سوالات ۲ - جلسه دوم

آنالیز ابعادی و تشابه : Dimensional Analysis and Similarity

هدف از آنالیز ابعادی : به دست آوردن پارامترهای بی‌بعد برای بررسی تجربی یک پدیده فیزیکی

اصل همگنی ابعادی :

این اصل بیان می‌کند که "همه اجزاء یک معادله فیزیکی باید دارای بعد یکسان باشند."

به عبارت دیگر اگر یک کمیت فیزیکی مانند Q تابعی از n کمیت $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ باشد، آنگاه:

$$f(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0$$

$$\bigcirc + \bigcirc + \bigcirc - \bigcirc = 0$$

مثال:

$$F(x, y, z, l) = x^3 y + \frac{xy^5}{z^2} + z^4 \sin\frac{x}{l} = 0$$

L^4 L^4 L^4 ← بی‌بعد

$$\Rightarrow F\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}\right) = \frac{x^3 y}{l^4} + \frac{xy^5}{z^2 l^4} + \left(\frac{z}{l}\right)^4 \sin\frac{x}{l} = 0$$

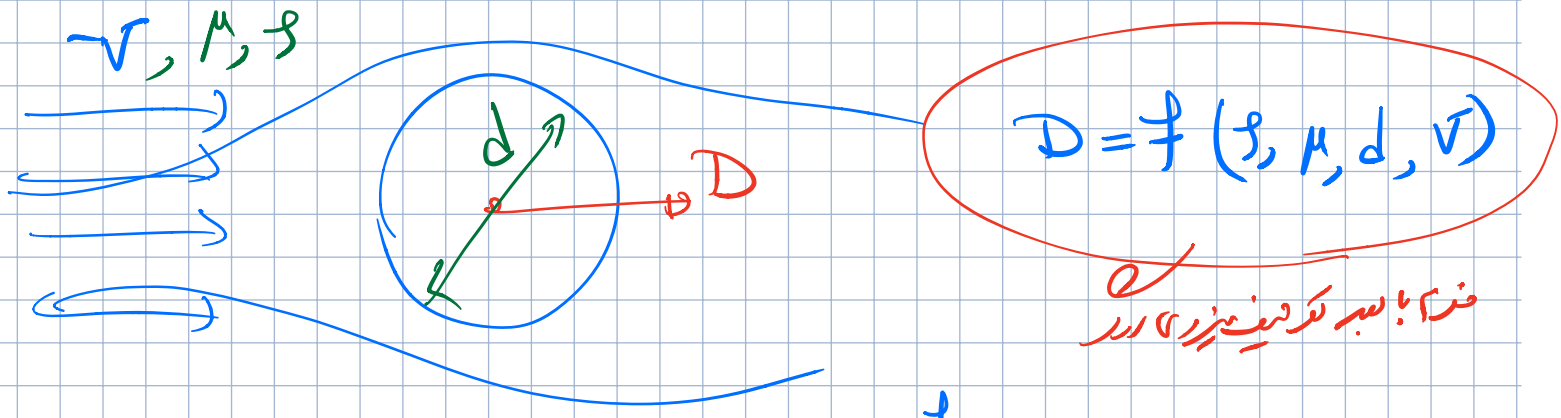
← بی‌بعد

آنالیز ابعادی
- روش ریلی
- روش باکینگهام

The Rayleigh Method روش ریلی:

روش ریلی: $f \propto Q_1^a Q_2^b Q_3^c \cdots Q_n^r$

مثال: با استفاده از روش ریلی عبارتی برای نیروی پسای وارده بر یک کره در جریان تراکم‌ناپذیر بدست آورید. کمیت‌های درگیر در مسئله عبارتند از: قطر کره، سرعت جریان آزاد و چگالی.



روش ریلی: $D = C \rho^a \mu^b d^e V^f$ ←

$M L t$

$F L t$ > دستگاه‌های ابعادی

اگر دستگاه ابعادی $F L t$ انتخاب شود

$D = [F]$ $\quad \rho = [F t^2 L^{-4}]$, $\mu = [F L^{-2} t]$

$d = [L]$, $V = [V t^{-1}]$

$$F = C (F t^2 L^{-4})^a (F t L^{-2})^b (L)^e (L t^{-1})^f$$

$$F: \quad 1 = a + b \quad \Rightarrow \quad a = 1 - b$$

$$L: \quad 0 = -4a - 2b + e + f \quad \Rightarrow \quad e = 2 - b$$

$$t: \quad 0 = 2a + b - f \quad \Rightarrow \quad f = 2 - b$$

$$\Rightarrow D = c\, \rho^{1-b}\, \mu^{b}\, d^{2-b}\, V^{2-b} = c\,(\rho d^2 V^2)\left(\frac{\mu}{\rho d V}\right)^{b}$$

$$\Rightarrow \frac{D}{\rho d^2 V^2} = c\left(\frac{1}{Re}\right)^{b}, \quad Re = \frac{\rho V d}{\mu}$$

ضریب درگ بی‌بعد: $C_D = \dfrac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 S_{ref}}$

$$\Rightarrow C_D = g(Re)$$ ← فرم بی‌بعد رابطه بالا

روش باکینگهام:

قضیه پی باکینگهام: Buckingham Pi Theorem

اگر معادله‌ای شامل n متغیر از آنالیز ابعادی صحیح باشد می‌توان آنرا توسط رابطه‌ای بین حداقل $n-m$ متغیر بی‌بعد بیان کرد که در آن m برابر با حداقل تعداد لازم برای توصیف متغیرهای مربوطه است.

$$q_1 = f(q_2, q_3, \dots, q_n)$$ ← فرم بی‌بعد

$$\Rightarrow \quad \pi_1 = \phi(\pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m})$$

m = حداکثر تعداد پارامترهای تکراری متغیرها

مراحل تکلیف برای آنالیز ابعادی به روش باکینگهام:

مرحله اول:

اگر مرحله قبل، تعداد متغیرها را داده باشد، مرحله S در شروع مسئله فیزیکی را باید انتخاب شود.

مرحله دوم:

انتخاب سیستم ابعادی مورد نظر: FLt یا MLt

مرحله سوم:

یادداشت کلیه متغیرها بر حسب ابعاد اصلی $(FLt \text{ یا } MLt)$

مرحله چهارم:

با توجه به متغیرهای موجود، متغیرهای تکراری انتخاب کنید.

تعداد متغیرهای تکراری برابر حداکثر تعدادی است که نمی‌توانند تشکیل بی‌بعد دهند. (m)

✓ دو متغیر تکراری نباید دارای ابعاد یکسان باشند (منظور این است که حاصل تقسیم دو متغیر تکراری نباید برابر عدد ثابت شود)

✓ متغیرهای تکراری انتخاب شده باید در مجموع همه ابعاد اصلی را شامل شوند.

$d \to L$ ، $v \to Lt$ ، $\rho = ML^{-3}$

مرحله پنجم: تعیین $n-m$ پارامتر بدون بعد بر اساس اصل باکینگهام

مرحله ششم: چک کردن پارامترهای بدون بعد بدست آمده

مرحله هفتم: بیان رابطه با بعد اولیه بصورت یک رابطه بی بعد مساوی

مثال: مثال قبل را در مورد توصیف نیروی درگ کره با استفاده از روش پی انجام دهید.

مرحله اول: تعیین متغیرهای دخیل در مسئله

$q_1 = F \equiv$ نیروی پسا — $q_4 = \rho \equiv$ دانسیته سیال

$q_2 = v \equiv$ سرعت جریان — $q_5 = \mu \equiv$ لزجت سیال

$q_3 = D \equiv$ قطر کره

$\Rightarrow n = 5$

مرحله دوم: آنالیز ابعادی

سیستم MLt را انتخاب می‌کنیم.

مرحله سوم: بیان ابعاد متغیرها برحسب ابعاد اصلی:

$$F = \left[\frac{ML}{t^2}\right] \quad , \quad v = \left[\frac{L}{t}\right] \quad , \quad D = [L]$$

$$\rho = \left[\frac{M}{L^3}\right] \quad , \quad \mu = \left[\frac{M}{Lt}\right] \Rightarrow m = 3$$

مرحله دوم: آنالیز تعداد متغیرهای تکراری:

$$D \to [L] \quad , \quad V \to \left[\frac{L}{t}\right] \quad , \quad \rho \to \left[\frac{M}{L^3}\right]$$

$\Rightarrow \rho, V, D$ متغیرهای تکراری

مرحله پنجم: تعیین $n-m$ پارامتر بدون بعد:

$$n - m = 5 - 3 = 2 \Rightarrow \pi_1 , \pi_2 \checkmark$$

$$\pi_1 = \rho^a V^b D^c F$$

$$\pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \left[\left(\frac{M}{L^3}\right)^a \left(\frac{L}{t}\right)^b (L)^c \left(\frac{ML}{t^2}\right)\right] = [M^0 L^0 t^0]$$

$$M: \quad a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$L: \quad -3a + b + c + 1 = 0 \Rightarrow c = -2$$

$$t: \quad -b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2} \checkmark$$

$$\pi_2 = \rho^d V^e D^f \mu = \left[\left(\frac{M}{L^3}\right)^d \left(\frac{L}{t}\right)^e (L)^f \left(\frac{M}{Lt}\right)\right]$$

$$= [M^0 L^0 t^0]$$

M: $d + 1 = 0 \Rightarrow d = -1$

L: $-3d + e + f - 1 = 0 \Rightarrow f = -1$

t: $-e - 1 = 0 \Rightarrow e = -1$

$$\Rightarrow \pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D} \equiv \frac{1}{Re} \Rightarrow \pi_2 = Re$$

مرحله ششم: کمیت بی بعد بدست آمده را بازنویسی کنید.

$$= \pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2} = \left[\frac{\cancel{\frac{ML}{t^2}}}{\cancel{\frac{L^3}{M}} \cancel{\frac{t^2}{L^2}} \cancel{\frac{1}{L^2}}}\right] = [1] \checkmark$$

$\pi_2 = \cdots \Rightarrow [1]$ ✓

مرحله هفتم: رابطه بی بعد به توصیف مسئله برگردانید.

$$\pi_1 = f(\pi_2) \Rightarrow C_D = g(Re_D)$$

از کجا؟

از کجا؟

مفهوم تأثير الجاذبية !