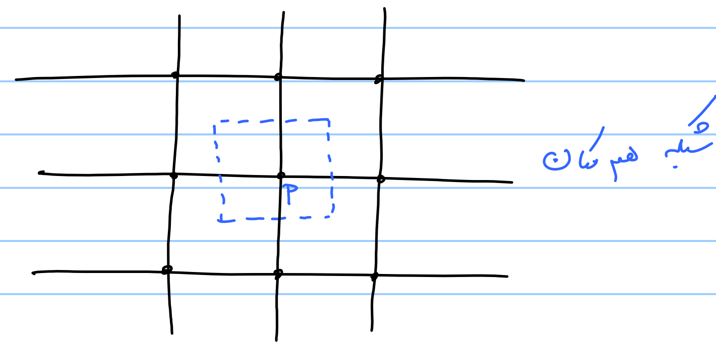
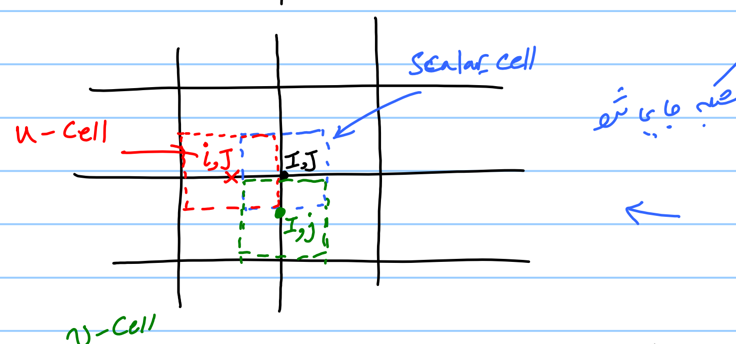
CFD I - شنبه ۲۰ اردیبهشت

فرمولاسیون حجم محدود برای حل دوبعدی تراکم ناپذیر و داشتیم برای شبکه جابجا شده:

انواع شبکه در روش FV:
- Collocated — شبکه ی هم مکان
- Staggered — " جابجا شده





معادلات حاکم:

پیوستگی: $\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{V})=0$ (1)

x-mom: $\vec{\nabla}\cdot(\rho u\vec{V}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{\nabla}u) + S_u$ (2)

y-mom: $\vec{\nabla}\cdot(\rho v\vec{V}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \vec{\nabla}\cdot(\mu\vec{\nabla}v) + S_v$ (3)

Energy: $\vec{\nabla}\cdot(\rho e\vec{V}) = -P\vec{\nabla}\cdot\vec{V} + \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \Phi + S_e$ (4)

$P = P(\rho, T)$ برای گاز ایده آل: $P=\rho RT$ (5)

$e = e(\rho, T)$ برای گاز ایده آل کالریک: $e = C_v T$ (6)

۶ معادله و ۶ مجهول ρ، u، v، P، T و e هستند.

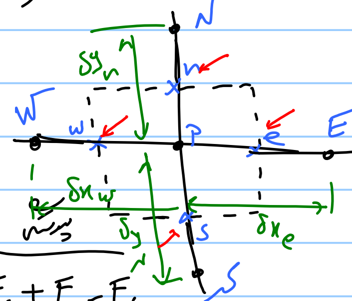
یادآوری معادله انتقال:

$$\vec{\nabla}\cdot(\rho\phi\vec{v}) = \vec{\nabla}\cdot(\Gamma\vec{\nabla}\phi) \qquad (7)$$

فرم گسسته FV معادله انتقال

$$\Rightarrow a_p\phi_p = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N$$

$$= \sum a_{nb}\phi_{nb}$$



که درآن :

$$a_p = a_W + a_E + a_S + a_N + \underbrace{F_e - F_w + F_n - F_s}_{\text{پیوستگی} = 0}$$

$$a_E = D_e A(|Pe|) + \max[-F_e, 0]$$

$$a_W = D_w A(|Pe|) + \max[F_w, 0]$$

$$a_N = D_n A(|Pe|) + \max[-F_n, 0]$$

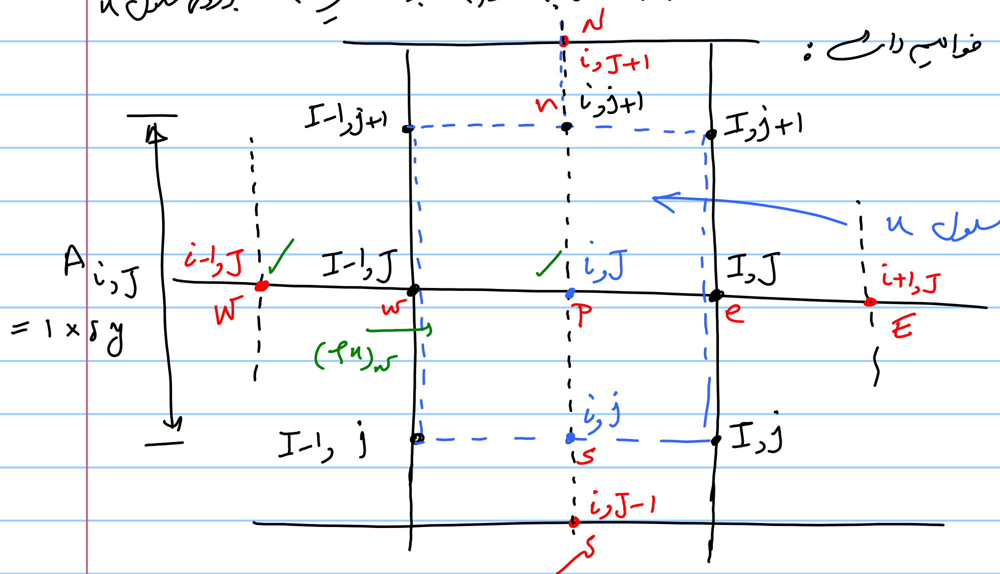
$$a_S = D_s A(|Pe|) + \max[F_s, 0]$$

$$F_e = (\rho u)_e \;,\; F_w = (\rho u)_w \;,\; F_s = (\rho v)_s \;,\; F_n = (\rho v)_n$$

$$D_e = \left(\frac{\Gamma}{\delta x}\right)_e \;,\; D_w = \left(\frac{\Gamma}{\delta x}\right)_w \;,\; D_s = \left(\frac{\Gamma}{\delta y}\right)_s \;,\; D_n = \left(\frac{\Gamma}{\delta y}\right)_n$$

$$Pe)_e = \frac{F_e}{D_e} \;,\; Pe_w = \frac{F_w}{D_w} \;,\; \ldots$$

اکنون با نوشتن مشابه رابطه (2)؛ رابطه (7) برای متغیر u بر روی سلول u خواهیم داشت :



ادامه درس :

$$\int_{V} \vec{\nabla}\cdot(\rho\phi\vec{v})\,dV = \int_{A} (\rho\phi\,\vec{v}\cdot\hat{n})\,dA$$

به همین ترتیب برای عبارات $\frac{\partial p}{\partial x}$ و S_u نیز بر روی حجم سلول انتگرال‌گیری می‌شود!

$$-\int_{V_{u\text{-cell}}} \left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{i,J} dV = -\frac{P_{I,J}-P_{I-1,J}}{\cancel{\delta x}}\,\cancel{\delta x}\,A_{i,J}$$

$$= (P_{I-1,J}-P_{I,J})\,A_{i,J}$$

$$\int_{V_{u\text{-cell}}} S_u\,dV = S_{u_{i,J}}\,\delta x\,A_{i,J} = b_{i,J}$$

به همین ترتیب فرم گسسته x-mom به شکل زیر نتیجه خواهد شد :

x-mom

$$a_{i,J}\,u_{i,J} = \underbrace{a_{i-1,J}}_{a_W}\,u_{i-1,J} + \underbrace{a_{i+1,J}}_{a_E}\,u_{i+1,J} +$$

$$\underbrace{a_{i,J-1}}_{a_S}\,u_{i,J-1} + \underbrace{a_{i,J+1}}_{a_N}\,u_{i,J+1} +$$

$$(P_{I-1,J}-P_{I,J})\,A_{i,J} + b_{i,J}$$

برای محاسبه ضرایب a، نیاز به محاسبه شارها و Pe است.

$$F_w = (\rho u)_w = F_{I-1,J} = \frac{F_{i,J}+F_{i-1,J}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\rho_{i,J}\,u_{i,J} + \rho_{i-1,J}\,u_{i-1,J}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\rho_{I,J}+\rho_{I-1,J}}{2}\right)u_{i,J} + \left(\frac{\rho_{I-1,J}+\rho_{I-2,J}}{2}\right)u_{i-1,J}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\rho_{I,J}+\rho_{I-1,J})\,u_{i,J} + (\rho_{I-1,J}+\rho_{I-2,J})\,u_{i-1,J}\right]$$

$$F_e = (\rho u)_e = F_{I,J} = \frac{F_{i+1,J}+F_{i,J}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\rho_{I+1,J}+\rho_{I,J})\,u_{i+1,J} + (\rho_{I,J}+\rho_{I-1,J})\,u_{i,J}\right]$$

$$F_s = (\rho v)_s = F_{i,j} = \frac{F_{I-1,j} + F_{I,j}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\rho_{I,J} + \rho_{I,J-1}) v_{I,j} + (\rho_{I-1,J} + \rho_{I-1,J-1}) v_{I-1,j}\right]$$

$$F_n = (\rho v)_n = F_{i,j+1} = \frac{F_{I-1,j+1} + F_{I,j+1}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\rho_{I-1,J+1} + \rho_{I-1,J}) v_{I-1,j+1} + (\rho_{I,J+1} + \rho_{I,J}) v_{I,j+1}\right]$$

برای عدد پکلت Pe ها :

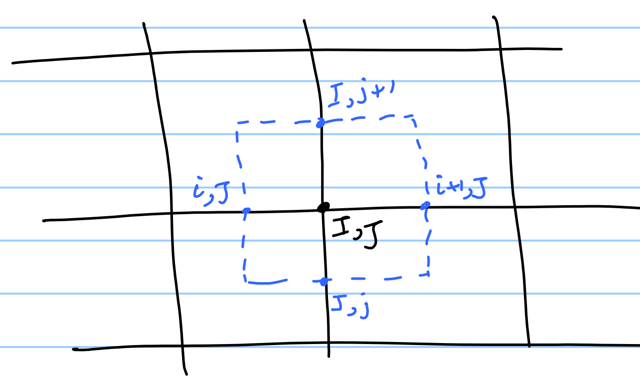
$$P_e = \frac{F_e}{D_e} = \frac{F_e \, \delta x_e}{\Gamma}$$

$$P_w = \frac{F_w \, \delta x_w}{\Gamma} \,, \quad P_{e_s} = \frac{F_s \, \delta y_s}{\Gamma} \,, \quad P_{e_n} = \frac{F_n \, \delta y_n}{\Gamma}$$

الگوریتم سیمپل : SIMPLE

در این الگوریتم ابتدا فشار حدس زده می‌شود سپس مؤلفه‌های سرعت از معادلات تکانه بدست می‌آید. با جایگذاری مؤلفه‌های سرعت در معادله پیوستگی رابطه‌ای برای اصلاح فشار منتج می‌شود و فرآیند تکرار تا ارضا شدن رابطه پیوستگی ادامه می‌یابد.

در این الگوریتم هم برروی شبکه جابجا شده کار می‌کند، معادله پیوستگی برروی حجم کنترل اسکالر و مؤلفه‌های سرعت برروی u-cell و v-cell نوشته می‌شوند.



معادله پیوستگی :

$$\int_{cv} \rho \vec{v} \cdot \hat{n} \, dA = 0 \Rightarrow \left[(\rho u A)_{i+1,J} - (\rho u A)_{i,J}\right] +$$

$$\left[(\rho v A)_{I,j+1} - (\rho v A)_{I,j}\right] = 0$$

: x-mom

$$\Rightarrow a_{i,J}\, u_{i,J} = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_{I-1,J} - P_{I,J}) A_{i,J} + b_{i,J} \qquad (a)$$

: y-mom

$$a_{I,j}\, v_{I,j} = \sum a_{nb} v_{nb} + (P_{I,J-1} - P_{I,J}) A_{I,j} + b_{I,j} \qquad (b)$$

حدس میدان فشار : $P^* \Rightarrow u^*,\ v^*$

$$\Rightarrow a_{i,J}\, u^*_{i,J} = \sum a_{nb} u^*_{nb} + (P^*_{I-1,J} - P^*_{I,J}) A_{i,J} + b_{i,J} \qquad (c)$$

$$a_{I,j}\, v^*_{I,j} = \sum a_{nb} v^*_{nb} + (P^*_{I,J-1} - P^*_{I,J}) A_{I,j} + b_{I,j} \qquad (d)$$

حال اگر قرار دهیم :

فشار واقعی $P = P^* + P^c$

$$u = u^* + u^c \quad \Rightarrow u^c = u - u^*$$

$$v = v^* + v^c \quad \Rightarrow v^c = v - v^*$$

از معادلات a و c

$$\Rightarrow a_{i,J}\, u^c_{i,J} = \cancel{\sum a_{nb} u^c_{nb}} + (P^c_{I-1,J} - P^c_{I,J}) A_{i,J}$$

از b و d

$$\Rightarrow a_{I,j}\, v^c_{I,j} = \cancel{\sum a_{nb} v^c_{nb}} + (P^c_{I,J-1} - P^c_{I,J}) A_{I,j}$$

SIMPLE $\Rightarrow$

معادلات اصلاح سرعت

$$\begin{cases} u^c_{i,J} = d_{i,J}\,(P^c_{I-1,J} - P^c_{I,J}) \\ v^c_{I,j} = d_{I,j}\,(P^c_{I,J-1} - P^c_{I,J}) \end{cases}$$

که :

$$d_{i,J} = \frac{A_{i,J}}{a_{i,J}} \quad , \quad d_{I,j} = \frac{A_{I,j}}{a_{I,j}}$$

$$\Rightarrow \checkmark\ u_{i,J} = u^*_{i,J} + d_{i,J}\left(P^c_{I-1,J} - P^c_{I,J}\right)$$

$$\checkmark\ v_{I,j} = v^*_{I,j} + d_{I,j}\left(P^c_{I,J-1} - P^c_{I,J}\right)$$

با جایگذاری $u_{i,J}$ و $v_{I,j}$ در معادله پیوستگی

$$\Rightarrow \Big[\rho_{i+1,J} A_{i+1,J}\left(u^*_{i+1,J} + d_{i+1,J}\left(P^c_{I,J} - P^c_{I+1,J}\right)\right)$$

$$- \rho_{i,J} A_{i,J}\left(u^*_{i,J} + d_{i,J}\left(P^c_{I-1,J} - P^c_{I,J}\right)\right)\Big]$$

$$+ \Big[\rho_{I,j+1} A_{I,j+1}\left(v^*_{I,j+1} + d_{I,j+1}\left(P^c_{I,J} - P^c_{I,J+1}\right)\right)$$

$$- \rho_{I,j} A_{I,j}\left(v^*_{I,j} + d_{I,j}\left(P^c_{I,J-1} - P^c_{I,J}\right)\right)\Big] = 0$$

$$\Rightarrow a_{I,J} P^c_{I,J} = a_{I+1,J} P^c_{I+1,J} + a_{I-1,J} P^c_{I-1,J} + a_{I,J+1} P^c_{I,J+1}$$

رابطه اصلاح فشار
SIMPLE

$$+ a_{I,J-1} P^c_{I,J-1} + b^c_{I,J}$$

که در آن!

$$a_{I,J} = a_{I+1,J} + a_{I-1,J} + a_{I,J+1} + a_{I,J-1}$$

$$a_{I+1,J} = (\rho d A)_{i+1,J}$$

$$a_{I-1,J} = (\rho d A)_{i,J}$$

$$a_{I,J+1} = (\rho d A)_{I,j+1}$$

$$a_{I,J-1} = (\rho d A)_{I,j}$$

$$b^c_{I,J} = (\rho u^* A)_{i,J} - (\rho u^* A)_{i+1,J} + (\rho v^* A)_{I,j} - (\rho v^* A)_{I,j+1}$$