Note Title 4/13/2020

CFD I - دوشنبه ۲۵/۱/۹۹

روش وان-نیومن : Von-Neumann Method

$$u(x,t) = \hat{u}(t)\, e^{imx} \quad , \quad x = j\Delta x \ , \ t = n\Delta t$$

$$\Rightarrow u(j\Delta x, n\Delta t) = \hat{u}_n\, e^{imx_j} \quad \leftarrow$$

FTCS :
$$u_j^{n+1} = u_j^n + r\left(u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n\right) \quad , \quad r = \frac{k}{h^2}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{n+1} e^{imx_j} = \hat{u}_n e^{imx_j} + r\,\hat{u}_n\left(e^{imx_{j-1}} - 2e^{imx_j} + e^{imx_{j+1}}\right)$$

$$e^{imx_{j-1}} = e^{imx_j} e^{-imh} \qquad e^{imx_{j+1}} = e^{imx_j} e^{imh}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n \left[1 + r\left(\underbrace{e^{imh} + e^{-imh}}_{2\cos mh} - 2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n \left[1 + r\left(2\cos mh - 2\right)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{u}_{n+1}}{\hat{u}_n} = 1 + r\left(2\cos mh - 2\right) \quad , \quad \underbrace{\frac{\hat{u}_{n+1}}{\hat{u}_n}}_{\text{Amp. Factor}} = g \equiv \text{ضریب بزرگنمایی}$$

$$g = 1 + 2r(\cos mh - 1) = 1 - 4r\sin^2\left(\frac{mh}{2}\right)$$

شرط پایداری $\quad |g| \leqslant 1 \Rightarrow \left|1 - 4r\sin^2\left(\frac{mh}{2}\right)\right| \leqslant 1$

$$|1 - 4r| \leqslant 1 \Rightarrow \boxed{r \leqslant 1/2}$$

ویژگی‌های روش وان نیومن:

1) فقط قابل اعمال برای تحلیل پایداری مسائل خطی

2) شرط پایداری وان-نیومن شرط لازم برای پایداری مسئله است ولی کافی نیست.

۳) چنانچه شرایط مرزی پریودیک باشد، شرط پایداری وان نیومن لازم و کافی بر تحلیل پایداری مسئله است.

مثال: با استفاده از روش وان نیومن پایداری روش BTCS را تحقیق کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Longrightarrow \text{BTCS}$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + r\left(u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}\right)$$

$$u_j^n = \hat{u}_n e^{imx_j}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_{n+1} = \hat{u}_n + r\hat{u}_{n+1}\left(e^{-imh} + e^{imh} - 2\right)$$

$$\Rightarrow g = 1 + rg\left(\underbrace{e^{-imh} + e^{imh}}_{2\cos mh} - 2\right)$$

$$= 1 - 4rg\sin^2\left(\frac{mh}{2}\right) \Rightarrow \boxed{g = \frac{1}{1 + 4r\sin^2\left(\frac{mh}{2}\right)}}$$

$\Rightarrow$ همواره $|g| < 1 \Rightarrow$ روش بدون قید و شرط پایدار است.

Unconditionally stable

روش ماتریسی در تحلیل پایداری : Matrix stability

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$u(0,t) = u(1,t) = 0$ و $u(x,0) = f(x)$

FTCS : $u_i^{n+1} = r u_{i-1}^n + (1-2r) u_i^n + r u_{i-1}^n$

شرایط مرزی $u_0 = u_N = 0$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n+1}}_{\vec{u}^{\,n+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-2r & r & 0 & \cdots & \\ r & 1-2r & r & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & r & 1-2r \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \end{bmatrix}^{n}}_{\vec{u}^{\,n}}$$

$$\vec{u}^{\,n} = A\,\vec{u}^{\,n-1} = A\left(A u^{n-2}\right) = \cdots = A^n \vec{u}_0$$

شرط اولیه

$$\vec{u}_0^{\,*} = \vec{u}_0 + \vec{e}_0 \quad , \quad \vec{e}_0 \equiv$$ بردار خطای اولیه

$$(\vec{u}^{\,1})^* = A(\vec{u}_0)^* \Rightarrow (\vec{u}^{\,n})^* = A^n (\vec{u}^{\,0})^*$$

$$\vec{e}^{\,n} = \vec{u}_n^{\,*} - \vec{u}_n = A^n(\vec{u}_0^{\,*} - \vec{u}_0) = A^n \vec{e}_0$$

$$\vec{e}_0 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \vec{v}_k$$

$$\Rightarrow \vec{e}_1 = A\vec{e}_0 = A \sum_{k=1}^{N-1} c_k \vec{v}_k = \sum c_k A \vec{v}_k = \sum c_k \lambda \vec{v}_k$$

$$\Rightarrow \vec{e}_2 = A\vec{e}_1 = \sum c_k \lambda^2 \vec{v}_k$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_n = \sum c_k \lambda^n \vec{v}_k$$

لذا شرط پایداری روش محدود این است که $|\lambda| \leq 1$

یادآوری $\quad \lambda_k = b + 2c\sqrt{\frac{a}{c}}\cos\frac{k\pi}{N} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, N-1$

$$a = r, \quad b = 1-2r, \quad c = r$$

$$\Rightarrow \lambda_k = (1-2r) + 2r\cos\frac{k\pi}{N} = 1 - 2r\left(1 - \cos\frac{k\pi}{N}\right)$$

$$= 1 - 4r\sin^2\frac{k\pi}{2N}$$

شرط پایداری: $|\lambda_k| \leq 1$

$$\Rightarrow |1-4r| < 1 \Rightarrow \boxed{r < 1/2}$$

قضیه دایره گرشگورین : Gerschgorin Circle Theorem

فرض کنید $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $N \times N$ بوده و C_n بیانگر یک محدوده

دایروی در فضای مختلط با مرکز a_{nn} و شعاعی معادل مجموع اندازه عناصر غیر قطری باشد.

به عبارت دیگر برای سطر nام :

$$C_n = \left\{ \lambda : |\lambda - a_{nn}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N} |a_{nj}| \right\}$$

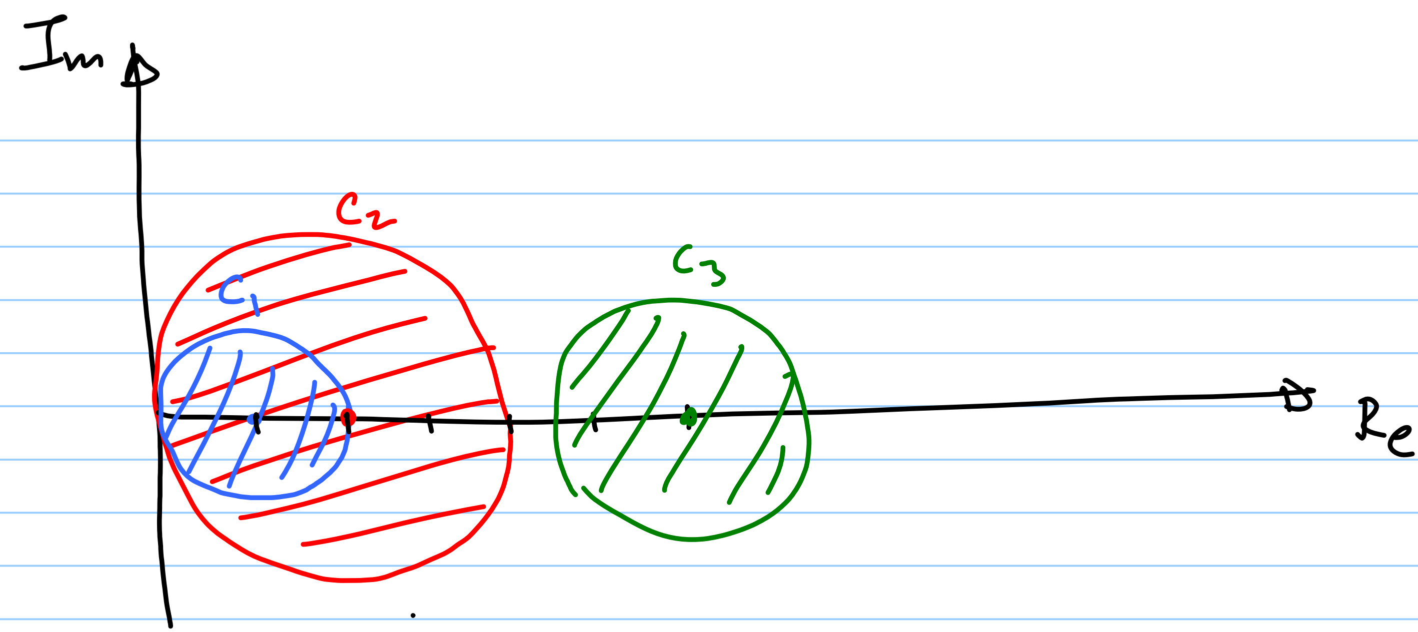
مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \{\lambda : |\lambda - 1| \leqslant 0 + 1\} \Rightarrow C_1 = \{\lambda : |\lambda - 1| \leqslant 1\}$$

$$C_2 = \{\lambda : |\lambda - 2| \leqslant 1 + 1\} \Rightarrow C_2 = \{\lambda : |\lambda - 2| \leqslant 2\}$$

$$C_3 = \{\lambda : |\lambda - 6| \leqslant \tfrac{1}{2} + 1\} \Rightarrow C_3 = \{\lambda : |\lambda - 6| \leqslant 3/2\}$$


Im
Re
c1
c2
c3