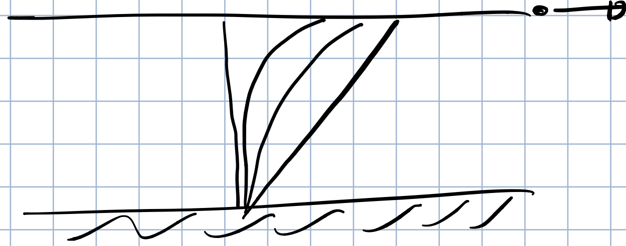
CFD I - جلسه مجازی دوم :

روش‌های محاسباتی برای معادلات سهموی :

Parabolic Equations

$$u_t = \alpha u_{xx}$$

$$u_t = \nu u_{yy}$$

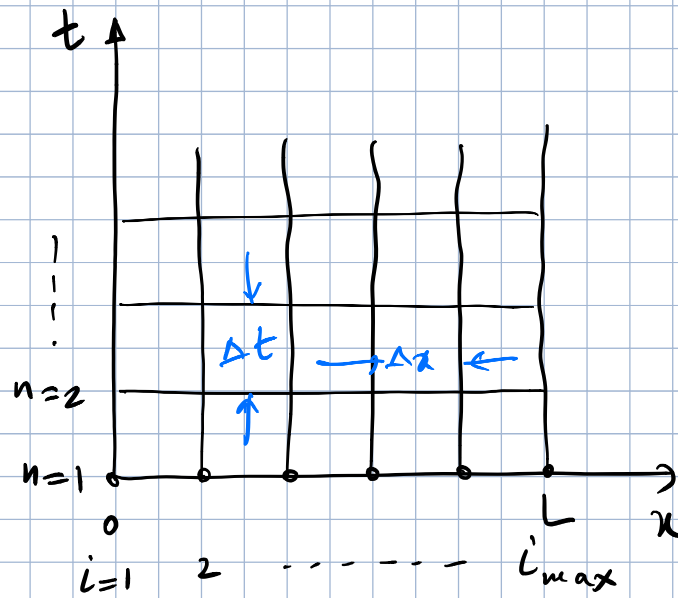


$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$



$$x_i = (i-1)\Delta x \quad , \quad t_n = (n-1)\Delta t$$

$$i = 1, 2, \dots, i_{max} \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$\Delta x = h \quad , \quad \Delta t = k$$

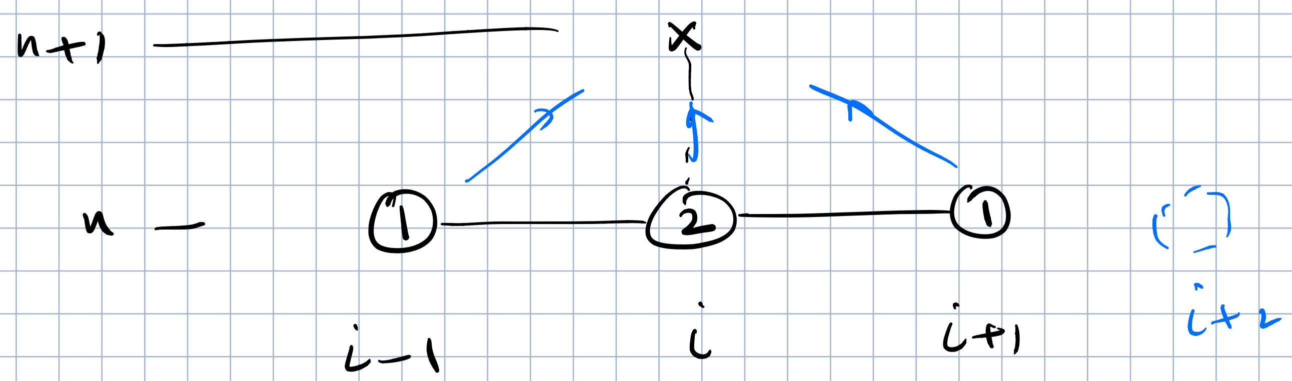
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} + O(k)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{k} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + O(k, h^2)$$

$$\Rightarrow u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k}{h^2}\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

Forward Time Central Space (FTCS)



فرم اپراتوری:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + r\,\delta_x^2 u_i^n \quad , \quad r = \frac{k}{h^2}$$

$$\Rightarrow u_i^{n+1} = (1 + r\,\delta_x^2)\, u_i^n$$

مثال: مطلوب است حل عددی با استفاده از روش FTCS برای معادله زیر:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

شرایط مرزی: $u(0,t) = u(1,t) = 0$

شرط اولیه: $u(x,0) = \begin{cases} 2x & \text{if } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x) & \text{"} \quad 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$

فرض کنید $h = \frac{1}{10}$ ، $k = \frac{1}{1000}$ و جواب سری را با حل دقیق مقایسه نمایید.

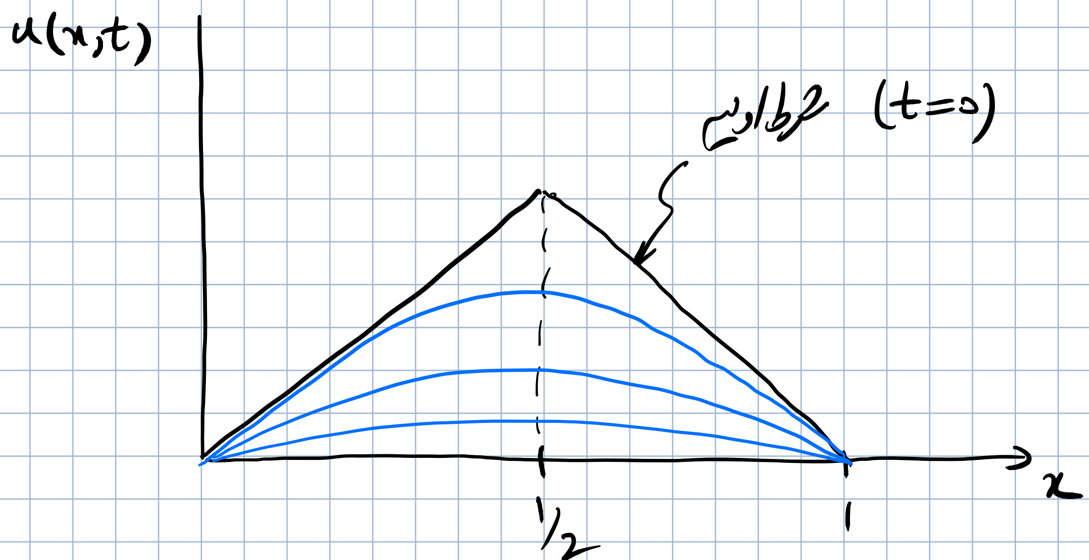
$$u_i^{n+1} = (1 + r\delta_x^2)\, u_i^n$$

$$\Rightarrow \quad u_i^{n+1} = r\, u_{i+1}^n + (1-2r)\, u_i^n + r u_{i-1}^n$$

که $\quad r = \frac{k}{h^2} = \frac{1/1000}{1/100} \Rightarrow r = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow \quad u_i^{n+1} = \frac{1}{10}\, u_{i-1}^n + \frac{8}{10}\, u_i^n + \frac{1}{10}\, u_{i-1}^n$$

Exact :
$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{n\pi}{2}\right)(\sin n\pi x)\, e^{-n^2\pi^2 t}$$



نتایج حل سری برای $r=0.1$

$x = ۰/۱۰$.

	$i = ۱$ $x = ۰$	$i = ۲$ $x = ۰/۱$	$i = ۳$ $x = ۰/۲$	$i = ۴$ $x = ۰/۳$	$i = ۵$ $x = ۰/۴$	$i = ۶$ $x = ۰/۵$	$i = ۷$ $x = ۰/۶$
۰/۰۰۰	۰	۰/۲۰۰۰	۰/۴۰۰۰	۰/۶۰۰۰	۰/۸۰۰۰	۱/۰۰۰۰	۰/۸۰۰۰
۰/۰۰۱	۰	۰/۲۰۰۰	۰/۴۰۰۰	۰/۶۰۰۰	۰/۸۰۰۰	۰/۹۶۰۰	۰/۸۰۰۰
۰/۰۰۲	۰	۰/۲۰۰۰	۰/۴۰۰۰	۰/۶۰۰۰	۰/۷۹۶۰	۰/۹۲۸۰	۰/۷۹۶۰
۰/۰۰۳	۰	۰/۲۰۰۰	۰/۴۰۰۰	۰/۵۹۹۶	۰/۷۸۹۶	۰/۹۰۱۶	۰/۷۸۹۶
۰/۰۰۴	۰	۰/۲۰۰۰	۰/۴۰۰۰	۰/۵۹۸۶	۰/۷۸۱۸	۰/۸۷۹۲	۰/۷۸۱۸
۰/۰۰۵	۰	۰/۲۰۰۰	۰/۳۹۹۹	۰/۵۹۷۱	۰/۷۷۳۲	۰/۸۵۹۷	۰/۷۷۳۲
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۰/۰۱	۰	۰/۱۹۹۶	۰/۳۹۶۸	۰/۵۸۲۲	۰/۷۲۸۱	۰/۷۸۶۷	۰/۷۲۸۱
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۰/۰۲	۰	۰/۱۹۳۸	۰/۳۷۸۱	۰/۵۳۷۳	۰/۶۴۸۶	۰/۶۸۹۱	۰/۶۴۸۶

مقایسه حل عددی و دقیق در $x = 0.3$:

مقایسه نتایج عددی و تحلیلی $x = ۰/۳۰$.

	حل تفاضل محدود $(x = ۰/۳)$	حل تحلیلی $(x = ۰/۳)$	مقدار اختلاف	درصد خطا
$t = ۰/۰۰۵$	۰/۵۹۷۱	۰/۵۹۶۶	۰/۰۰۰۵	۰/۰۸
$t = ۰/۰۱$	۰/۵۸۲۲	۰/۵۷۹۹	۰/۰۰۲۳	۰/۴
$t = ۰/۰۲$	۰/۵۳۷۳	۰/۵۳۳۴	۰/۰۰۳۹	۰/۷
$t = ۰/۱$	۰/۲۴۷۲	۰/۲۴۴۴	۰/۰۰۲۸	۱/۱

مقایسه نتایج عددی و تحلیلی $x = ۰/۵۰$.

	حل تفاضل محدود $(x = ۰/۵)$	حل تحلیلی $(x = ۰/۵)$	مقدار اختلاف	درصد خطا
$t = ۰/۰۰۵$	۰/۸۵۹۷	۰/۸۴۰۴	۰/۰۱۹۳	۲/۳
$t = ۰/۰۱$	۰/۷۸۶۷	۰/۷۷۴۳	۰/۰۱۲۴	۱/۶
$t = ۰/۰۲$	۰/۶۸۹۱	۰/۶۸۰۹	۰/۰۰۸۲	۱/۲
$t = ۰/۱$	۰/۳۰۵۶	۰/۳۰۲۱	۰/۰۰۳۵	۱/۲

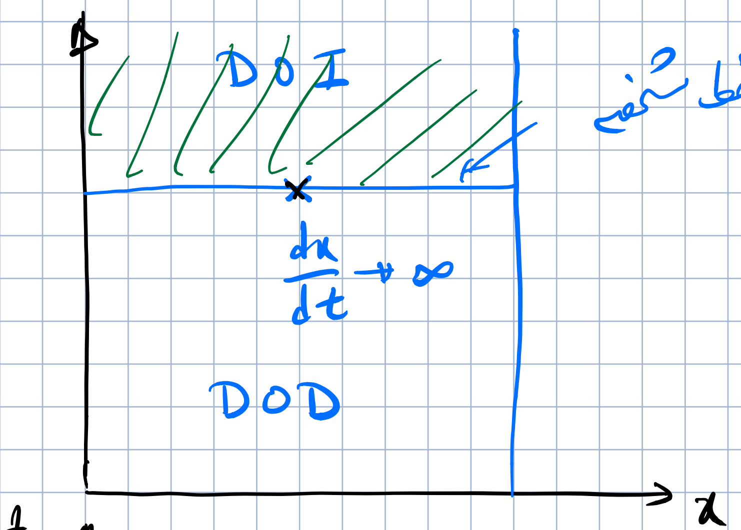
$\Delta t = 0.01 \Rightarrow r = 1$

نتایج حل عددی $.r = ۱$

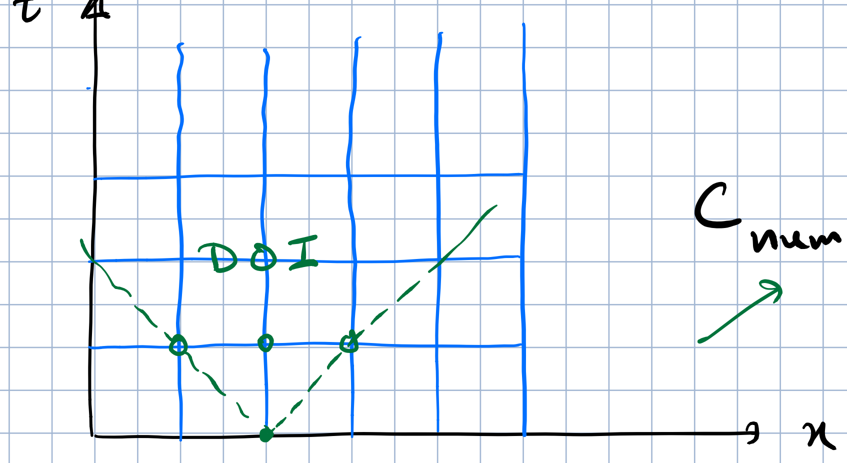
t	$i = ۱$ $x = ۰$	$i = ۲$ $x = ۰/۱$	$i = ۳$ $x = ۰/۲$	$i = ۴$ $x = ۰/۳$	$i = ۵$ $x = ۰/۴$	$i = ۶$ $x = ۰/۵$	$i = ۷$ $x = ۰/۶$
۰/۰۰	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱/	۰/۸
۰/۰۱	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۰/۶	۰/۸
۰/۰۲	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۴	۱/۰	۰/۴
۰/۰۳	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۲	۱/۲	−۰/۲	۱/۲
۰/۰۴	۰	۰/۲	۰/۰	۱/۴	−۱/۲	۲/۶	−۱/۲

سرعت انتشار سیگنال در حالت تحلیلی و عددی:

Propagation speed of disturbance



$$C_{Anal} = \infty$$



$$C_{num} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{r(\Delta x)^2}$$

$$= \frac{1}{r \Delta x} = \text{finite}$$

تحت چه شرایطی می‌توان به جواب‌های عددی امیدوار بود؟

سازگاری: Consistency

یک FDE هنگامی با PDE خود سازگار است که وقتی سایز شبکه بسیار ریز شود،

FDE به PDE میل نماید. یعنی:

$$\lim_{mesh \to 0} (PDE - FDE) = \underline{\lim_{mesh \to 0} (T.E.)} \to 0$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \to \beta$$

مثال: سازگاری روش FTCS را تحقیق کنید:

$$T.E. = O(\Delta t, \Delta x^2)$$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0}} (T.E) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \text{این روش سازگار است.}$$

مثال: سازگاری روش دوفورت - فرانکل (Du fort - Frankel) را تحقیق کنید.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{(\Delta x)^2}\left(u_{i+1}^n - u_i^{n+1} - u_i^{n-1} + u_{i-1}^n\right)$$

T.E. برای این روش:

$$T.E. = \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big|_i^n (\Delta x)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big|_i^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big|_i^n (\Delta t)^2$$

اگر $\displaystyle\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = \beta$ ، FDE با PDE خود سازگار نیست.

پایداری : Stability

یک روش عددی هنگامی پایدار است که خطاها از هر منبعی که باشند در فرآیند پیشروی اجازه رشد پیدا نکنند.

همگرایی : Convergence

چنانچه جواب FDE در هر نقطه با ریز کردن شبکه به جواب PDE میل نماید گوییم روش عددی همگراست. یعنی:

$$\lim_{mesh \to 0} \left| \overset{\text{PDE}}{u_i^n} - \overset{\text{FDE}}{v_i^n} \right| = 0$$

قضیه هم‌ارزی Lax : Lax's Equivalence Theorem

برای یک مسئله خطی با شرایط اولیه صحیح (خوش وضع) شرط لازم و کافی برای اینکه FDE مربوطه همگرا باشد این است که FDE سازگار و پایدار باشد.