}l^7-\frac{\rho}{630}l^9\omega^2\right)-\left(\frac{T}{15}l^5-\frac{\rho}{140}l^7\omega^2\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \omega^4-112\left(\frac{T}{\rho l^2}\right)\omega^2+1008\left(\frac{T}{\rho l^2}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1^2=9.8697\,\frac{T}{\rho l^2} \quad , \quad \omega_2^2=102.1302\,\frac{T}{\rho l^2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1=3.1416\sqrt{\frac{T}{\rho l^2}} \quad , \quad \omega_2=10.1059\sqrt{\frac{T}{\rho l^2}}$$

که ω_1 فرکانس طبیعی اول و ω_2 فرکانس طبیعی سوم کامل است. مقادیر تحلیلی عبارتند از:

$$\omega_{1ex}=3.1416\sqrt{\frac{T}{\rho l^2}} \quad , \quad \omega_{2ex}=6.2832\sqrt{\frac{T}{\rho l^2}} \quad , \quad \omega_{3ex}=9.4248\sqrt{\frac{T}{\rho l^2}}$$

از قرار دادن ω_1 در معادله اول دستگاه دو معادله دو مجهولی:

$$\left(\frac{T}{3}l^3-\frac{\rho}{30}l^5\left(9.8697\frac{T}{\rho l^2}\right)\right)c_1+\left(\frac{T}{15}l^5-\frac{\rho}{140}l^7\left(9.8697\frac{T}{\rho l^2}\right)\right)c_2=0$$

$$\Rightarrow \quad c_2=\frac{1.1337}{l^2}c_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{X}_1=\begin{Bmatrix}1\\ 1.1337/l^2\end{Bmatrix}$$

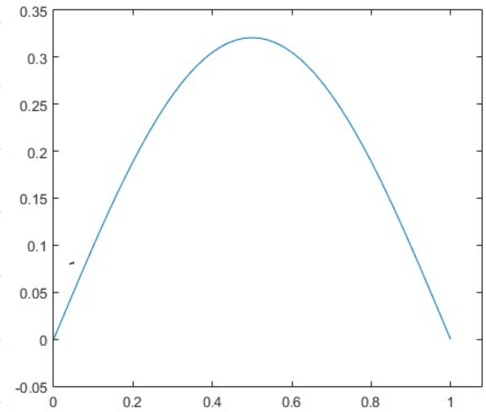
از قرار دادن ω_2 در همان معادله:

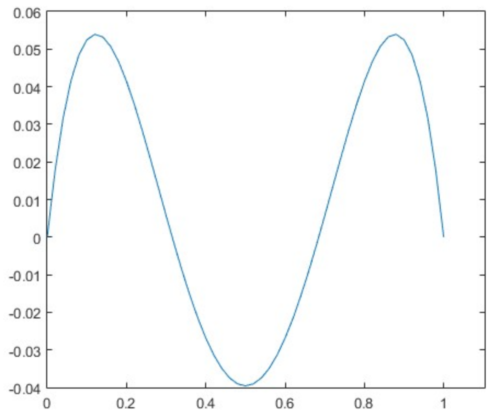
$$c_2=-\frac{4.6331}{l^2}c_1 \quad \Rightarrow \quad \underline{X}_2=\begin{Bmatrix}1\\ -4.6331/l^2\end{Bmatrix}$$

بنابراین شکل مودها عبارتند از:

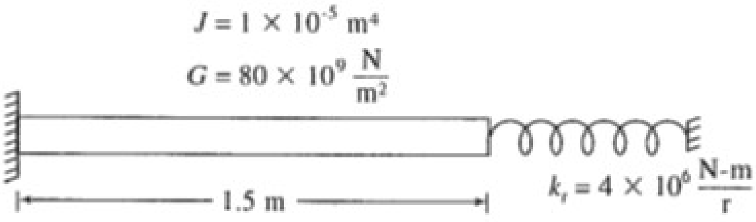
$$W_1(x)=\underline{\Phi}^T\underline{X}_1=x(l-x)+1.1337\left(\frac{x}{l}\right)^2(l-x)^2$$

$$W_2(x)=\underline{\Phi}^T\underline{X}_2=x(l-x)-4.6331\left(\frac{x}{l}\right)^2(l-x)^2$$





مثال: مطلوبست تعیین فرکانس‌های طبیعی اول و دوم ارتعاشات پیچشی میله شکل زیر با استفاده از روش رایلی-ریتز و به کمک شکل مودهای:



$$\phi_1 = x^3 - 3l^2 x \quad , \quad \phi_2 = x^2 - 2lx$$

انرژی پتانسیل ماکزیمم این سیستم عبارت است از:

$$U_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l GJ\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2} k_t \phi^2(l)$$

در این صورت می‌توان ضرایب ماتریس سختی را بدست آورد. این ضرایب را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$k_{ij} = \int_0^l GJ\left(\frac{d\phi_i}{dx}\right)\left(\frac{d\phi_j}{dx}\right)dx + k_t \phi_i(l)\phi_j(l) \qquad i,j = 1,2$$

در این صورت:

$$k_{11} = \int_0^l GJ(3x^2 - 3l^2)^2 dx + k_t(l^3 - 3l^3)^2 = 2.114 \times 10^8$$

$$k_{12} = \int_0^l GJ(3x^2 - 3l^2)(2x - 2l)dx + k_t(l^3 - 3l^3)(l^2 - 2l^2) = 6.379 \times 10^7$$

$$k_{22} = \int_0^l GJ(2x - 2l)^2 dx + k_t(l^2 - 2l^2)^2 = 2.115 \times 10^7$$

همچنین ضرایب عناصر ماتریس جرم (اینرسی):

$$m_{ij} = \int_0^l \rho J \phi_i \phi_j dx$$

$$m_{11} = \int_0^l \rho J (x^3 - 3l^2 x)^2 dx = 2.589$$

$$m_{12} = \int_0^l \rho J (x^3 - 3l^2 x)(x^2 - 2lx) dx = 0.903$$

$$m_{22} = \int_0^l \rho J (x^2 - 2lx)^2 dx = 0.3159$$

بنابراین با توجه به:

$$\phi(x,t) = c_1 \phi_1(x) + c_2 \phi_2(x)$$

بنابراین:

$$\begin{cases} (2.114\times10^{8}-2.589\omega^{2})c_1+(6.379\times10^{7}-0.903\omega^{2})c_2=0 \\ (6.379\times10^{7}-0.903\omega^{2})c_1+(2.115\times10^{7}-0.3157\omega^{2})c_2=0 \end{cases}$$

برای داشتن جواب غیر بدیهی برای c_1 و c_2 دترمینان ضرایب را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$0.001369\,\omega^{4}-6.2533\times10^{6}\,\omega^{2}+4.0195\times10^{14}=0$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = 8076\ \mathrm{rad/s}\ ,\quad \omega_2 = 66430\ \mathrm{rad/s}$$