Note Title 4/18/2020

CFDI - شنبه ۳۰ فروردین

نکاتی در مورد مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

1) اگر $\vec{x}$ بردار ویژه متناظر با λ برای ماتریس A باشد، $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$ در این صورت

$$A(A\vec{x}) = A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$$

$$\Rightarrow A^2\vec{x} = \lambda^2\vec{x} \quad \Rightarrow A^p\vec{x} = \lambda^p\vec{x}$$

یعنی در این صورت λ^p مقدار ویژه A^p بوده ولی بردار ویژه متناظر با آن همان $\vec{x}$ خواهد بود.

2) اگر $f(A)$ یک چند جمله‌ای برحسب ماتریس A باشد:

$$f(A) = a_p A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \dots + a_0 I$$

مقادیر ویژه $f(A)$ عبارتند از:

$$f(A)\vec{x} = \left(a_p A^p + a_{p-1}A^{p-1} + \dots + a_0 I\right)\vec{x}$$

$$= \left(a_p \lambda^p + a_{p-1}\lambda^{p-1} + \dots + a_0\right)\vec{x}$$

$$= f(\lambda)\vec{x}$$

3) چنانچه λ مقدار ویژه A باشد در این صورت $\underbrace{[f_1(A)]^{-1} f_2(A)}_{\text{مقدار ویژه}}$ عبارت است از $\dfrac{f_2(\lambda)}{f_1(\lambda)}$

اثبات:

$$\underbrace{[f_1(A)]^{-1} f_1(A)}_{I}\,\vec{x} = [f_1(A)]^{-1} f_1(\lambda)\vec{x}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = [f_1(A)]^{-1} f_1(\lambda)\vec{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{x}}{f_1(\lambda)} = \left[f_1(A)\right]^{-1}\vec{x} \qquad (1)$$

$$\left[f_1(A)\right]^{-1} f_2(A)\vec{x} = \left[f_1(A)\right]^{-1} f_2(\lambda)\vec{x} \qquad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \underline{\left[f_1(A)\right]^{-1} f_2(A)\vec{x}} = \frac{f_2(\lambda)}{\underline{f_1(\lambda)}}\vec{x}$$

تکمیل پایداری ماتریسی روش کرنک - نیکلسون :

بازنویسی : $-r u_{i-1}^{n+1} + (2+2r) u_i^{n+1} - r u_{i-1}^{n+1} =$

$$r u_{i-1}^{n} + (2-2r) u_i^{n} + r u_{i-1}^{n} \quad , r = \frac{k}{h^2}$$

با فرض : $u_0 = u_N = 0 \leftarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2+2r & -r & & \\ -r & 2+2r & -r & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} 2-2r & r & & \\ r & 2-2r & r & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n}$$

$$\Rightarrow (2I - rB)\vec{u}^{\,n+1} = (2I + rB)\vec{u}^{\,n}$$

که B عبارت است از :

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u}^{\,n+1} = \underbrace{\overbrace{(2I - rB)^{-1}}^{[f_1(B)]^{-1}}\ \overbrace{(2I + rB)}^{f_2(B)}}_{\checkmark}\vec{u}^{\,n}$$

از قبل برای ماتریسی مانند B داشتیم که :

$$\lambda_k = -4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \leftarrow$$

$$(3) \Rightarrow \lambda = \frac{2 - 4r\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)}{2 + 4r\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

روش کرنک-نیکلسون ←

همواره >1

شرط پایداری: $|\lambda| < 1$ همواره برقرار است. لذا این روش

بدون قید و شرط پایدار است.

حال نیز از قضیه دایره گرشگورین استفاده می‌شود:

$$\underbrace{(2I - rB)}_{C}\vec{u}^{\,n+1} = (2I + rB)\vec{u}^{\,n}$$

$$= \left[4I - (2I - rB)\right]\vec{u}^{\,n}$$

$$\Rightarrow C\vec{u}^{\,n+1} = (4I - C)\vec{u}^{\,n}$$

$$\Rightarrow \vec{u}^{\,n+1} = (4C^{-1} - I)\vec{u}^{\,n}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{4}{\lambda} - 1\right| \leqslant 1 \Rightarrow \lambda \geqslant 2 \qquad \text{شرط پایداری}$$

مقادیر ویژه ماتریس C

$$C = 2I - rB = \begin{bmatrix} 2+2r & -r & & \\ -r & 2+2r & -r & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \end{bmatrix}$$

با استفاده از قضیه دایره گرشگورین

$$|\lambda - (2+2r)| \leqslant 2r$$

$$\Rightarrow -2r \leqslant \lambda - 2 - 2r \leqslant 2r$$

$$\Rightarrow 2 \leqslant \lambda \leqslant 2 + 4r \quad \checkmark$$

تحلیل پایداری برای شرایط مرزی مشتق:

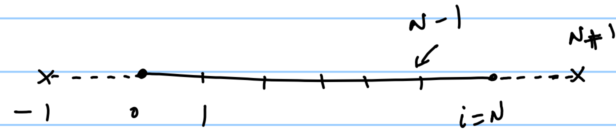
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h_1 (u - v_1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = -h_2 (u - v_2)$$

که در آن h_1، h_2، v_1 و v_2 ترتیبی مثبت و حقیقی می‌باشند.

با استفاده از روش مرز مجازی و تفاضل مرکزی:



$$\frac{u_1 - u_{-1}}{2\Delta x} = h_1 (u_0 - v_1) \Rightarrow u_{-1} = u_1 - 2\Delta x h_1 (u_0 - v_1)$$

$$\frac{u_{N+1} - u_{N-1}}{2\Delta x} = -h_2 (u_N - v_2)$$

$$\Rightarrow u_{N+1} = u_{N-1} - 2\Delta x h_2 (u_N - v_2)$$

ضمناً فرض برای حل مسئله فوق از روش صریح (FTCS) استفاده شده باشد،

$$u_i^{n+1} = r u_{i-1}^n + (1-2r) u_i^n + r u_{i+1}^n$$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}^{n+1} = \underbrace{\begin{bmatrix} [1-2r(1+h_1\Delta x)] & 2r & 0 & \cdots & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & 2r & [1-2r(1+h_2\Delta x)] \end{bmatrix}}_{} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}^{n}$$

با استفاده از قضیه دایره گرشگورین:

$$|\lambda - [1-2r(1+h_1\Delta x)]| \leq 2r \qquad (1)$$

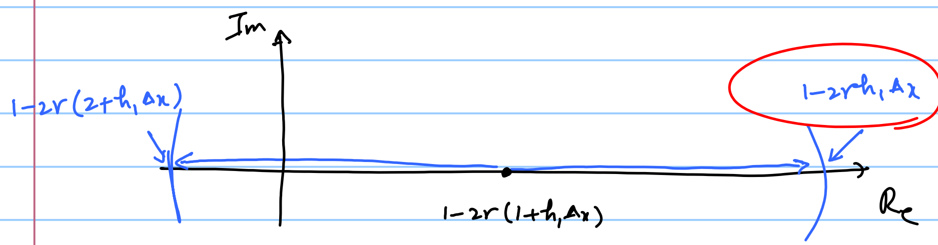
$$|\lambda - (1-2r)| \leq 2r \qquad (2)$$

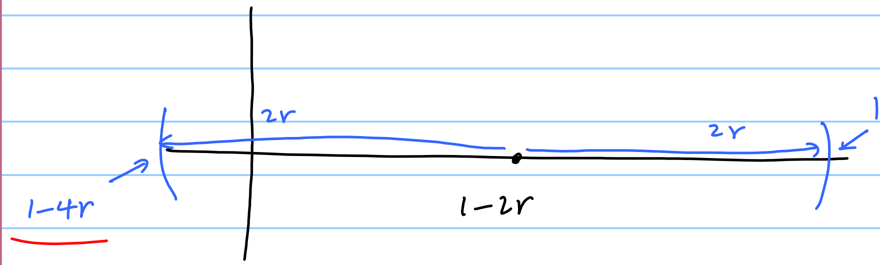
$$\left|\lambda - [1-2r(1+h_2\Delta x)]\right| \leqslant 2r \qquad (3)$$

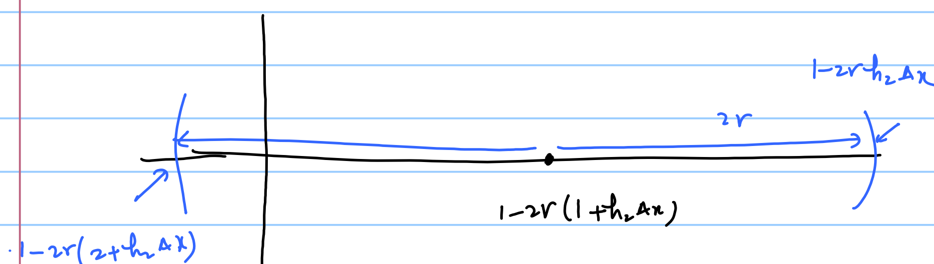
(1) $\Rightarrow \quad 1-2r(2+h_1\Delta x) \leqslant \lambda \leqslant 1-2rh_1\Delta x$

(2) $\Rightarrow \quad 1-4r \leqslant \lambda \leqslant 1$

(3) $\Rightarrow \quad 1-2r(2+h_2\Delta x) \leqslant \lambda \leqslant 1-2rh_2\Delta x$







(1) $\quad 1-2rh_1\Delta x < 1 \quad \Rightarrow \quad r>0$

$1-2r(2+h_1\Delta x) > -1$

$\Rightarrow \quad 2r(2+h_1\Delta x) < 2$

$\Rightarrow \quad \boxed{r < \frac{1}{2+h_1\Delta x}}$

(2) $\Rightarrow \quad 1-4r > -1 \Rightarrow 4r<2$

$\Rightarrow \quad \boxed{r < \frac{1}{2}}$

(3) $\Rightarrow \quad 1-2r(2+h_2\Delta x) > -1$

$$\Rightarrow 2r(2+h_2\Delta x) < 2$$

$$\Rightarrow \boxed{r < \frac{1}{2+h_2\Delta x}}$$

شرط پایداری روش FTCS برای مسئله فوق :

$$r \leq \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2+h_1\Delta x}, \frac{1}{2+h_2\Delta x}\right\}$$