CFDI - شنبه ۹۹/۲/۱۳

تکالیف بصورت فایل pdf ایمیل شود. bnmorteza@scu.ac.ir

نام فایل: HW5-نام‌خانوادگی

موضوع ایمیل: CFD-Homework

برای پروژه‌ها کامپیوتری: موضوع ایمیل: Source-HW#3-...

روش حجم محدود: Finite Volume Method (FVM)

اساس این روش نوشتن معادلات حاکم به فرم دیورژانس (فرم بقائی) و سپس استفاده از قضیه دیورژانس می‌باشد.

فرم دیورژانس معادلات حاکم:

شار A

پیوستگی: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho \vec{V}) = 0 \qquad (1)$$

x-mom: $$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{\nabla}\cdot(\mu \vec{\nabla} u) + S_x \qquad (2)$$

y-mom: $$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{\nabla}\cdot(\mu \vec{\nabla} v) + S_y \qquad (3)$$

z-mom: $$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho w \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \vec{\nabla}\cdot(\mu \vec{\nabla} w) + S_z \qquad (4)$$

Energy: $$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho e \vec{V}) = -p\vec{\nabla}\cdot\vec{V} + \vec{\nabla}\cdot(k\vec{\nabla}T) + \Phi + S_e \qquad (5)$$

معادله حالت: $$p = p(\rho, T) \xrightarrow{\text{گاز ایده‌آل}} p = \rho R T \qquad (6)$$

فرآیند ترمودینامیکی $$e = e(\rho, T) \longrightarrow e = c_v T \qquad (7)$$

مجهولات: ρ, u, v, w, p, e, T

هرکدام از روابط بقای (۱) تا (۵) را می‌توان به فرم کلی نیز نمایش داد:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\phi\vec{V}) = \vec{\nabla}\cdot(\Gamma\vec{\nabla}\phi) + S_\phi$$

اثرات جابجایی ϕ اثرات پخش ϕ

(رابطهٔ انتقال خاصیت ϕ) ← رابطهٔ جابجایی - پخش

پیوستگی: $\phi = 1$, $\Gamma = 0$, $S_\phi = 0$

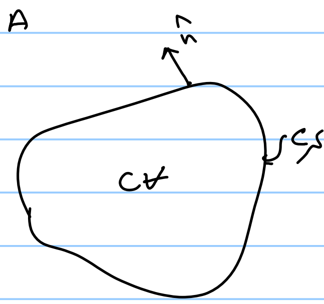
x-mom: $\phi = u$, $\Gamma = \mu$, $S_\phi =$ مابقی عبارات

انتگرال رابطهٔ انتقال بر روی یک حجم کنترل انتگرال‌گیری شود:

$$\int_{CV}\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\,dV + \int_{CV}\vec{\nabla}\cdot(\rho\phi\vec{V})\,dV = \int_{CV}\vec{\nabla}\cdot(\Gamma\vec{\nabla}\phi)\,dV + \int_{CV}S_\phi\,dV$$

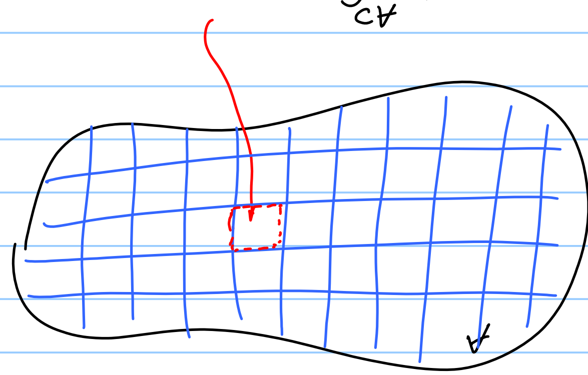
قضیهٔ دیورژانس:

$$\int_{CV}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dV = \int_{CS}\vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$

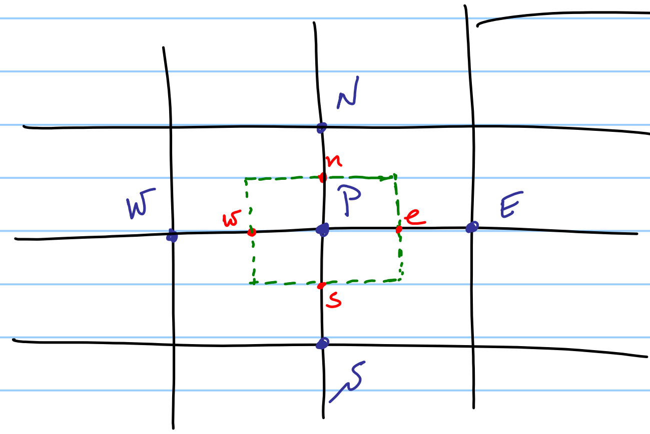


$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{CV}(\rho\phi)\,dV\right] + \int_{CS}(\rho\phi\vec{V})\cdot\hat{n}\,dA =$$

$$\int_{CS}(\Gamma\vec{\nabla}\phi)\cdot\hat{n}\,dA + \int_{CV}S_\phi\,dV$$

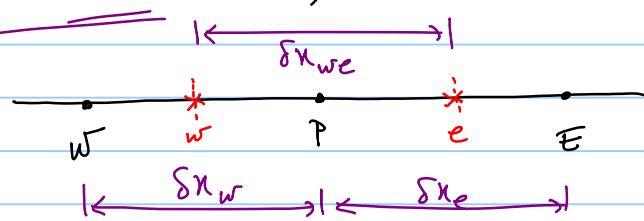


گسسته‌سازی معادلات در FVM :



اعمال معادله‌ی جابجایی - پخش برای حالت دائم و یک بعدی :

$$\int_{CS} (\rho \phi \vec{V}) \cdot \hat{n} \, dA = \int_{CS} (\Gamma \vec{\nabla} \phi) \cdot \hat{n} \, dA$$



$$\Rightarrow (\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w = \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w$$

تقریب مرکزی :
$$\phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \quad , \quad \phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}$$

$$\Rightarrow (\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_e} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_w}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\frac{(\rho u)_e}{2} - \frac{(\rho u)_w}{2} + \frac{\Gamma_e}{\delta x_e} + \frac{\Gamma_w}{\delta x_w}\right]}_{a_P} \phi_P =$$

$$\underbrace{\left[\frac{\Gamma_e}{\delta x_e} - \frac{(\rho u)_e}{2}\right]}_{a_E} \phi_E + \underbrace{\left[\frac{(\rho u)_w}{2} + \frac{\Gamma_w}{\delta x_w}\right]}_{a_W} \phi_W$$

$$\Rightarrow \underline{a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W}$$

عبارت (ρu) که بیانگر شار جابجایی است معمولاً با F نمایش داده می‌شود

〃 $\frac{\Gamma}{\delta x}$ 〃 〃 نفوذپذیری است 〃 〃 D 〃 〃 .

لذا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad , \quad a_W = D_w + \frac{F_w}{2}$$

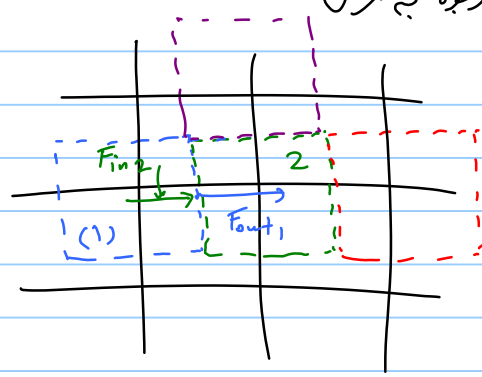
$$a_P = D_e - \frac{F_e}{2} + D_w + \frac{F_w}{2} + F_e - F_w$$

$$= a_E + a_W + \underbrace{\cancel{(F_e - F_w)}}_{0}$$

پیوستگی: $F_e = F_w \Longrightarrow \boxed{a_P = a_E + a_W}$

چهار اصل کلی در FVM:

1) سازگاری شار عبوری از وجوه حجم کنترل



$$F_{out_1} = F_{in_2}$$

2) اصل ضرایب مثبت

ضرایب a_P و کلیه ضرایب مربوط به نقاط همسایه آن بایستی هم علامت (معمولاً مثبت) باشند.

3) اصل شیب منفی خطی‌سازی جمله منبع:

شیب منبع

$$\bar{S} = S_u + S_p \phi_p$$

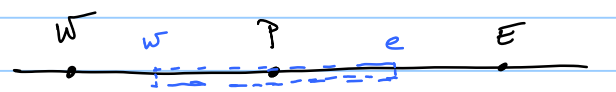
ضریب S_p که بیانگر شیب خطی است حتماً بایستی منفی باشد تا الگوریتم تکرار همگرا گردد.

4) مجموع ضرایب همسایگان:

در صورتیکه عبارت چشمه وجود نداشته باشد

$$a_P = \sum a_{nb}$$

مثال ۵: برای حالت زیر، ϕ_P را با توجه به داده‌های مربوط بدست آورید.



$\phi_W = 100$ $\qquad\qquad$ $\phi_E = 200$

$$D = \frac{\Gamma}{\delta x} = 1 \quad , \quad F = \rho u = 4$$

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W$$

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} = 1 + \frac{4}{2} = 3$$

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} = -1$$

نقض یکی از چهار شرط پاتانکار

$$a_P = a_E + a_W = 2$$

$$\Rightarrow 2\phi_P = (-1)(200) + (3)(100)$$

$$\Rightarrow \cancel{\phi_P = 50} \quad !$$

غیر فیزیکی

تعریف عدد پکلت سلول:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma/\delta x} = \frac{\rho u \delta x}{\Gamma} = \frac{\text{اثرات جابجایی}}{\text{اثرات نفوذ}}$$

برای مثال قبل: $\quad Pe = \frac{4}{1} = 4$

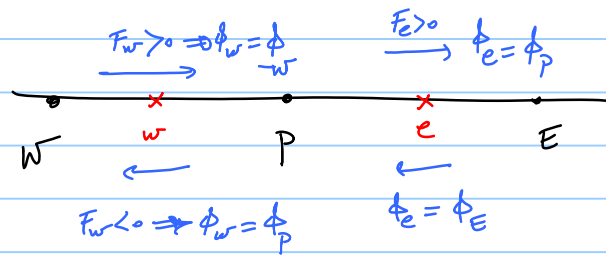
$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \geq 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2}Pe \geq 0$$

$$\Rightarrow Pe_w = \frac{F_w}{D_w} \geq -2$$

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2} \geq 0 \Rightarrow Pe_e = \frac{F_e}{D_e} \leq 2$$

$\Rightarrow \quad |Pe| < 2$ شرط استفاده از تفاضل مرکزی

روش بالادست (upwind)



در صورت استفاده از روش بالادست خواهیم داشت:

$$(\rho u)_e \phi_e - (\rho u)_w \phi_w = \Gamma_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \Gamma_w \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w$$

اگر $u_e, u_w > 0 \Rightarrow \phi_w = \phi_W , \quad \phi_e = \phi_P$

$$\Rightarrow \Big[\overbrace{(F_w + D_w) + D_e + (F_e - F_w)}^{a_P}\Big] \phi_P = \underbrace{(F_w + D_w)}_{a_W} \phi_W + \underbrace{D_e}_{a_E} \phi_E$$

اگر $u_e, u_w < 0$

$$\Rightarrow \Big[\underbrace{D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)}_{a_P}\Big] \phi_P = \underbrace{D_w}_{a_W} \phi_W + \underbrace{(D_e - F_e)}_{a_E} \phi_E$$

در حالت کلی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E$$

که در آن:

$$a_E = D_e + \max[-F_e , 0]$$

$$a_W = D_w + \max[F_w , 0]$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w)$$