سیالات ۲ - جلسه چهارم

تشابه: هندسی، سینماتیکی، دینامیکی

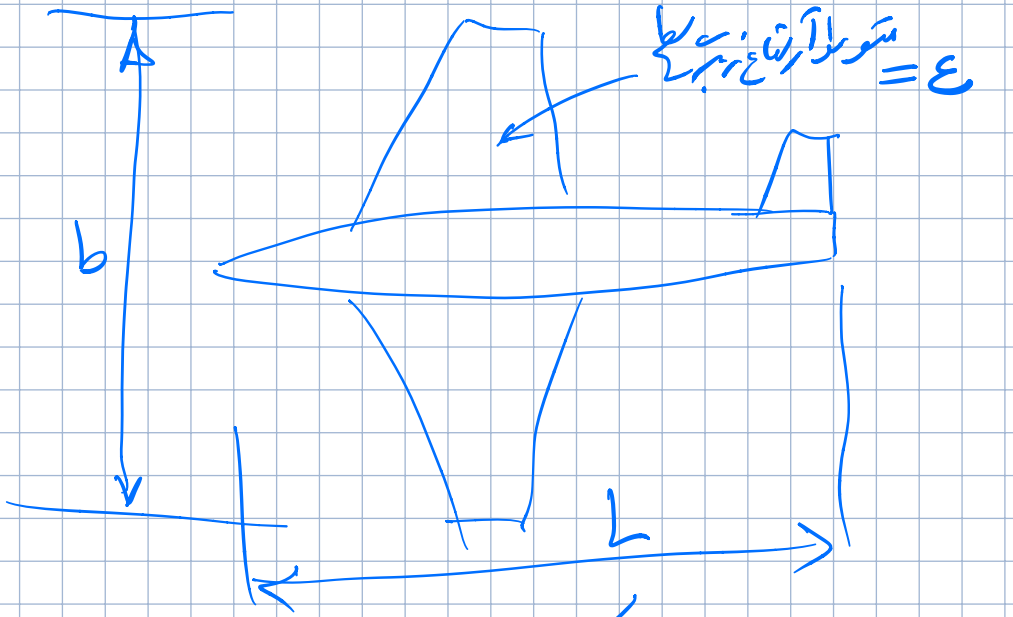
تشابه: کامل، ناقص

آنالیز ابعادی: $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_m)$

در π_1 تا π_m بر مدل و نمونه واقعی با یکدیگر برابر باشند در آن صورت تشابه کامل برقرار است.

مثال: فرض کنید یک مدل $\frac{1}{100}$ از یک هواپیما قرار است در یک تونل باد آزمایش شود.

آنالیز ابعادی:



$\pi_1 = \frac{\varepsilon}{b}$

$\pi_2 = \frac{b}{L}$

در مدل $\varepsilon \simeq 0.1\ mm$

در نمونه $b = 50\ m$

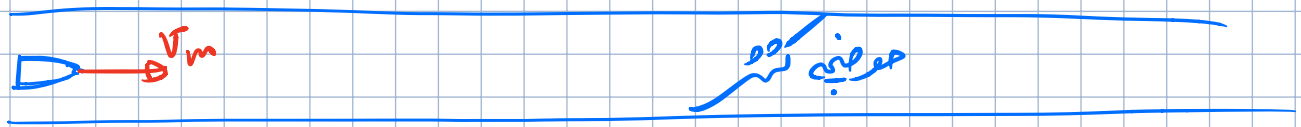
برای π_1 در مدل و نمونه واقعی:

$$\pi_1\Big|_{\text{مدل}} = \pi_1\Big|_{\text{نمونه واقعی}}$$

$$\pi_1\Big|_{\text{نمونه واقعی}} = \frac{0.1 \times 10^{-3}}{50} = \pi_1\Big|_{\text{مدل}} = \frac{\varepsilon_{\text{مدل}}}{0.5}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{\text{مدل}} = \frac{1}{100}\left(0.1 \times 10^{3}\right) = 0.001 \text{ mm}$$

مثال: بررسی نیروی پسای یک کشتی در آزمایش‌های



آنالیز ابعادی: $C_D = f(Re, Fr)$

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$$

$$\pi_2\Big|_{\text{مدل}} = \pi_2\Big|_{\text{نمونه واقعی}} \quad , \quad \pi_3\Big|_{\text{مدل}} = \pi_3\Big|_{\text{نمونه واقعی}}$$

$$\Rightarrow \pi_1\Big|_{\text{مدل}} = \pi_1\Big|_{\text{نمونه واقعی}}$$

$$Re_m = Re_p \quad , \quad Fr_m = Fr_p$$

از یکسان بودن Fr:

$$\Rightarrow \frac{V_m}{\sqrt{g L_m}} = \frac{V_p}{\sqrt{g L_p}} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2}$$

از یکسان بودن Re:

$$\Rightarrow \frac{V_m L_m}{\nu_m} = \frac{V_p L_p}{\nu_p} \Rightarrow \frac{\nu_m}{\nu_p} = \frac{V_m}{V_p}\frac{L_m}{L_p}$$

$$\Rightarrow \frac{\nu_m}{\nu_p} = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{1/2}\left(\frac{L_m}{L_p}\right) = \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2}$$

اگر مدل سافت‌شده از کشتی یک مدل $\frac{1}{100}$ باشد

$$\Rightarrow \frac{\nu_m}{(\nu_p)} = \left(\frac{1}{100}\right)^{3/2} = \frac{1}{1000}$$

(آب)

سیال درون حوضچه کشش $\nu_m = \frac{1}{1000}\nu_{آب}$

تشابه ناقص: Incomplete Similarity

وقتی فقط برخی از پارامترهای بدون بعد در توصیف یک مسئله فیزیکی مابین مدل و نمونه واقعی هم یکی باشند، تشابه ناقص موجود دارد.

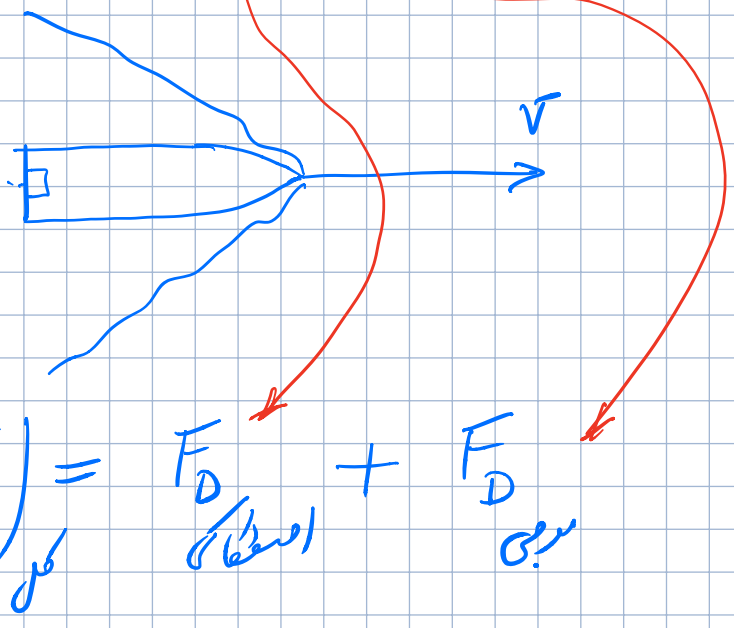
مثال: مقصود بررسی نیروی درگ یک کشتی به طول 400 ft یک مدل 10 ft از آن ساخته شده و در حوضچه کشش آب شیرین مورد آزمایش قرار می‌گیرد. وقتی کشتی واقعی با سرعت 400 knots حرکت کند، سرعت مدل در حوضچه کشش چقدر باید باشد؟ همچنین اگر نیروی اندازه‌گیری شده از درگ مدل در حوضچه کشش برابر با 2 lb باشد، نیروی درگ کشتی واقعی چقدر است؟

$$F_D = f(V, L, g, \rho, \mu) \quad , n = 6$$
$$m = 3$$

$$\Rightarrow \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$$

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2} \quad , \quad Re = \frac{\rho V L}{\mu} \quad , \quad F_R = \frac{V}{\sqrt{gL}}$$

$$\Rightarrow C_D = f(Re, Fr)$$



$$\Rightarrow F_D\Big|_{\text{کل}} = F_D\Big|_{\text{فشاری}} + F_D\Big|_{\text{اصطکاکی}}$$

$$Fr_p = Fr_m \Rightarrow \frac{V}{\sqrt{gL}}\Big)_p = \frac{V}{\sqrt{gL}}\Big)_m$$

$$\Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \sqrt{\frac{L_m}{L_p}} = \sqrt{\frac{10}{400}} \Rightarrow V_m = 30\sqrt{\frac{10}{400}}$$

$$1 \text{ knot} = 6080 \text{ ft/hr} = 1.689 \text{ ft/s}$$

$$\Rightarrow V_m = 8 \text{ ft/s}$$

$$C_D = f(Re, Fr) \Rightarrow C_{D_m} \simeq C_{D_p}$$

(چشم‌پوشی)

$$\Rightarrow \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2}\Big)_m = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V^2 L^2}\Big)_p$$

$$\Rightarrow F_{D_p} = F_{D_m}\left(\frac{V_p}{V_m}\right)^2\left(\frac{L_p}{L_m}\right)^2$$

$$= (2)\left(\frac{50.7}{8}\right)^2\left(\frac{400}{10}\right)^2$$

$$\cong 128525 \text{ lb}$$

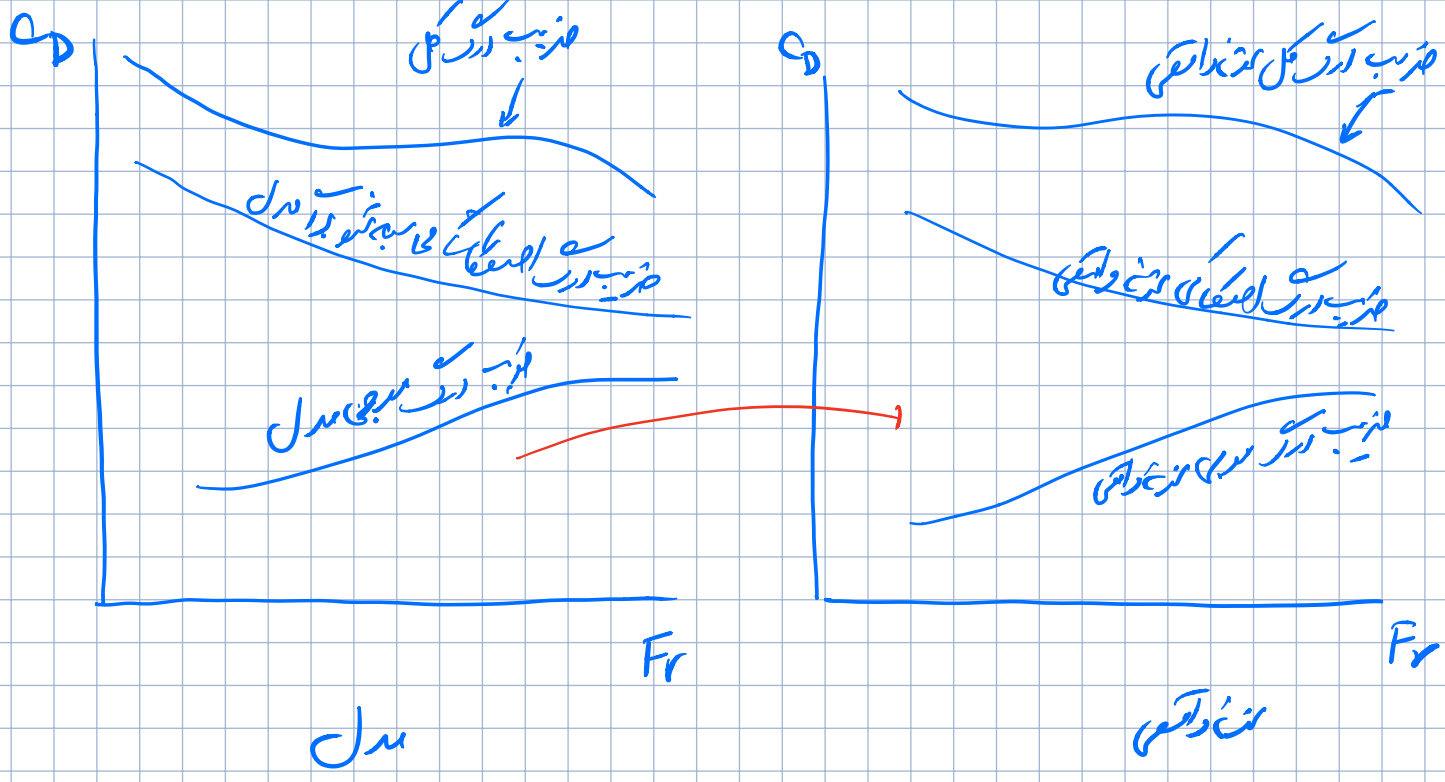
یکی از اشکال‌های کامپیوتر خطای ناشی از تقریب ناقص به کارگیری روش تونریک یا عامل دیگر نتایج آن، چگونه است برای مثال برای کامپیوتر خطای نتایج آن، پیش شامل مراحل زیر استفاده کرد:

1) ابتدا باید حداقل یک از ورک مدل بهتر باشد، مورد مدل و نمونه واقعی باهم برابر تفاوت نسبت و نیروی درگ برای مدل را آن، چگونه اندازه‌گیری کرد.

2) درگ اصطکاکی مدل را توسط روش تونریک یا عامل محاسبه کرده و از درگ کل اندازه‌گیری شده مدل کسر کنید. حاصل درگ مدل مدل بدست می‌آید.

3) با توجه به یک ضریب درگ مدل مدل و نمونه واقعی با یکدیگر برابر هستند (چون دارای $Fr_m = Fr_p$) می‌توان نیروی درگ مدل نمونه واقعی را بدست آورد.

4) مجدداً با استفاده از روش تونریک یا عامل، نیروی درگ اصطکاکی نمونه واقعی را بدست آورده و با نیروی درگ مدل نمونه واقعی (مرحله 3) جمع کنید. حاصل نیروی درگ کل نمونه واقعی بدست خواهد آمد.

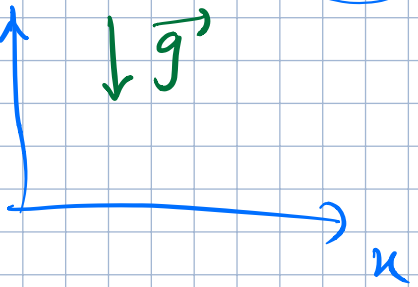


معادلات ناویر استوکس دوبعدی بصورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - \rho g$$



بی بعد سازی:

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{L}$$

$$u^* = \frac{u}{V_\infty}, \quad v^* = \frac{v}{V_\infty}, \quad P^* = \frac{P}{\rho V_\infty^2}$$

با جایگذاری:

$$\frac{\partial (V_\infty u^*)}{\partial (L x^*)} + \frac{\partial (V_\infty v^*)}{\partial (L y^*)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

شرط پیوستگی

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = (V_\infty u^*)\left(\frac{\partial (V_\infty u^*)}{\partial (L x^*)}\right) = \frac{V_\infty^2}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

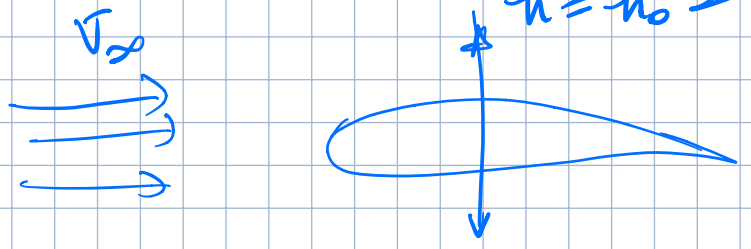
$$\Rightarrow \frac{\rho V_\infty^2}{L}\left(u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\right) = -\frac{\rho V_\infty^2}{L}\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu V_\infty}{L}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

x-mom: $$\Rightarrow u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho V_\infty L}\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}\right)$$

$\frac{1}{Re}$

y-mom: $$\Rightarrow u^*\frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial v^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re}\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}}\right) - \frac{gL}{V_\infty^2}$$

$\frac{1}{Fr^2}$



سرعت سینماتیکی $v = \frac{dh}{dt} = h_0\omega \cos\omega t \Rightarrow v_{in}^* = \frac{h_0\omega}{V_\infty}\cos\omega t^*$

بی بعد سازی: $t^* = \frac{V_\infty t}{L}$

$$\Rightarrow v_{in}^* = \frac{h_0\omega}{V_\infty}\cos\left[\left(\frac{\omega L}{V_\infty}\right)t^*\right]$$

سرعت بی بعد ورودی

$$St = \frac{\omega L}{V_\infty} \equiv \text{Strouhal number}$$