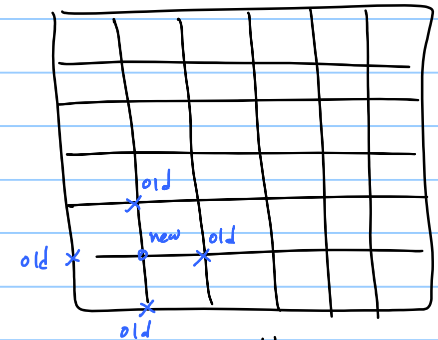
Note Title 4/25/2020

CFD I - شنبه ۹۹/۲/۶



$\nabla^2 u = 0$

ژاکوبی

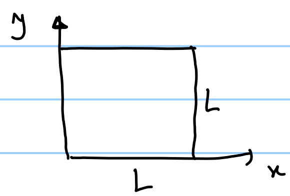
$$u_{m,n}^{new} = u_{m,n}^{old} + \frac{1}{4}\left\{u_{m+1,n}^{old} + u_{m-1,n}^{old} + u_{m,n+1}^{old} + u_{m,n-1}^{old}\right\}$$

FTCS : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 1/4$

روش وان نیومن برای تحلیل پایداری روش ژاکوبی :

$$u_{m,n}^{j} = \hat{u}^{j} e^{i(\alpha x + \beta y)}$$, $\alpha = \frac{m\pi}{L}$, $\beta = \frac{n\pi}{L}$

$m, n = 1, 2, \dots, N-1$



$$\Rightarrow \hat{u}^{j+1} = \frac{1}{4}\hat{u}^{j}\left(e^{i\alpha\Delta x} + e^{-i\alpha\Delta x} + e^{i\beta\Delta y} + e^{-i\beta\Delta y}\right)$$

$$Q = \frac{\hat{u}_{j+1}}{\hat{u}_j} = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha\Delta x) + \cos(\beta\Delta y)\right] \leftarrow$$

شرط پایداری $|Q| < 1$

$\Longrightarrow$ شرط پایداری برقرار است.

کندترین نرخ همگرائی هنگامی رخ می‌دهد که Q نزدیک به 1 باشد. این حالت هنگامی اتفاق می‌افتد که $\alpha\Delta x$ و $\beta\Delta y$ همزمان نزدیک به صفر یا نزدیک به π باشند. یعنی

$\alpha = \beta = \frac{\pi}{L}$ $\qquad$ $\alpha = \beta = \frac{(N-1)\pi}{L}$

اگر $\alpha = \beta = \frac{\pi}{L}$

$$\Rightarrow |Q| = \cos\frac{\pi \Delta x}{L} = \cos\frac{\pi}{N} = 1 - \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{N^2} + \dots$$

$$\Rightarrow |Q| \simeq 1 - \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{N^2} \leftarrow$$

مقدار $|Q|$ برای j تکرار عبارت است از

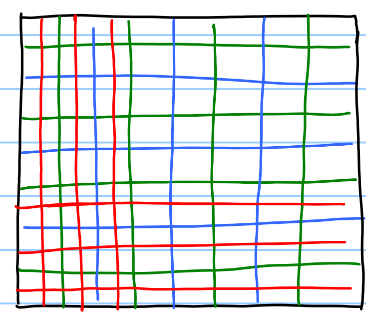
$$|Q|^j = \left(1 - \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{N^2}\right)^j$$

اکنون مثلاً برای نصف شدن دامنه برای j تکرار

$$\left[1 - \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{N^2}\right]^j = \frac{1}{2} \Rightarrow j \ln\Big[1 - \underbrace{\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{N^2}}_{\varepsilon}\Big] = -\ln 2$$

$$\ln(1-\varepsilon) \simeq -\varepsilon$$

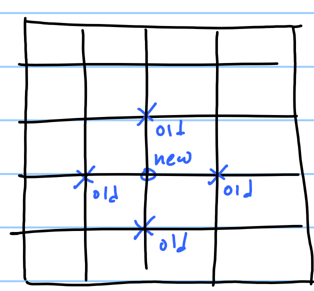
$$\Rightarrow j = \frac{2\ln 2}{(\pi/N)^2} = N^2 \frac{2\ln 2}{\pi^2}$$



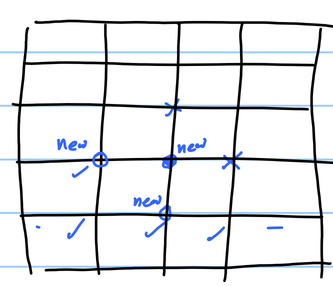
روش‌های چندشبکه‌ای

Mutigrid

روش گوس سیدل : Gauss - seidal iteration



ژاکوبی



گوس سیدل

$$u^{j+1}_{m,n} = \frac{1}{4}\left[u^{j+1}_{m-1,n} + u^{j}_{m+1,n} + u^{j+1}_{m,n-1} + u^{j}_{m,n+1}\right]$$

روش والاینیخ $\Rightarrow |Q| = 1 - \left(\frac{\pi}{N}\right)^2$

Successive Overrelaxation Method : SOR روش تکراری

$$u^{new} = (1-\omega)\, u^{old} + \omega \big(\underbrace{u^{new}}_{\text{گوس-سایدل}}\big)$$

$\omega \equiv$ Relaxation Factor , $1 < \omega < 2$

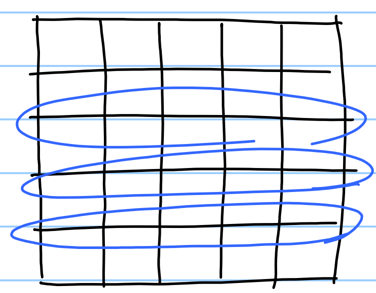
آنالیز وان نیومن $\Rightarrow$ $|\varphi| < 1$ if $\omega < 2$

برای یک ناحیه مربعی و معادله لاپلاس ، هنگامی $|\varphi|$ می‌نیمم خواهد شد ، که :

$$\omega_{opt} = 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{N}}$$

$$\Rightarrow \quad 1.2 < \omega_{opt} < 1.6$$

روش‌های تکراری سطری :



روش ژاکوبی سطری :

Point Jacobi : $u^{j+1}_{m,n} = \frac{1}{4}\left\{u^{j}_{m-1,n} + u^{j}_{m+1,n} + u^{j}_{m,n-1} + u^{j}_{m,n+1}\right\}$

Line " : $u^{j+1}_{m,n} = \frac{1}{4}\left\{u^{j+1}_{m-1,n} + u^{j+1}_{m+1,n} + u^{j}_{m,n-1} + u^{j}_{m,n+1}\right\}$

روش گوس سایدل سطری :

$$u^{j+1}_{m,n} = \frac{1}{4}\left\{u^{j+1}_{m-1,n} + u^{j+1}_{m+1,n} + u^{j}_{m,n+1} + u^{j+1}_{m,n-1}\right\}$$

روش SOR سطری :

$$u^{j+1}_{m,n} = (1-\omega)\, u^{j}_{m,n} + \omega \big(\underbrace{u^{j+1}_{m,n}}_{\text{گوس سایدل سطری}}\big)$$

روش ADI :

Alternating Direction Implicit Method

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) \leftarrow$$

با اعمال روش کرنک - نیکلسون :

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\,\frac{T^{n+1}_{i,j} - T^{n}_{i,j}}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}\left(T^{n+1}_{i+1,j} + T^{n}_{i+1,j}\right) - 2\left[\frac{1}{2}\left(T^{n+1}_{i,j} + T^{n}_{i,j}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(T^{n+1}_{i-1,j} + T^{n}_{i-1,j}\right)}{\Delta x^2}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}\left(T^{n+1}_{i,j+1} + T^{n}_{i,j+1}\right) - 2\left[\frac{1}{2}\left(T^{n+1}_{i,j} + T^{n}_{i,j}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(T^{n+1}_{i,j-1} + T^{n}_{i,j-1}\right)}{\Delta y^2}$$

همانطور که دیده می‌شود، دستگاه معادلات منتج دارای ماتریس ضرایب پنج قطری خواهد بود.
روش ADI می‌تواند ساختار ماتریس ضرایب را بصورت سه قطری حفظ می‌کند:

مرحله اول :

در این مرحله به اندازه نصف گام زمانی پیش می‌رویم و مثلاً $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ را ضمنی و $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ را بصورت صریح می‌نویسیم.

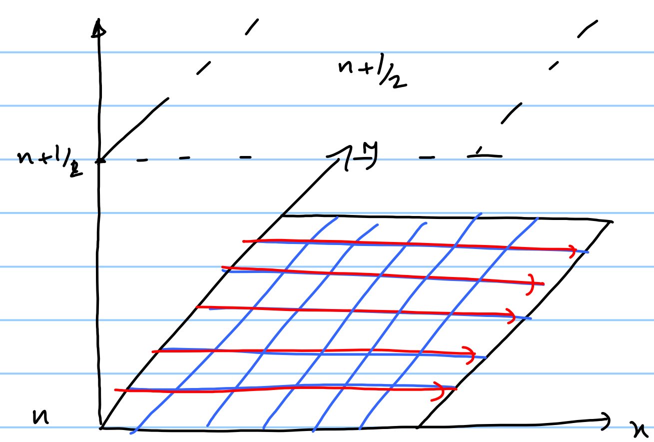
$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{T^{n+1/2}_{i,j} - T^{n}_{i,j}}{\Delta t/2} = \frac{T^{n+1/2}_{i+1,j} - 2T^{n+1/2}_{i,j} + T^{n+1/2}_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T^{n}_{i,j+1} - 2T^{n}_{i,j} + T^{n}_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{A\,T^{n+1/2}_{i-1,j} + B\,T^{n+1/2}_{i,j} + C\,T^{n+1/2}_{i+1,j} = R^{n}_{i}}$$

که :

$$A = C = \frac{\alpha\Delta t}{2(\Delta x)^2} \quad , \quad B = -1 - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$R^{n}_{i} = -T^{n}_{i,j} - \frac{\alpha\Delta t}{(\Delta y)^2}\left(T^{n}_{i,j+1} - 2T^{n}_{i,j} + T^{n}_{i,j-1}\right)$$



مرحله دوم : در این مرحله با پیمودن نصف گام زمانی دیگر به $T^{n+1}_{i,j}$ خواهیم رسید

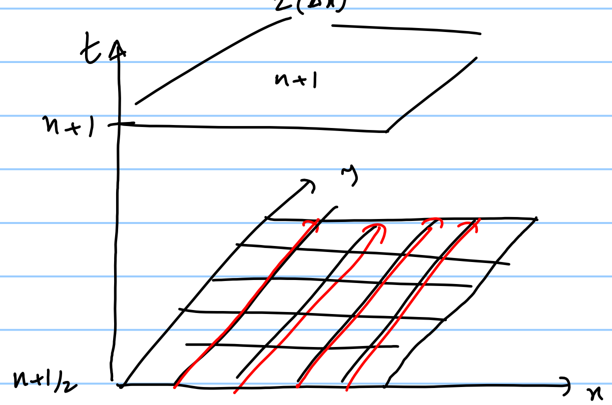
با این تفاوت که این بار پیمایش نصف گام دوم، $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ را صریح و $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ را ضمنی درنظر می‌گیریم

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha}\frac{T_{i,j}^{n+1}-T_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t/2} = \frac{T_{i+1,j}^{n+1/2}-2T_{i,j}^{n+1/2}+T_{i-1,j}^{n+1/2}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^{n+1}-2T_{i,j}^{n+1}+T_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}$$

$$\Rightarrow A\,T_{i,j-1}^{n+1} + B\,T_{i,j}^{n+1} + C\,T_{i,j+1}^{n+1} = R_i^{n+1/2}$$

$$A = C = \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta y)^2} \quad , \quad B = -1 - \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2}$$

$$R_i^{n+1/2} = -T_{i,j}^{n+1/2} - \frac{\alpha \Delta t}{2(\Delta x)^2}\left(T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}\right)$$



$$u_{i,j}^{n} = \hat{u}^{n}\left(e^{i\beta_1 x} + e^{i\beta_2 y}\right)$$

تحلیل پایداری

$$\Rightarrow G = \frac{1 - r(1-\cos\beta_2 h)}{1 + r(1-\cos\beta_1 h)} \cdot \frac{1 - r(1-\cos\beta_1 h)}{1 + r(1-\cos\beta_2 h)} \quad , \quad r = \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2}$$

لذا ADI بصورت نامشروط پایدار است.

$$T.E. = O\left((\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2\right)$$