Note Title 4/27/2020

۹۹/۲/۸ دوشنبه - CFD I

حل معادلات ناویر-استوکس با استفاده از فرمولاسیون $\psi - \omega$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u \qquad (2)$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v \qquad (3)$$

vorticity : $\vec{\omega} = \vec{\nabla}\times\vec{v}$, دوبعد $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ (4)

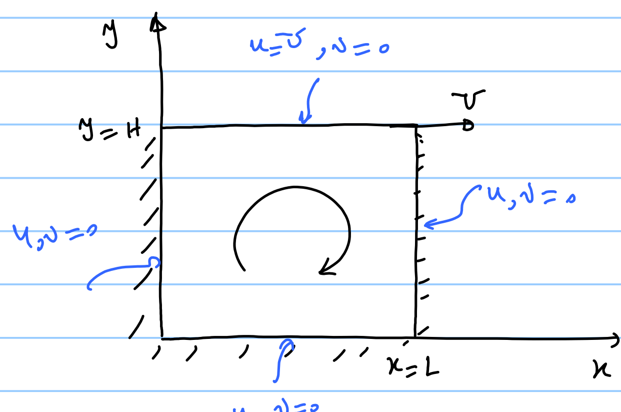
$$\frac{\partial}{\partial y}(2) - \frac{\partial}{\partial x}(3) \Rightarrow u\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right] + v\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$= \nu \nabla^2\left[\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla^2 \omega} \qquad (5)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} , \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$(4) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \psi = -\omega} \qquad (6)$$



at $x=0$,
$x=L$
$y=0$

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0 \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

at $y = H$, $\begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = V \\ v = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{cases}$

از طرفی با توجه به اینکه دور حفره یک خط جریان است، پس داریم:

$\psi = 0$ on all sides

شرط مرزی برای ω :

$$(6) \Rightarrow \omega = -\nabla^2 \psi$$

at $y=0$, $y=H$ $\Rightarrow \psi \neq f(x)$

$$(6) \Rightarrow \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$$

شرط مرزی ω برای دیواره‌های بالایی و پایینی

به همین ترتیب برای دیواره‌های چپ و راست

$$\Rightarrow \psi \neq f(y) \Rightarrow \boxed{\omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x}}$$

نحوه حل عددی برای درون حفره:

$$\nabla^2 \psi = -\omega \Rightarrow \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{ij} + \psi_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{ij} + \psi_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -\omega_{ij}$$

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad , \quad Re = \frac{VL}{\nu}$$

$$u_{ij} \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}}{2\Delta x} + v_{ij} \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}}{2\Delta y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\omega_{i+1,j} - 2\omega_{ij} + \omega_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{\omega_{i,j+1} - 2\omega_{ij} + \omega_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right]$$

معادله اول:

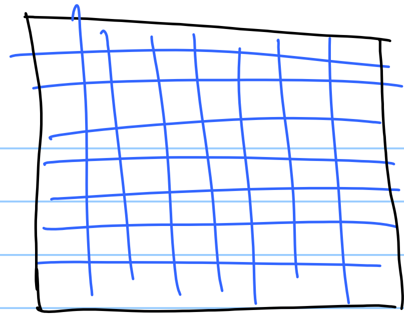
$$\Rightarrow \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} - 2(1+r^2)\psi_{ij} + r^2(\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) = -\Delta x^2 \omega_{ij}$$

معادله دوم:

$$\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} - 2(1+r^2)\omega_{ij} + r^2(\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1}) - Re\frac{u_{ij}\Delta x}{2}(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j}) - r Re \frac{v_{ij}\Delta x}{2}(\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1}) = 0$$

$$r = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

که در آن



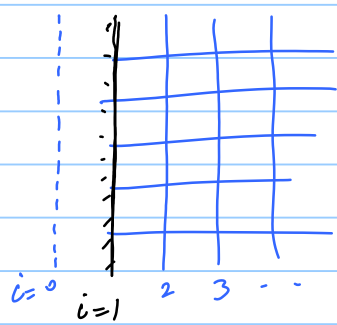
شرط پایداری :

$$\frac{u_{i,j}\,\Delta x}{2} \leq \frac{1}{Re}$$

$$\frac{v_{i,j}\,\Delta y}{2} \leq \frac{1}{Re}$$

شرط مرزی برای معادله اول ، شرط مرزی دیریکله ($\psi = 0$ روی دیواره‌ها) است .

حال برای شرط مرزی معادله دوم :



برای مرز سمت چپ :

$$\omega_{1,j} = -\left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right|_{1,j}$$

$$= -\frac{\psi_{2,j} - 2\psi_{1,j} + \psi_{0,j}}{\Delta x^2}$$

روی مرز سمت چپ $v = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\psi_{2,j} - \psi_{0,j}}{2\Delta x} = 0$

$$\Rightarrow \psi_{0,j} = \psi_{2,j}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,j} = -\frac{2\psi_{2,j} - 2\cancelto{0}{\psi_{1,j}}}{\Delta x^2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \omega_{1,j} = -\frac{2\psi_{2,j}}{\Delta x^2}}$$

به همین ترتیب برای مرزهای دیگر :

دیواره بالا : $\omega_{i,j_{max}} = \frac{2\psi_{i,j_{max}-1} + 2\Delta y}{\Delta y^2}$

دیواره بالا : $u = U \Rightarrow \left.\frac{\partial \psi}{\partial y}\right|_{i,j_{max}} = U$

$$\omega_{i_{max},j} = -\frac{2\psi_{i_{max}-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\omega_{i,1} = \frac{2\psi_{i,2}}{\Delta y^2}$$

پیشنهاد حدس اولیه :

پیشنهاد راحتی است که برای حدس اولیه، مقادیر درون مرزی برابر درون داشته میانگین‌ها پر شود.

$\psi_{i,j} = 0$ ✓

حدس اولیه برای ω $\longleftarrow$ $\omega_{i,j} = -\dfrac{2j}{\Delta y\, j_{max}}$

می‌دانیم که ω روی سطح بالا از رابطه $-\dfrac{2U}{H}$ فراهم می‌شود.

زیر تخفیف و فوق تخفیف کردن جواب :

اگر $\psi^{*}_{i,j}$ جواب جدید باشد، قبل از رفتن به تکرار بعد به شکل زیر می‌توان آن را زیر تخفیف یا فوق تخفیف کرد.

$$\psi^{k+1}_{i,j} = \psi^{k}_{i,j} + w_{r}\left(\psi^{*}_{i,j} - \psi^{k}_{i,j}\right)$$

$$\omega^{k+1}_{i,j} = \omega^{k}_{i,j} + w_{n}\left(\omega^{*}_{i,j} - \omega^{k}_{i,j}\right)$$

اگر $w_r > 1$ ، $w_n > 1$ $\Leftarrow$ فوق تخفیف

(Over Relaxation)

// $w_r < 1$ ، $w_n < 1$ $\Leftarrow$ زیر تخفیف

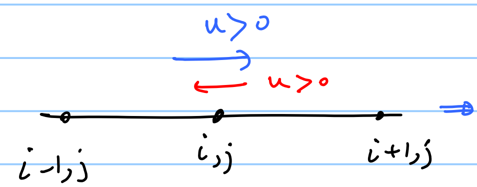
Under Relaxation

اعمال روش بادبالادست : Upwind Method

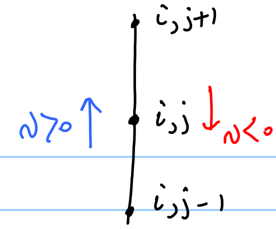
کاهش اثرات لزجی بودن سیال $\Longrightarrow$ $\downarrow$ $\dfrac{1}{Re}\nabla^2\omega$ عدد رینولدز بالا

افزایش اثرات هایپربولیک بودن معادلات $\Longleftarrow$

مشتقات x پیشرو و پسرو شود



$\Longrightarrow$ مشتقات در جهت x باید پیرو نوشته شود.



مثلا سرعت v به سمت بیرون منفی شود.

مشتق بسته به v پیشرو و پسرو نوشته شود.

لذا اگر $v_{i,j} > 0$ ، $u_{i,j} > 0$:

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = u_{ij}\left(\frac{\omega_{i,j} - \omega_{i-1,j}}{\Delta x}\right) + v_{ij}\left(\frac{\omega_{i,j} - \omega_{i,j-1}}{\Delta y}\right)$$

در $u_{ij} < 0$ ، $v_{i,j} < 0$:

$$// \qquad = u_{ij}\left(\frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{i,j}}{\Delta x}\right) + v_{ij}\left(\frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j}}{\Delta y}\right)$$

$\vdots$

فرمولاسیون پیشرفته ما :

$$\omega_{i+1,j} + \omega_{i-1,j} - 2(1+r^2)\omega_{ij} + r^2(\omega_{i,j+1} + \omega_{i,j-1})$$
$$- Re\, u_{ij}\, \Delta x\,(cxp\, \omega_{i+1,j} + cxo\, \omega_{ij} + cxm\, \omega_{i-1,j})$$
$$- r\, Re\, v_{ij}\, \Delta x\,(cyp\, \omega_{i,j+1} + cyo\, \omega_{ij} + cym\, \omega_{i,j-1}) = 0$$

کم شود اگر $\left|\frac{u_{ij}\,\Delta x}{2}\right| \leqslant \frac{1}{Re}$

$$cxp = \tfrac{1}{2}, \quad cxo = 0, \quad cxm = -\tfrac{1}{2}$$

در $\left|\frac{u_{ij}\,\Delta x}{2}\right| > \frac{1}{Re}$

if $u > 0 \Rightarrow cxp = 0, \quad cxo = 1, \quad cxm = -1$

if $u < 0 \Rightarrow cxp = 1, \quad cxo = -1, \quad cxm = 0$

در $\left|\frac{v_{ij}\,\Delta y}{2}\right| \leqslant \frac{1}{Re}$

$$cyp = \tfrac{1}{2}, \quad cyo = 0, \quad cym = -\tfrac{1}{2}$$

در $\left|\frac{v_{ij}\,\Delta y}{2}\right| > \frac{1}{Re}$

if $v > 0$: $c_{yp} = 0$, $c_{y0} = 1$, $c_{ym} = -1$

" $v < 0$: $c_{yp} = 1$, $c_{y0} = -1$, $c_{ym} = 0$