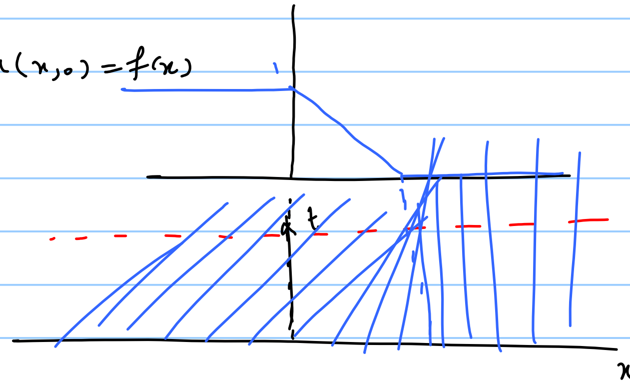
Note Title 5/23/2020

CFD I - شنبه ۹۹/۳/۳

یادآوری :

$uu_x + u_t = 0$ $\quad -\infty < x < \infty$

شرط اولیه $u(x,0) = f(x)$



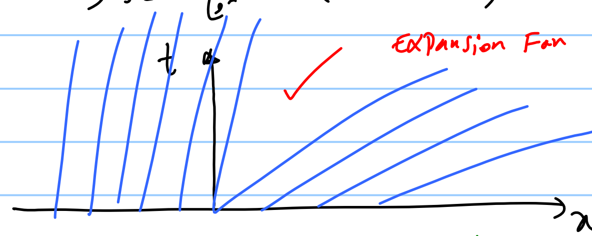
$1 + f'(x - a(u)t)\, a'(u)\, t > 0$ شرط وجود جواب پیوسته

حل ضعیف (حل تعمیم یافته):

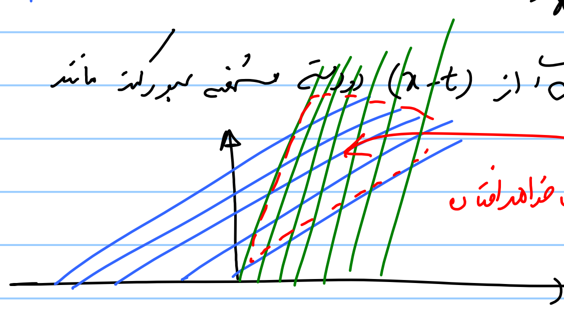
چنانچه شرط $1 + f'(x - a(u)t)\, a'(u)\, t > 0$ برقرار نباشد در حالت کلی دو حالت اتفاق می‌افتد

۱) ناحیه‌ای وجود داشته باشد (در صفحه t-x) که با هیچ مشخصه پوشیده نشده باشد.

Expansion Fan فن انبساطی



2) حالتی که در ناحیه‌ای از (x-t) دو یا چند مشخصه عبور کند مانند



در این ناحیه موج شوک اتفاق خواهد افتاد

مسئله ریمان: مسئله مقدار اولیه زیر با شرط اولیه مقادیر ثابت که تنها شامل یک ناپیوستگی است، به مسئله ریمان معروف است:

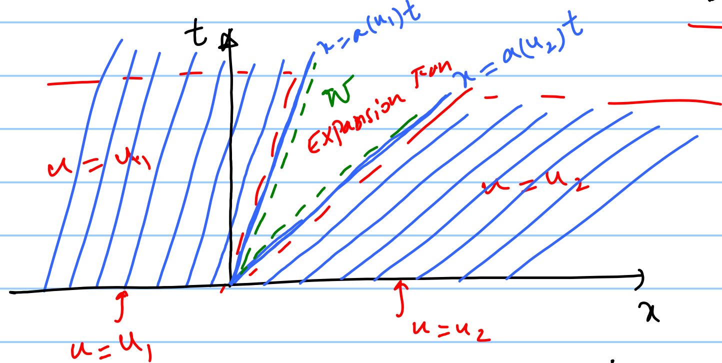
$$F_x + u_t = a(u)\,u_x + u_t = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_1 = \text{Const} & x<0 \\ u_2 = \text{Const} & x>0 \end{cases}$$

این مسئله را برای دو حالت $a(u_1)<a(u_2)$ و $a(u_1)>a(u_2)$ باشد

بررسی می‌کنیم.

حالت اول: اگر $a(u_1)<a(u_2)$ باشد



$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} u_1\,, & x<a(u_1)t \\ ? & a(u_1)t<x<a(u_2)t \\ u_2\,, & x>a(u_2)t \end{cases}$$

می‌توان اثبات کرد که در ناحیه ؟ که جواب بصورت $u(x,t)=g\left(\frac{x}{t}\right)$

خواهد بود که g یک تابع مشتق‌پذیر است.

اگر $u=g\left(\frac{x}{t}\right) \Rightarrow u_x = g'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t}$ و $u_t = g'\left(\frac{x}{t}\right)\left(-\frac{x}{t^2}\right)$

جاگذاری: $\underline{a(u)}\,u_x + u_t)=0$

$$\Rightarrow a\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right) g'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t} + g'\left(\frac{x}{t}\right)\left(-\frac{x}{t^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow a\left(g\left(\frac{x}{t}\right)\right) = \frac{x}{t} \Rightarrow g = a^{-1}$$

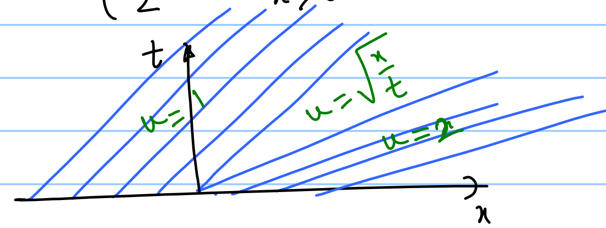
$$\Rightarrow u(x,t) = \begin{cases} u_1 & x<a(u_1)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & a(u_1)t<x<a(u_2)t \\ u_2 & x>a(u_2)t \end{cases}$$

$, g = a^{-1}$

مثال:

$$u_t + u^2 u_x = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ 2 & x>0 \end{cases}$$



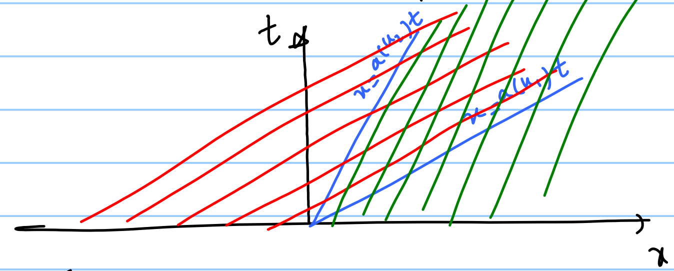
$$a(u) = u^2 \Rightarrow a(u_1) = 1 \quad , \quad a(u_2) = 4$$

$$u = \begin{cases} 1 & x<t \\ g(\frac{t}{x}) = \sqrt{\frac{x}{t}} & t<x<4t \\ 2 & x>4t \end{cases}$$

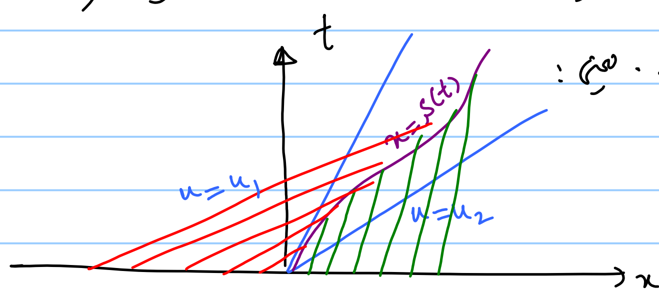
$$a(u) = u^2 \Rightarrow g(u) = \sqrt{u}$$

$$g(\tfrac{x}{t}) = \sqrt{\frac{x}{t}}$$

حالت دوم: حالتی که $a(u_1) > a(u_2)$ باشد.

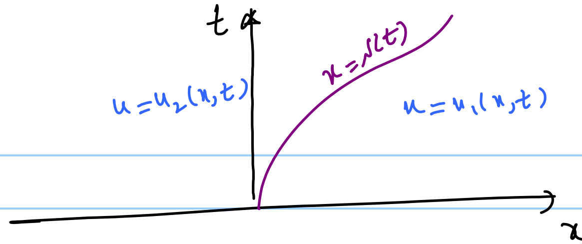


مشخصه‌ها تداخل دارند که در این حالت جواب بصورت یک مرز ناپیوسته (مرز شوک) قابل بیان است. یعنی:



برای تعیین هندسه شوک که بیانگر ناپیوستگی در جواب است، به ناچار باید از فرم انتگرالی معادله بقا استفاده کرد. یعنی جواب در محل شوک باید طوری باشد که فرم انتگرالی معادله بقا را ارضا نماید.

به چنین جوابی جواب ضعیف یا جواب تعمیم یافته گفته می‌شود.



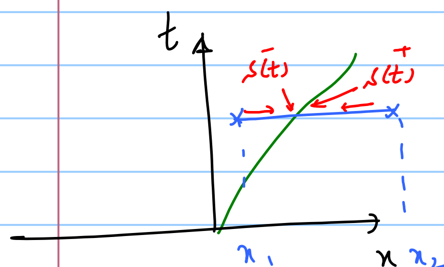
فرض کنید جواب در حالت کلی، پیوسته و مشتق پذیر باشد.

می‌توان ثابت کرد که هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند، منحنی $x = s(t)$ بیانگر مرز شوک است.

شرط 1 : $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{F(u_1) - F(u_2)}{u_1 - u_2}$

شرط 2 : $a(u_1) < \dfrac{ds}{dt} < a(u_2)$ (شرط آنتروپی)

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx$$



$$Q(t) = \int_{x_1}^{s(t)} u(x,t)\,dx + \int_{s(t)}^{x_2} u(x,t)\,dx \qquad (*)$$

از طرفی طبق قانون بقا، می‌توان نوشت:

$$\frac{dQ}{dt} = F\big(u_1(x,t)\big) - F\big(u_2(x,t)\big) \qquad (**)$$

از طرفی با توجه به اینکه

$$G(t) = \int_{x_0}^{s(t)} g(x)\,dx \Rightarrow G'(t) = g[s(t)] \cdot s'(t)$$

می‌توان نوشت

$$(*) \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = u_1[s(t),t] \cdot s'(t) - u_2[s(t),t]\, s'(t)$$

$$\Rightarrow \big\{u_1[s(t),t] - u_2[s(t),t]\big\}\, s'(t) =$$

$$F\big[u_1(s(t),t)\big] - F\big[u_2(s(t),t)\big]$$

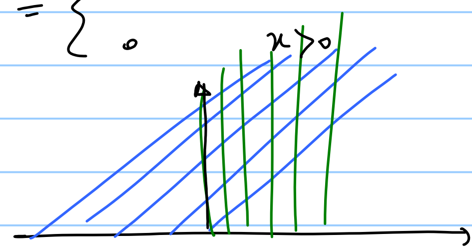
$$\Rightarrow s'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{F(u_1) - F(u_2)}{u_1 - u_2}$$ شرط ر،

مثال ۳

$$u u_x + u_t = 0 \qquad -\infty < x < \infty$$

$a(u) = u$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

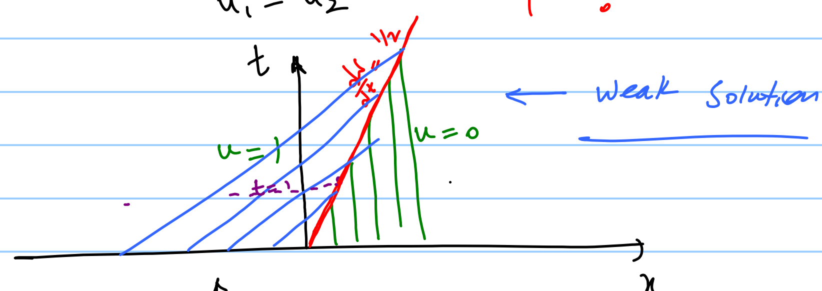


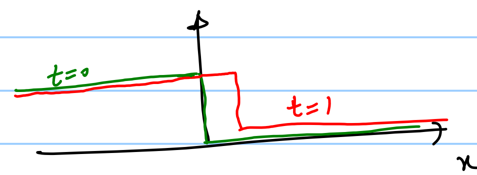
$$\frac{ds}{dt} = \frac{F(u_1) - F(u_2)}{u_1 - u_2}$$

$$a(u) = u \Rightarrow \frac{dF}{du} = u \Rightarrow F(u) = \frac{u^2}{2} + C$$

$$\Rightarrow F(u_1) - F(u_2) = \frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{\frac{1}{2}(u_1^2 - u_2^2)}{u_1 - u_2} = \frac{1}{2}(\underset{1}{u_1} + \underset{0}{u_2}) = \frac{1}{2}$$

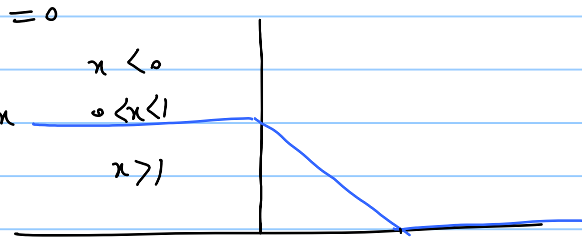


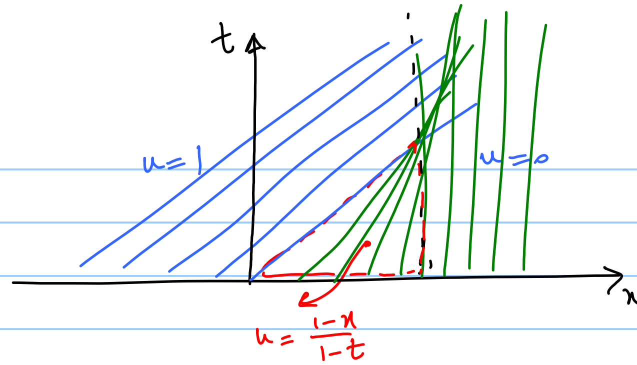


تکمیل جواب مثال جلسه قبل:

$$u u_x + u_t = 0$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$





برای $t>1$ باید مرز شوک را مشخص کرد.

$$\frac{ds}{dt}=\frac{F(u_1)-F(u_2)}{u_1-u_2}=\frac{\frac{1}{2}(u_1^2-u_2^2)}{u_1-u_2}=\frac{1}{2}(\underset{1}{u_1}+\underset{0}{u_2})=\frac{1}{2}$$